

**LISTA DE EXERCÍCIOS 6 - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER
(MAP 5722-4)**

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/DISTRIBUICOES

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do Duistermaat e Kolk (denotado por D.K.) e do Rudin, Functional Analysis, (denotado por Rudin).

Exercício 1. (Rudin cap.7 ex. 14) Seja $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função inteira tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}_0$ e uma constante $c(\epsilon) > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq c(\epsilon) (1 + |z|)^{N(\epsilon)} e^{\epsilon \|\operatorname{Im}(z)\|}, \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Prove que f é um polinômio.

(Dica: Use o teorema de Paley-Wiener e mostre que $f = \mathcal{F}(u)$. Qual deve ser o suporte de u ?)

Exercício 2. (Rudin cap.7 ex. 15) Seja $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, $N \in \mathbb{N}_0$ e $r \geq 0$. Suponha que

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq (1 + |z|)^N e^{r \|\operatorname{Im}(z)\|}, \forall z \in \mathbb{C}^n \\ |f(x)| &\leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

Prove que

$$|f(z)| \leq e^{r \|\operatorname{Im}(z)\|}, \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Dica: Fixe $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ e $s > 0$. Defina a função holomorfa $g_s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por $g_s(\lambda) = (1 - is\lambda)^{-N-1} e^{ir\|y\|\lambda} f(x + \lambda y)$. Usando o princípio do máximo módulo, sabemos que no conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq R \text{ e } \operatorname{Im}(\lambda) \geq 0\}$, o máximo de g_s ocorre na fronteira deste conjunto. Logo, tomando R grande, concluímos que $|g_s(i)| < 1$. Tomando $s \rightarrow 0^+$, conclua o resultado.

Exercício 3. (Rudin cap.7 ex. 16) Seja $\delta_{S^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ a distribuição delta sobre a superfície S^2 , ou seja, para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, temos:

$$\delta_{S^2}(\phi) = \int_{S^2} \phi(x) d\sigma(x),$$

em que \int_{S^2} é igual a integral de ϕ sobre $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

a) Mostre que

$$\mathcal{F}(\delta_{S^2})(\xi) = C \frac{\operatorname{sen}(\|\xi\|)}{\|\xi\|},$$

em que $C > 0$ é uma constante positiva.

b) Seja $u = D_{x_1} \delta_{S^2}$. Logo

$$|\mathcal{F}(u)(\xi)| = |\xi_1 \mathcal{F}(\delta_{S^2})(\xi)| \leq C, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Conclua do exercício 2 acima que existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$|\mathcal{F}(u)(z)| \leq \tilde{C} e^{\|\operatorname{Im}(z)\|}, \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Note, no entanto, que u não é uma distribuição de ordem 0 (e sim de ordem 1).

Este exercício mostra que no Teorema de Paley-Wiener, não podemos assegurar que a ordem da distribuição será $\leq k$ se sua transformada de Fourier f satisfizer

$$|f(z)| \leq C (1 + |z|)^k e^{r \|\operatorname{Im}(z)\|}.$$

Exercício 4. (D.K. ex. 14.47) Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, com $u \neq 0$, uma solução do problema $\Delta u = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) Prove que $\lambda \leq 0$. (Dica: Tome a transformada de Fourier da equação)

b) Prove que se $\lambda = 0$, então u é um polinômio.

c) Prove que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e u tem uma extensão holomorfa em \mathbb{C}^n .

Exercício 5. (D.K. ex. 18.2) Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, com $u \neq 0$, uma solução do problema $\Delta u = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{C}$, tal qual no exercício 4. Mostre que u tem uma extensão holomorfa em \mathbb{C}^n e que existem constantes $c > 0$ e $k \in \mathbb{N}_0$ tais que

$$|u(z)| \leq c (1 + |z|)^k e^{\sqrt{-\lambda} \|\operatorname{Im}(z)\|}, \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Exercício 6. (D.K. ex. 15.1 e 15.5 (Parcialmente))

a) Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\mathcal{K} : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ dado por $\mathcal{K}(\phi) = \phi u$. Mostre que o núcleo de \mathcal{K} é a distribuição $k \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$ dada por

$$k(\chi) = u(\chi(x, x)), \forall \chi \in C_c^\infty(\Omega \times \Omega).$$

b) Seja $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier. Mostre que $\mathcal{F} : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é contínua e seu núcleo $k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ é dado por

$$k(x, y) = e^{-ix \cdot y}.$$

Exercício 7. (D.K. ex. 17.2) (Solução Fundamental da Equação do Calor) Seja $a \in \mathbb{R}$.

a) Prove que uma solução fundamental do operador diferencial $\partial + aI$ é dada por $e^{-ax}H(x)$, em que H é a função de Heaviside.

b) Considere o operador diferencial da equação do calor $P(D) = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$. Uma forma de achar a solução fundamental é aplicando a transformada de Fourier nas coordenadas espaciais. Assim, se

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \delta_0,$$

mostre que aplicando a Transformada de Fourier apenas na variável x , e denotando esta transformada por \hat{u} , obtemos

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = \delta(t).$$

Ache uma solução de $\hat{u}(t, \xi)$ usando item a) e, aplicando a transformada de Fourier inversa em ξ , mostre que (uma das) soluções fundamentais é

$$u(t, x) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}.$$

(Para detalhes sobre transformada parcial de Fourier, consulte o livro de J. Hounie)

Exercício 8. (D.K. ex. 14.59) (Solução Fundamental do Operador de Cauchy-Riemann)

a) Considere a equação de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x, y) - \frac{1}{i} \frac{\partial E}{\partial y}(x, y) = 2\delta(x)\delta(y).$$

Aplicando a transformada de Fourier na variável y , obtenha a seguinte equação:

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial x}(x, \eta) - \eta \frac{\partial \hat{E}}{\partial y}(x, \eta) = 2\delta(x).$$

b) Mostre que, para toda função $c(\eta)$, a seguinte expressão é solução da equação acima:

$$\hat{E}(x, \eta) = 2(c(\eta) + H(x))e^{x\eta}.$$

c) Escolhendo $c(\eta) = -H(\eta)$, obtenha que

$$\hat{E}(x, \eta) = -\text{sign}(\eta) H(-x\text{sign}(\eta)) e^{x\eta}$$

é uma distribuição temperada que resolve a equação.

d) Usando a expressão obtida em c), podemos calcular a transformada de Fourier parcial inversa. Obtenha que

$$E(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{\pi z}.$$

é uma solução fundamental do operador de Cauchy-Riemann.

Exercício 9. (Inspirado no livro do Folland: Fourier Analysis and Applications, capítulo 7) Podemos usar a transformada parcial de Fourier para resolver as equações de Poisson, Onda e Calor no semiplano. O objetivo a seguir é fazer as contas formalmente, ou seja, não justificaremos quais espaços de funções e distribuições estamos trabalhando (embora isto seja possível)

a) Seja $u :]0, \infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma solução de

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) &= 0, \quad (t, x) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

Aplicando a transformada de Fourier em x (e denotando-a por \hat{u} e \hat{f}), obtenha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) &= 0, \quad (t, \xi) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(0, \xi) &= \hat{f}(\xi), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

Resolvendo a equação em t , conclua que

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) e^{-t|\xi|^2}.$$

Calculando a transformada de Fourier inversa em x (e usando que \mathcal{F}^{-1} leva produto em convolução), conclua que

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} f(y) dy.$$

b) Seja $u :]0, \infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma solução de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \Delta u(t, x) &= 0, \quad (t, x) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

Aplicando a transformada de Fourier em x (e denotando-a por \hat{u} e \hat{f}), obtenha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(t, \xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) &= 0, \quad (t, \xi) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(0, \xi) &= \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, \xi) &= \hat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

Resolvendo a equação em t , conclua que

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) \cos(t \|\xi\|) + \hat{g}(\xi) \frac{\text{sen}(t \|\xi\|)}{\|\xi\|}.$$

Observação: Em uma dimensão, podemos calcular a transformada inversa da expressão acima e obter a fórmula de D'Alambert. (Ver Folland)

c) Seja $u : \mathbb{R} \times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ uma solução de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[\\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}.$$

Aplicando a transformada de Fourier em x (e denotando-a por \hat{u} e \hat{f}), obtenha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\xi, y) - |\xi|^2 \hat{u}(\xi, y) &= 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[\\ \hat{u}(\xi, 0) &= \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \end{aligned}.$$

Resolvendo a equação em y , conclua que

$$\hat{u}(\xi, y) = A(\xi) e^{-y|\xi|} + B(\xi) e^{y|\xi|}.$$

Como $e^{x|\xi|}$ cresce muito rapidamente, esta função não define uma distribuição temperada. Logo, eliminamos este termos e obtemos

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-y|\xi|}.$$

Calculando a transformada de Fourier inversa em ξ (e usando que \mathcal{F}^{-1} leva produto em convolução), conclua que

$$u(x, y) = \int \frac{yf(x-t)}{\pi(t^2 + y^2)} dt.$$