LISTA DE EXERCÍCIOS 5 - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER (MAP 5722-4)

PROF: PEDRO T. P. LOPES   WWW.IME.USP.BR/∼PPLOPES/DISTRIBUICOES

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do Duistermaat e Kolk (denotado por D.K.), do G. Folland, Fourier Analysis and Applications, (denotado por Folland).

Exercício 1. (D.K. ex. 14.4) Usando integração por partes, mostre que

$$\left(D_j\phi,\psi\right)_{L^2(\mathbb{R})}=\left(\phi,D_j\psi\right)_{L^2(\mathbb{R})},\ \ \forall\phi,\psi\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}\right).$$

Acima usamos a notação $(\phi,\psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)}:=\int_{\mathbb{R}^n}\phi\left(x\right)\overline{\psi\left(x\right)}dx$ e $D_j:=\frac{1}{i}\partial_{x_j}$.

Exercício 2. (Folland cap.9.4 ex.1) Seja $u\in\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ uma distribuição temperada homogênea de grau a, ou seja, $u\left(\phi\left(\lambda x\right)\right)=\frac{1}{\lambda^{n+a}}u\left(\phi\left(x\right)\right)$. Mostre que $\mathcal{F}\left(u\right)$ é uma distribuição homogênea de grau $-n-a$.

Exercício 3. (Folland cap.9.4 ex.3) Suponha que $g\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ seja uma função tal que para todo $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$, exista $N_\alpha\in\mathbb{N}_0$ tal que $\left|\partial_x^\alpha g\left(x\right)\right|\leq C_\alpha\left(1+|x|\right)^{N_\alpha}$.

a) Mostre que $g\phi\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$, se $\phi\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$. Mostre também que se $\left(\phi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ e $\phi\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ é tal que $\lim_{n\to\infty}\phi_n=\phi$ em $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$, então $\lim_{n\to\infty}g\phi_n=g\phi$ em $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

b) Seja $u\in\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$. Mostre que gu definido como $\left(gu\right)\left(\phi\right)=u\left(g\phi\right)$ para todo $\phi\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ também é uma distribuição temperada.

Exercício 4. (Folland cap.9.4 ex.4) Suponha que $u\in\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ é uma distribuição temperada e $\phi\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$. Vamos definir $u*\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ por $u*\phi\left(x\right)=u\left(y\mapsto\phi\left(x-y\right)\right)$. Pode-se mostrar que (não é o objetivo do exercício. Apenas assuma este fato)

1) $u*\phi$ é uma função C^∞

2) $\partial^\alpha\left(u*\phi\right)=\left(\partial^\alpha u\right)*\phi=u*\left(\partial^\alpha\phi\right)$.

Nosso objetivo é mostrar que existe $N\in\mathbb{N}_0$ tal que para todo $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$, temos $\left|\partial^\alpha\left(u*\phi\right)\left(x\right)\right|\leq C_\alpha\left(1+|x|\right)^N$, em que $C_\alpha>0$ é uma constante que depende de α. Para tanto, siga os seguintes passos:

a) Mostre que para todo $x,y\in\mathbb{N}_0$, existe $K\geq0$ tal que $|y|^K\leq\left(1+|x-y|\right)^K\left(1+|x|\right)^K$.

b) Usando o item a), mostre que $\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left|y^\beta\partial^\alpha\phi\left(x-y\right)\right|\leq C_K\left(1+|x|\right)^{|\beta|}$.

c) Conclua, usando a continuidade de u e o resultado do item b, que $\left|\left(u*\phi\right)\left(x\right)\right|\leq C\left(1+|x|\right)^N$.

d) Repita o argumento acima com $\partial^\alpha\phi$ no lugar de ϕ para concluir que $\left|\partial^\alpha\left(u*\phi\right)\left(x\right)\right|\leq C_\alpha\left(1+|x|\right)^N$.

Exercício 5. (Folland cap. 7.2 ex. 2) Seja $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ dada por $\phi\left(x\right)=e^{-a|x|}$. Mostre que $\mathcal{F}\left(\phi\right)\left(\xi\right)=\frac{2a}{\xi^2+a^2}$. Usando a fórmula da inversão e este resultado, mostre que $\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}$.

Exercício 6. (Folland cap. 7.2 ex. 12) Para $a>0$, definamos $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ e $g_a:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ por $f_a\left(x\right)=\frac{a}{\pi\left(x^2+a^2\right)}$ e $g_a\left(x\right)=\frac{\mathrm{sen}(ax)}{\pi x}$. Use a transformada de Fourier para mostrar que

a) $f_a*f_b=f_{a+b}$.

b) $g_a*g_b=g_{min(a,b)}$.

Dica: Calcule a transformada de Fourier da função característica do conjunto $[-a,a]$ para fazer o item b).

Exercício 7. (Folland cap. 7.2 ex. 13) Use o Teorema de Plancherel (Fórmula de Parseval) para mostrar que:

a) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(at)\mathrm{sen}(bt)}{t^2}dt=\pi\mathrm{min}(a,b)$.

b) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}dt=\frac{\pi}{a+b}$.

Exercício 8. (D.K. ex. 14.23) Prove que toda distribuição temperada é de ordem finita.

Exercício 9. (D.K. ex. 14.5) Sejam ϕ_1, ..., ϕ_n funções integráveis definidas em $\mathbb{R}$. Mostre que

$$\mathcal{F}\left(\phi_1\left(x_1\right)...\phi_n\left(x_n\right)\right)\left(\xi_1,...,\xi_n\right)=\mathcal{F}\left(\phi_1\right)\left(\xi_1\right)...\mathcal{F}\left(\phi_n\right)\left(\xi_n\right).$$

Exercício 10. (D.K. ex. 14.6) Suponha que u e $v:=\mathcal{F}(u)$ sejam funções integráveis em $\mathbb{R}^n$. Prove que u é uma função contínua igual a $\left(2\pi\right)^{-1}S\circ\mathcal{F}\left(v\right)$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 11. (D.K. ex. 14.8) Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Prove uma das seguintes afirmações e obtenha a seguinte através da transformada de Fourier.

i) Se $\phi(0) = 0$, então existem $\phi_1,..., \phi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tais que $\phi(x) = \sum_{j=1}^n x_j \phi_j(x)$.

ii) Se $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = 0$, então existem $\phi_1,..., \phi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tais que $\phi(x) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \phi_j(x)$.

Exercício 12. (D.K. ex. 14.13) Prove que para todo $t > 0$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\int_{-t}^{t} \mathcal{F}\phi(\xi) d\xi = 2 \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \frac{\text{sen }(tx)}{x} dx$$

e deduza que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\text{sen}\,(tx)}{x} = \pi\delta \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Exercício 13. (D.K. ex. 14.14) Considere as seguintes funções em $\mathbb{R}^n$: $a(x) = e^{-x^2+2x}$, $b(x) = e^{-x}H(x)$, $c(x) = e^{-|x|}$, $d(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

a) Para cada uma dessas funções, esboce o gráfico.

b) Verifique quais dessas funções pertencem a $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

c) Calcule a transformada de Fourier destas funções. Deduza a integral de Laplace:

$$\int_0^\infty \frac{cos(x\xi)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\xi|}.$$

d) Esboce a transformada de Fourier destas funções.

e) Verifique quais das transformadas de Fourier das funções acima pertencem a $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercício 14. (D.K. ex. 14.15) Defina $f(x) = e^{-|x|}$ em $\mathbb{R}$. Diferencie f duas vezes e prove que $\frac{1}{2}f$ é uma solução fundamental de $I + D^2$ em $\mathbb{R}$. Calcule $\mathcal{F}(f)$. Derive a fórmula $\mathcal{F}(\text{arctg}(x)) = \frac{\pi}{i} PV\left(\frac{e^{-|\xi|}}{\xi}\right)$ partindo dos resultados anteriores.

Exercício 15. (D.K. ex. 14.22) Seja u uma função localmente integrável em $\mathbb{R}^n$ para a qual existe $N \in \mathbb{N}_0$ e $C > 0$ com $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^N$. Prove que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 16. (D.K. ex. 14.23) Suponha que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mostre que existem constantes $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}_0$ tais que

$$|u(\phi(x-a))| \leq C(1 + |a|)^N, \forall a \in \mathbb{R}^n.$$

(Dica: Isto é apenas uma reformulação do exercício 4...)

Exercício 17. (D.K. ex. 14.27) .Determine as transformadas de Fourier das seguintes funções:

a) $cos(x)$, $sen(x)$, $xsen(x)$, $cos^2(x)$, $cos^k(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

b) $\frac{sen(x)}{x}$.

Observação: Apenas em $b)$ temos uma função no final.

Exercício 18. (D.K. ex. 14.45) . Considere $u_a(x) = e^{-a\frac{x^2}{2}}$, $a \in \mathbb{C}$ e $Re(a) \geq 0$. Seja $t \in \mathbb{R}$. Prove que $u_{it} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e que

$$\lim_{a\to it,\, Re(a)>0} u_a = u_{it} \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Calcule $\mathcal{F}(u_{it})$.

Exercício 19. (D.K. ex. 14.49) . (Transformada de Hilbert) A Transformada de Hilbert $\mathcal{H}\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é definida da seguinte maneira:

$$\mathcal{H}\phi = \frac{1}{\pi}\left(\phi * PV\left(\frac{1}{y}\right)\right)(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|y|>\epsilon} \frac{\phi(x-y)}{y} dy.$$

a) Mostre que $\mathcal{H}\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e que $\mathcal{F} \circ \mathcal{H} = -i\text{sign}(\xi)\mathcal{F}$.

b) Prove que $\|\mathcal{H}\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ e que $\mathcal{H}^2 = -I$.

c) Prove que $\mathcal{H}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{x}{1+x^2}$.