PRIMEIRA PROVA - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER - MAP 5722

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

Abaixo faremos duas questões não relacionadas a respeito de distribuições de suporte compacto.

(1 Ponto) a) Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ uma distribuição. Suponha que sing supp (u) seja um compacto de Ω. Mostre que existe uma função $f \in C^\infty(\Omega)$ e uma distribuição $v \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tal que

$$u = f + v.$$

(Acima, f é vista no sentido de distribuições, ou seja, $f(\phi) = T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx$ para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$).

(1 Ponto) b) Existe uma distribuição não nula $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tal que $u = T_f$, em que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é uma função analítica em Ω? (Use os resultados vistos em sala de aula e nas listas)

Exercício 2

Nos itens abaixo, u é uma distribuição em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(1 Ponto) (a) Ache todas as distribuições $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ que resolvem a equação abaixo:

$$u' = \delta_0 - \delta_1$$

(1 Ponto) b) Mostre que existe uma função u contínua tal que:

$$u'' = \delta_0 - \delta_1.$$

Conclua que todas as distribuições $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ que satisfazem a equação acima são contínuas. Justifique.

Exercício 3

O objetivo deste exercício é estudar o limites de certas distribuições:

(1,25 ponto) a) Seja $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dado por $f_a(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2+a^2}$, para $a > 0$. O limite $u := \lim_{a\to 0^+} f_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ é uma distribuição muito importante que foi vista diversas vezes em sala de aula. Qual é esta distribuição? Justifique.

(1,25 ponto) b) Seja $1 \in \mathcal{D}'(]0,1[)$ a distribuição que corresponde a função 1, ou seja, dado $\phi \in \mathcal{D}'(]0,1[)$ definimos $1(\phi) := \int_0^1 \phi(t)\,dt$. Mostre que o seguinte limite é válido:

$$\lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{2^j-1} \frac{1}{2^j}\delta_{\frac{k}{2^j}} = 1, \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Exercício 4

Definimos $Pf\left(\frac{1}{|x|}\right) : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ da seguinte maneira

$$Pf\left(\frac{1}{|x|}\right)(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{|x|} + 2\phi(0)\ln(\epsilon)\right).$$

(1,5 ponto) a) Mostre que $Pf\left(\frac{1}{|x|}\right)$ é uma distribuição de ordem exatamente igual a 1. (Dica: A distribuição acima se parece com $PV\left(\frac{1}{x}\right)$ e pode ser estudada de maneira similar. Podemos, por exemplo, usar que $\frac{\phi(x)}{|x|} = \frac{\phi(x)-\phi(0)}{|x|} + \frac{\phi(0)}{|x|}$ e a fórmula de Taylor para estudar o limite acima)

(1 ponto) c) Ache o suporte e o suporte singular de $Pf\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

(1 ponto) d) A distribuição $xPf\left(\frac{1}{|x|}\right)$ é dada por uma função localmente integrável. Qual é esta função?

Formulário.

Proposição 1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f \in C^\infty(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$. Logo para todo $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $\{x_0 + th : t \in [0,1]\} \subset \Omega$ e para todo $N \in \mathbb{N}_0$, temos*

$$f(x_0 + h) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) + \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} h^\alpha \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} \partial^\alpha f(x_0 + \theta h)\, d\theta.$$

Teorema 1. *(Partição da unidade) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $K \subset \Omega$ um compacto. Seja $\mathcal{U} := \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma cobertura de abertos de K contidas em Ω. Logo existem funções $\psi_1,...,\psi_l \in C_c^\infty(\Omega)$ tais que*

1) Para cada $j \in \{1,...,l\}$, existe um aberto A_{α_j} tal que $supp\phi_j \subset A_{\alpha_j}$.

2) As funções ψ_j só assumem valores reais não negativos e $\sum_{j=1}^{l} \psi_j(x) \leq 1$, para todo $x \in \Omega$.

3) Existe um conjunto aberto que contém K tal que $\sum_{j=1}^{l} \psi_j(x) = 1$ para todo x que pertence a este aberto.

Em particular, se tomando $\mathcal{U} := \{\Omega\}$, concluímos que para todo compacto K contido em Ω existe uma função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e um aberto $U \supset K$ tal que $\phi(x) = 1$ para todo $x \in U$.

Definição 1. (Distribuições) Dizemos que um funcional linear $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é uma distribuição se qualquer uma das seguintes condições equivalentes é válida:

i) Para toda sequência $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ que converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ (ou seja, existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $\operatorname{supp}(\phi_j) \subset K$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e as $\partial^\alpha \phi_j$ convergem uniformemente para zero, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$), temos que $\lim_{j\to\infty} u(\phi_j) = 0$.

ii) Dado $K \subset \Omega$ um compacto, existe $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$|u(\phi)| \leq C \|\phi\|_{C^m(\Omega)}, \ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \ \text{ tal que } \operatorname{supp}(\phi) \subset K.$$

O menor de todos os $m \in \mathbb{N}_0$ tais que uma desigualdade acima seja válida para todos os compactos é chamado de ordem da distribuição u.

Lembremos que $\|\phi\|_{C^m(\Omega)} := \max_{|\alpha|\leq m} (\sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha \phi|)$.

Definição 2. (Suporte de Distribuições) Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $f \in C(\Omega)$. Definimos

i) O suporte de u, $\operatorname{supp}(u)$, é definido da seguinte forma: $x \in \operatorname{supp}(u)$ se não existe aberto $U \subset \Omega$ contendo x tal que $u|_U = 0$.

i) O suporte de f, $\operatorname{supp}(f)$, é definido da seguinte forma: $x \in \operatorname{supp}(f)$ se não existe aberto $U \subset \Omega$ contendo x tal que $f|_U = 0$.

ii) O suporte singular de u, $\operatorname{sing\,supp}(u)$, é definido da seguinte forma: $x \in \operatorname{sing\,supp}(u)$ se não existe aberto $U \subset \Omega$ contendo x tal que $u|_U$ é dado por uma função C^∞.

Definição 3. (Distribuições compactas) Denotamos por $\mathcal{E}'(\Omega)$ o conjunto de todas as distribuições com suporte compacto. Estas distribuições podem ser estendidas a um funcional linear $u : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes condições equivalentes:

i) Para toda sequência $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$ que converge a zero em $C^\infty(\Omega)$ (ou seja, para todo compacto $K \subset \Omega$ as funções $\partial^\alpha \phi_j$ convergem uniformemente para zero em K, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$), temos que $\lim_{j\to\infty} u(\phi_j) = 0$.

ii) Existe um compacto $K \subset \Omega$, uma constante $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$|u(\phi)| \leq C \|\phi\|_{m,K}, \ \forall \phi \in C^\infty(\Omega).$$

Lembremos que $\|\phi\|_{m,K} := \max_{|\alpha|\leq m} (\sup_{x\in K} |\partial^\alpha \phi|)$.

Definição 4. (Operações com distribuições) Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Definimos:

a) $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é a distribuição definida como $\partial^\alpha u(\phi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \phi)$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

b) $\psi u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é a distribuição definida como $(\psi u)(\phi) = u(\psi\phi)$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Definição 5. (Limite de distribuições) Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ uma sequência de distribuições e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, se para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, tivermos

$$\lim_{j\to\infty} u_j(\phi) = u(\phi).$$

Proposição 2. *Consideremos $P(x, D) = \sum_{j=0}^{k} a_j(x) D^j$ um operador diferencial linear sobre um intervalo I de $\mathbb{R}^n$ tal que $a_j \in C^\infty(I)$, para todo j, $a_m(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Logo para toda $f \in \mathcal{D}'(I)$, existe $u \in \mathcal{D}'(I)$ tal que $P(x, D)u = f$. Se $\tilde{u} \in \mathcal{D}'(I)$ for outra solução desta equação, então $u = \tilde{u}$ é uma unção $C^\infty(I)$ que satisfaz a equação $P(x, D)u = 0$.*