RESOLUÇÃO DA LISTA DE EXERCÍCIOS 4 CÁLCULO V

Para o estudo da terceira prova, recomendamos resolver os exercícios dos capítulos 5 (Aplicações Diferenciais), 6 (Aplicações Inversas e Implícitas) e partes do 7 (Superfícies diferenciáveis, somente as seções iniciais. Sobre este capítulo será cobrado (caso seja cobrado) apenas conceitos básicos) do livro Análise Real Volume 2 do Elon.

Abaixo segue uma lista de exercícios extras (alguns muito parecidos com os do Elon), selecionados ou adaptados da apostila "Cálculo Diferencial Geométrico no $\mathbb{R}^n$". Indicamos por ELJ X, o exercício X da apostila das professoras Élvia Sallum, Lucia Murakami e Juaci da Silva. Sempre denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais $n \times n$.

Exercício 1. (ELJ 38) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ diferenciável. Vamos definir $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ por

$$F(x, y) = f(3x - y).$$

a) Mostre que F é uma função diferenciável (Lembre-se que composta de funções diferenciáveis é diferenciável).
Resolução:
Basta observar que F é a composição das seguintes funções:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \overset{T}{\mapsto} 3x - y \in \mathbb{R}^n \overset{f}{\mapsto} f(3x - y).$$

Como $T(x, y) = 3x - y$ é linear, concluímos que T é C^∞. Como f é diferenciável e $F = f \circ T$, concluímos que F também é diferenciável, pela regra da cadeia.

b) Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e $v = (h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Calcule $\frac{\partial F}{\partial v}(x_0, y_0)$ em termos de f usando a definição de derivada direcional.
Resolução:
Usando a definição, temos:

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + th, y_0 + tk) - F(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(3x_0 - y_0 + t(3h - k)) - f(3x_0 - y_0)}{t} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial(3h - k)}(3x_0 - y_0) = df(3x_0 - y_0)(3h - k).$$

c) Ache uma expressão para $dF(x_0, y_0)$ em termos de f.
Resolução:
Basta aplicar a regra da cadeia.

$$dF(x_0, y_0)(h, k) = df(T(x_0, y_0)) \circ dT(x_0, y_0)(h, k) = df(3x_0 - y_0) \circ T(h, k) =$$

$$df(3x_0 - y_0)(3h - k) = 3df(3x_0 - y_0)(h) - df(3x_0 - y_0)(k).$$

Exercício 2. (ELJ 39) Estude a diferenciabilidade da função F e ache $dF(p)$ e sua matriz nos seguintes casos:

a) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ é dado por $F(x) = (x, f(x))$, em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável.
Resolução:
Como a função $id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $id(x) = x$ é C^∞ e f é diferenciável, então F é diferenciável. (É o caso de funções da forma $g = (g_1, g_2)$). Por fim,

$$dF(x)(v) = (d(id)(x)(v), df(x)(v)) = (id(v), df(x)(v)) = (v, df(x)(v)).$$

b) $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ é dado por $F(x, y) = (x, f(y))$, em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável.
Resolução:
Como a função $id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $id(x) = x$ é C^∞ e f é diferenciável, então F é diferenciável. (É o caso de funções da forma $g = g_1 \times g_2$). Por fim,

$$dF(x, y)(h, k) = (d(id)(x)(h), df(y)(k)) = (id(h), df(y)(k)) = (h, df(y)(k)).$$

c) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dado por $F(x) = \langle x, x_0 \rangle$, em que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é fixo.
Resolução:
A função F é linear. Logo é de classe C^∞. Assim,

$$dF(x)(v) = F(v) = \langle v, x_0 \rangle.$$

d) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dado por $F(x) = \langle x, Ax\rangle$, em que $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear.
Resolução:
A função F é composta das seguintes funções:

$$x \overset{T}{\mapsto} (x,x) \overset{B}{\mapsto} \langle x, Ax\rangle\,,$$

em que $T(x) = (x,x)$ e $B(x,y) = \langle x, Ay\rangle$. Como T é linear e B é bilinear, concluímos que ambos são de classe C^∞ e, portanto, F também é de classe C^∞. Por fim,

$$df(x)(v) = dB(T(x))dT(x)(v) = dB(x,x)T(v) =$$

$$dB(x,x)(v,v) = B(x,v) + B(v,x) = \langle x, Av\rangle + \langle v, Ax\rangle\,.$$

e) $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é dado por $F(x,y) = f(x) + g(y)$, em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ são diferenciáveis.
Resolução:
A função F é composta das seguintes funções:

$$x \overset{T}{\mapsto} (f\,(x)\,, g\,(y)) \overset{S}{\mapsto} f(x) + g(y),$$

em que $T(x,y) = (f \times g)\,(x,y) = (f(x), g(y))$ e $S(u,v) = u + v$. Como f e g são diferenciáveis, então T também é. Como S é linear, então S é de classe C^∞. Por fim, F é diferenciável por ser composta de S e T. Além disso,

$$dF(x,y)(h,k) = dS(T(x))dT(x)(h,k) = S \circ (df(x)(h), dg(y)(k)) = df(x)(h) + dg(y)(k).$$

Exercício 3. (ELJ 40) Seja $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n\,(\mathbb{R})$ dada por $f(X) = X^2 + X^3$. Mostre que f é diferenciável. Calcule $df(X_0)(H)$, em que X_0 e $H \in M_n\,(\mathbb{R})$.

Resolução:
Consideremos $f_1(X) = X^2$. Logo f_1 é igual a composta das funções abaixo:

$$X \overset{T}{\mapsto} (X,X) \overset{B}{\mapsto} X^2,$$

em que $T(X) = (X,X)$ e $B(X,Y) = XY$. Assim,

$$df_1(X_0)(H) = dB(T(X_0))dT(X_0)\,(H) = dB(T(X_0)) \circ T\,(H) =$$

$$dB(X_0,X_0)\,(H,H) = B(X_0,H) + B(H,X_0) = X_0H + HX_0.$$

Da mesma forma, seja $f_2(X) = X^3$. Logo f_2 é igual a composta das funções abaixo:

$$X \overset{T}{\mapsto} (X,X,X) \overset{B}{\mapsto} X^3,$$

em que $T(X) = (X,X,X)$ e $B(X,Y,Z) = XYZ$. Assim,

$$df_2(X_0)(H) = dB(T(X_0))dT(X_0)\,(H) = dB(T(X_0)) \circ T\,(H) =$$

$$dB(X_0,X_0,X_0)\,(H,H,H) = B(H,X_0,X_0) + B(X_0,H,X_0) + B(X_0,X_0,H) = HX_0^2 + X_0HX_0 + X_0^2H.$$

Por fim, como $f = f_1 + f_2$, concluímos que

$$df(X_0)\,(H) = X_0H + HX_0 + HX_0^2 + X_0HX_0 + X_0^2H.$$

Exercício 4. (ELJ 41) Dado $A \in M_3(\mathbb{R})$, vamos escrever $A = (A_1, A_2, A_3)$ para dizer que A é a matriz cujas linhas são A_1, A_2 e A_3. Usando esta notação, mostre que $\det : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Calcule $d\,(\det)\,(A)\,(I)$, em que I é a matriz identidade.

Resolução:
Sabemos que a função determinante é multilinear. No caso, como estamos em $M_3(\mathbb{R})$, concluímos que det é trilinear. Logo se $I = (I_1, I_2, I_3)$, em que $I_1 = (1,0,0)$, $I_2 = (0,1,0)$ e $I_3 = (0,0,1)$, concluímos que

$$d\,(\det)\,(I)(A) = d\,(\det)\,(I_1,I_2,I_3)(A_1,A_2,A_3) = \det\,(A_1,I_2,I_3) + \det\,(I_1,A_2,I_3) + \det\,(I_1,I_2,A_3)\,.$$

Por fim, se $A_j = (A_{j1}, A_{j2}, A_{j3})$, concluímos que

$$d\,(\det)\,(I)(A) = \det\,(A_1,I_2,I_3) + \det\,(I_1,A_2,I_3) + \det\,(I_1,I_2,A_3) = A_{11} + A_{22} + A_{33} = tr(A),$$

em que tr indica o traço da matriz A, ou seja, a soma dos valores diagonais de A.

Exercício 5. (ELJ 45) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma função de classe C^1, em que Ω é um aberto. Mostre que o conjunto $\{x \in \Omega;\, df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ é injetora$\}$ é um aberto.

Resolução:

Seja $Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$ a matriz Jacobiana de f. Seja $x \in \mathbb{R}^m$ tal que $df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ é injetora. Concluímos que $\{df(x)(e_j), j = 1, ..., m\}$ são vetores $L.I.$, em que $\{e_1, ..., e_m\}$ é uma base de $\mathbb{R}^m$. Porém, como $df(x)(e_j)$ corresponde a coluna j da matriz $Jf(x)$, concluímos que $Jf(x)$ tem m colunas $L.I.$. Logo, como o posto coluna de uma matriz deve ser igual ao posto linha, existem m linhas $L.I.$ em $Jf(x)$. Sejam i_1, ..., i_m um conjunto de m linhas linearmente independentes em $Jf(x)$. Logo $\det\left(\frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_j}(x)\right)_{j,k=1,\ldots,m} \neq 0$. Como f é de classe C^1 e o determinante é de classe C^∞, concluímos que $x \mapsto \det\left(\frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_j}(x)\right)_{j,k=1,\ldots,m}$ é de classe C^1. Logo, existe um aberto U que contém x tal que se $z \in U$, então $\det\left(\frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_j}(z)\right)_{j,k=1,\ldots,m} \neq 0$.

Assim, se $z \in U$, então $Jf(z)$ tem m linhas linearmente independentes. Logo, novamente usando que o posto linha é igual ao posto coluna, concluímos que as m colunas de $Jf(z)$ são linearmente independentes. Concluímos, assim, que $df(z)$ é injetora para todo $z \in U$.

O argumento acima nos mostra que todo ponto de $\{x \in \Omega;\ df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ é injetora$\}$ pertence a um aberto contido neste mesmo conjunto, ou seja, $\{x \in \Omega;\ df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ é injetora$\}$ é um conjunto aberto.

Exercício 6. (ELJ 48) Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma função bilinear. Mostre que

a) $\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$.

Resolução:

Dado $\epsilon > 0$. Seja $M := \sup\left\{\|f(u,v)\|, (u,v) \in S^{n-1} \times S^{n-1}\right\}$ e $\delta = \frac{\epsilon}{M}$. Logo, se $0 < \|(h,k)\| = \sqrt{\|h\|^2 + \|k\|^2} < \delta$, então

$$\left\|\frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|}\right\| = \begin{cases} 0, \text{ se } h = 0 \text{ ou } k = 0 \\ \left\|f\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{k}{\|k\|}\right)\right\| \frac{\|h\|\|k\|}{\|(h,k)\|} = \left\|f\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{k}{\|k\|}\right)\right\| \frac{\|k\|}{\|(h,k)\|} \|h\| \leq M\|h\| < \epsilon, \quad h \neq 0 \text{ e } k \neq 0 \end{cases}.$$

De qualquer maneira, $\left\|\frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|}\right\| < \epsilon$. Portanto $\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$.

b) f é diferenciável em (x_0, y_0). Calcule $df(x_0, y_0)(h, k)$.

Resolução:

Observamos que $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f(h, y_0) + f(x_0, k) + f(h, k)$. Como $(h, k) \mapsto f(h, y_0) + f(x_0, k)$ é linear e $\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$, concluímos que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(h, k) + r_{(x_0,y_0)}(h, k),$$

em que $df(x_0, y_0)(h, k) = f(h, y_0) + f(x_0, k)$ e $r_{(x_0,y_0)}(h, k) := f(h, k)$ satisfaz $\lim_{(h,k)\to 0} \frac{r_{(x_0,y_0)}(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$.

Exercício 7. (ELJ 49) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável que satisfaz $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$, em que $M > 0$ é um valor constante. Mostre que $\left\|\frac{\partial f}{\partial \nu}(p)\right\| \leq M\|v\|$, para todo $p, v \in \mathbb{R}^m$.

Resolução:

Seja $v \in \mathbb{R}^m$. Logo

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial v}(p)\right\| = \left\|\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(p + tv) - f(p)}{t}\right)\right\| = \lim_{t\to 0}\frac{\|f(p + tv) - f(p)\|}{|t|} \leq \limsup_{t\to 0}\frac{M\|tv\|}{|t|} \leq M\|v\|.$$

Exercício 8. (ELJ 51) Use a regra da cadeia para resolver os itens abaixo:

a) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, então $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $\omega(t) = F(f(t), g(t), t)$ é derivável. Calcule $\frac{d\omega}{dt}(t)$.

Resolução:

Basta usar a regra da cadeia, observando que ω é a composta das funções abaixo

$$t \overset{T}{\mapsto} (f(t), g(t), t) \overset{F}{\mapsto} F(f(t), g(t), t).$$

Logo

$$\frac{d\omega}{dt}(t) = d\omega(t)(1) = dF(T(t))\, dT(t)(1) = dF(T(t))\frac{dT}{dt}(t) =$$
$$dF(f(t), g(t), t)\left(\frac{df}{dt}(t), \frac{dg}{dt}(t), 1\right) = \frac{\partial F}{\partial x}(f(t), g(t), t)\frac{df}{dt}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(f(t), g(t), t)\frac{dg}{dt}(t) + \frac{\partial F}{\partial z}(f(t), g(t), t).$$

Concluímos que $\frac{d\omega}{dt}(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(f(t), g(t), t)\frac{df}{dt}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(f(t), g(t), t)\frac{dg}{dt}(t) + \frac{\partial F}{\partial z}(f(t), g(t), t)$.

b) Mostre que se $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis, então $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por $\omega(x,y,z) = F(x, u(x,y), v(y,z))$ é diferenciável. Calcule $d\omega(x,y,z)$.

Resolução:

Basta usar a regra da cadeia, observando que ω é a composta das funções abaixo

$$(x,y,z) \overset{T}{\mapsto} (x, u(x,y), v(y,z)) \overset{F}{\mapsto} F\left(x, u(x,y), v(y,z)\right).$$

Logo, se $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$, concluímos que

$$d\omega(x,y,z)\,(h_1,h_2,h_3) = dF\left(x,u(x,y),v(y,z)\right) dT\left(x,y,z\right)(h_1,h_2,h_3) =$$

$$dF\left(x,u(x,y),v(y,z)\right)\left(h_1, \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,h_2, \frac{\partial v}{\partial y}(y,z)\,h_2 + \frac{\partial v}{\partial z}(y,z)\,h_3\right) =$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,u(x,y),v(y,z))\,h_1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x,u(x,y),v(y,z))\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,h_1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x,u(x,y),v(y,z))\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,h_2 +$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,u(x,y),v(y,z))\,\frac{\partial v}{\partial y}(y,z)\,h_2 + \frac{\partial F}{\partial z}(x,u(x,y),v(y,z))\,\frac{\partial v}{\partial z}(y,z)\,h_3.$$

Em termos matriciais, temos

$$d\omega(x,y,z)\,(h_1,h_2,h_3) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,u(x,y),v(y,z)) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,u(x,y),v(y,z)) & \frac{\partial F}{\partial z}(x,u(x,y),v(y,z)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y}(y,z) & \frac{\partial v}{\partial z}(y,z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$$

Concluímos que

$$d\omega(x,y,z)\,(h_1,h_2,h_3) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,u(x,y),v(y,z))\,h_1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x,u(x,y),v(y,z))\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,h_1 +$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,u(x,y),v(y,z))\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,h_2 + \frac{\partial F}{\partial z}(x,u(x,y),v(y,z))\,\frac{\partial v}{\partial y}(y,z)\,h_2 + \frac{\partial F}{\partial z}(x,u(x,y),v(y,z))\,\frac{\partial v}{\partial z}(y,z)\,h_3.$$

c) Mostre que se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis, então $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por $F(x,y,z) = f(g(x+y), h(y+z))$ é diferenciável. Calcule $dF(x,y,z)$.

Resolução:

Basta usar a regra da cadeia, observando que ω é a composta das funções abaixo

$$(x,y,z) \overset{S}{\mapsto} (x+y, y+z) \overset{T}{\mapsto} (g(x+y), h(y+z)) \overset{f}{\mapsto} f(g(x+y), h(y+z)).$$

Logo, se $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$, concluímos que

$$dF(x,y,z)\,(h_1,h_2,h_3) = df(T(S(x,y,z)))dT(S(x,y,z))dS(x,y,z)\,(h_1,h_2,h_3) =$$

$$dF(x,y,z)\,(h_1,h_2,h_3) = df\left(g(x+y),h(y+z)\right) dT(x+y,y+z)S\,(h_1,h_2,h_3) =$$

$$dF(x,y,z)\,(h_1,h_2,h_3) = df\left(g(x+y),h(y+z)\right) dT(x+y,y+z)\,(h_1+h_2,h_2+h_3) =$$

$$dF(x,y,z)\,(h_1,h_2,h_3) = df\left(g(x+y),h(y+z)\right)\left(\frac{dg}{dt}(x+y)\,(h_1+h_2)\,, \frac{dh}{dt}(y+z)\,(h_2+h_3)\right) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(g(x+y),h(y+z)\right)\frac{dg}{dt}(x+y)\,(h_1+h_2) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(g(x+y),h(y+z)\right)\frac{dh}{dt}(y+z)\,(h_2+h_3)\,.$$

Em termos matriciais, temos

$$dF(x,y,z)\,(h_1,h_2,h_3) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(g(x+y),h(y+z)) & \frac{\partial f}{\partial y}(g(x+y),h(y+z)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dg}{dt}(x+y) & 0 \\ 0 & \frac{dh}{dt}(y+z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$$

Concluímos que

$$dF(x,y,z)\,(h_1,h_2,h_3) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(g(x+y),h(y+z)\right)\frac{dg}{dt}(x+y)\,(h_1+h_2) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(g(x+y),h(y+z)\right)\frac{dh}{dt}(y+z)\,(h_2+h_3)\,.$$

Exercício 9. (ELJ 52) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciável. Mostre que:

a) A função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(x) = \langle f(x), f(x)\rangle$ é diferenciável. Calcule $dF(x_0)(h)$.

Resolução:

Vamos usar a regra da cadeia. A função F é composta das funções

$$x \overset{T}{\mapsto} (f(x), f(x)) \overset{B}{\mapsto} \langle f(x), f(x)\rangle .$$

Logo F é uma função diferenciável, já que T e B o são.

Por fim,

$$dF(x)(v) = dB(T(x))dT(x)(v) = dB(f(x), f(x))(df(x)(v), df(x)(v)) =$$

$$B(f(x), df(x)(v)) + B(df(x)(v), f(x)) = \langle df(x)(v), f(x)\rangle + \langle f(x), df(x)(v)\rangle = 2\langle f(x), df(x)(v)\rangle .$$

b) Se $\|f(x)\| = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então $\det(df(x)) = 0$. Interprete geometricamente.

Resolução:

Se $\|f(x)\| = 1$, então $\|f(x)\|^2 = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Assim, se $\varphi(x) = \|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle$, então φ é uma função constante e $d\varphi(x) = 0$. Logo

$$d(\varphi)(x)(v) = 2\langle df(x)(v), f(x)\rangle = 0.$$

Como $f(x) \neq 0$, já que $\|f(x)\| = 1$, concluímos que $df(x)(v)$ é sempre ortogonal e $f(x)$ para todo v. Logo $df(x)$ não é sobrejetora (se fosse sobrejetora, existiria v tal que $df(x)(v) = f(x)$). Como $df(x)$ é uma transformação linear no mesmo espaço vetorial, concluímos que $df(x)$ não é bijetora. Assim, $\det(df(x)) = 0$. (O determinante de $df(x)$ é, por definição, o determinante de $Jf(x)$).

Exercício 10. (ELJ 55) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função que satisfaz

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2 , \forall x, y \in \mathbb{R}^m.$$

Mostre que f é uma função constante.

Resolução:

Basta observar que f é diferenciável e que $df(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Isto é verdadeiro, pois se $h \in \mathbb{R}^m$ e $O : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é a transformação linear nula, ou seja, dada por $O(h) = 0$, então vemos que

$$f(x + h) = f(x) + O(h) + r_x(h),$$

em que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|r_x(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|f(x + h) - f(y) - O(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|f(x + h) - f(y)\|}{\|h\|} \leq$$

$$\limsup_{h\to 0} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \|h\| = 0.$$

Logo $\lim_{h\to 0} \frac{r_x(h)}{\|h\|} = 0$. Desta maneira, f é diferenciável e $df(x) = 0$. Como $\mathbb{R}^m$ é convexo e $df(x) = 0$ para todo x, concluímos que f é uma função constante.

Exercício 11. (ELJ 59) Se $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é dado por $F(x, y) = A(x)(y)$, em que $A : \mathbb{R}^m \to L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right)$ é diferenciável. Mostre que F é diferenciável e calcule $dF(x, y)(h, k)$.

Resolução:

Observamos que F é igual a composição das funções

$$(x, y) \overset{T}{\mapsto} (A(x), y) \overset{B}{\mapsto} A(x)(y),$$

em que $T(x, y) = (A(x), y)$ e $B(A, v) = A(v)$. Verificamos facilmente que B é bilinear. Assim,

$$dF(x, y)(h, k) = dB(T(x, y))dT(x, y)(h, k) =$$

$$dB(A(x), y)dT(x, y)(h, k) = dB(A(x), y)(dA(x)(h), k) =$$

$$(dA(x)(h))(y) + A(x)(k).$$

Exercício 12. (ELJ 64) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciável e a um ponto de acumulação de $f^{-1}(b)$, em que $b \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $df(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ não é injetora.

Resolução:
Seja $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Se T é injetora, então $\|T(x)\| > 0$, para todo $x \in S^{m-1}$. Como S^{m-1} é compacto, concluímos que existe $c > 0$ tal que $\|T(x)\| \geq c > 0$ para todo $x \in S^{m-1}$.

No entanto, se a é um ponto de acumulação de $f^{-1}(b)$, então existe uma sequência $(h_j)_j$ em $\mathbb{R}^m$ tal que $\lim_{j\to\infty} h_j = 0$, $h_j \neq 0$ e $f(a+h_j) = b$. Pela continuidade de f, concluímos que $f(a) = b$.

Por fim, como f é diferenciável, vemos que

$$f(a+h_j) = f(a) + df(a)(h_j) + r_a(h_j),$$

com $\lim_{j\to\infty} \frac{r_a(h_j)}{\|h_j\|} = 0$. Logo

$$df(a)\left(\frac{h_j}{\|h_j\|}\right) = \frac{f(a+h_j) - f(a)}{\|h_j\|} - \frac{r_a(h_j)}{\|h_j\|} = \frac{b-b}{\|h_j\|} - \frac{r_a(h_j)}{\|h_j\|} = \frac{r_a(h_j)}{\|h_j\|}.$$

Logo $\lim_{j\to\infty} df(a)\left(\frac{h_j}{\|h_j\|}\right) = \lim_{j\to\infty} \frac{r_a(h_j)}{\|h_j\|} = 0$. Se $df(a)$ fosse injetora, concluiríamos que existiria uma constante $c > 0$ tal que $\left\|df(a)\left(\frac{h_j}{\|h_j\|}\right)\right\| \geq c > 0$. Portanto, o limite anterior não poderia ser zero. Desta forma, $df(a)$ não é injetora.

Exercício 13. (ELJ 65) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^2 que satisfaz, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^m$, $f(tx) = t^2 f(x)$. Mostre que existe uma aplicação bilinear $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = B(x,x)$.

Resolução:
Basta derivar a função $t \mapsto f(tx)$ em função de t. De fato, temos

$$\frac{d}{dt}\left(f(tx)\right) = \frac{d}{dt}\left(t^2 f(x)\right).$$

Usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(f(tx)\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, x_j \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\left(t^2 f(x)\right) = 2tf(x).$$

Logo $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, x_j = 2tf(x)$. Derivando em t novamente e usando a regra da cadeia obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, x_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx)\, x_i x_j \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\left(2tf(x)\right) = 2f(x).$$

Assim

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx)\, x_i x_j.$$

Como a relação acima vale para qualquer t, podemos escolher, em particular, $t = 0$. Assim, obtemos

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\, x_i x_j.$$

A forma bilinear procurada é definida como

$$B(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\, u_i v_j,$$

para $u = (u_1, ..., u_n)$ e $v = (v_1, ..., v_n)$.

Exercício 14. (ELJ 68) Sejam $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funções diferenciáveis, em que h é um difeomorfismo. Suponha que $f = h^{-1} \circ g \circ h$ e $f(p) = p$ para um certo $p \in \mathbb{R}^n$. Mostre que:

a) $g(h(p)) = h(p)$.
Resolução:
Isto é verdadeiro, pois

$$f(p) = p \implies h^{-1} \circ g \circ h(p) = p \overset{\text{aplico } h \text{ em ambos os lados}}{\implies} g \circ h(p) = h(p).$$

b) $df(p)$ e $dg(h(p))$ têm os mesmos autovalores. (Lembre-se que λ é um autovalor de A se, e somente se, $\det(\lambda I - A) = 0$).
Resolução:

Isto é verdadeiro, pois, pela regra da cadeia, temos
$$df(p) = d\left(h^{-1} \circ g \circ h\right)(p) = dh^{-1}(g \circ h(p))dg(h(p))dh(p) =$$
$$dh^{-1}(h(p))dg(h(p))dh(p).$$
Porém, $h^{-1} \circ h = id$, em que $id(x) = x$. Logo $dh^{-1}(h(p))dh(p) = I$, o que implica que $dh^{-1}(h(p)) = (dh(p))^{-1}$. Assim, temos
$$df(p) = (dh(p))^{-1}\, dg(h(p))dh(p).$$
E, termos matriciais temos
$$Jf(p) = (Jh(p))^{-1}\, Jg(h(p))Jh(p).$$
Concluímos, assim, que $Jf(p)$ e $Jg(h(p))$ são matrizes semelhantes. Logo têm os mesmos autovalores.

Vamos recordar este resultado de álgebra linear. Duas matrizes A e B são semelhantes se existir uma matriz M invertível tal que $A = M^{-1}BM$. Neste caso, os autovalores de A e B são iguais, pois
$$\det(\lambda I - B) = \det(M)^{-1}\det(\lambda I - B)\det(M) = \det(M^{-1})\det(\lambda I - B)\det(M) =$$
$$\det(M^{-1}(\lambda I - B)M) = \det\left(\lambda M^{-1}M - M^{-1}BM\right) = \det(\lambda I - A).$$
Logo λ é autovalor de $B \iff \det(\lambda I - B) = 0 \iff \det(\lambda I - A) = 0 \iff \lambda$ é autovalor de A.

Exercício 15. (ELJ 70) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local. Mostre que

a) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, então $f(A)$ também é.

Resolução:

Seja $x \in A$. Como f é um difeomorfismo local, existe um aberto $U_x \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x \in U_x$, $f(U_x)$ é aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f|_{U_x} : U_x \to f(U_x)$ é um difeomorfismo. Logo $f(A \cap U_x)$ é um aberto de $f(U_x)$. Portanto, é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Assim,
$$f(A) = \cup_{x \in A} f(A \cap U_x)$$
é um aberto. Concluímos que $f(A)$ é um conjunto aberto.

b) Mostre que se $p \in \mathbb{R}^n$, então $f^{-1}(p)$ é vazio, finito ou infinito enumerável.

Resolução:

Suponha que $f^{-1}(p)$ não seja vazio, finito ou enumerável. Logo $f^{-1}(p)$ deve ter um número infinito não enumerável de elementos. Sabemos que
$$f^{-1}(p) = \cup_{n=1}^{\infty}\left(f^{-1}(p) \cap B_n(0)\right).$$
Se $\left(f^{-1}(p) \cap B_n(0)\right)$ for finito para todo n, então $f^{-1}(p)$ é igual a união de conjuntos finitos. Logo é enumerável, o que é um absurdo, por hipótese. Concluímos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}(p) \cap B_n(0)$ é infinito. Seja $(x_n)_n$ uma sequência de elementos distintos de $f^{-1}(p) \cap B_n(0)$. Como $\overline{B_n(0)}$ é compacto, concluímos que existe uma subsequência convergente, $\left(x_{n_j}\right)_j$. Seja $x_0 := \lim_{j \to \infty} x_{n_j}$. Logo $f(x_0) = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = p$. Assim, todo aberto U que contém x_0 contém algum elemento de $f^{-1}(p)$ diferente de x_0. Portanto, $f|_U : U \to f(U)$ não pode ser injetora e, claro, também não pode ser um difeomorfismo. Concluímos, então, que f não é um difeomorfismo local, em contradição com nossas hipóteses.

Assim, $f^{-1}(p)$ é vazio, finito ou infinito enumerável.

Exercício 16. (ELJ 72) Sejam $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g_1, ..., g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que

1) f é contínua.

2) $g_j \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são de classe C^1.

3) Os vetores $\{\nabla g_1(f(x)), ..., \nabla g_m(f(x))\}$ são linearmente independentes para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Mostre que, nestas condições, a função f é de classe C^1.

Resolução:

Assumiremos que g_j são de classe C^1. Esta hipótese faltou no enunciado.

Vamos definir a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $g(x) = (g_1(x), ..., g_n(x))$. Como g_j são de classe C^1, concluímos que g também é uma função de classe C^1.

Compondo com f concluímos que a função $g \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ também é de classe C^1, pois $g \circ f(x) = (g_1 \circ f(x), ..., g_n \circ f(x))$ e $g_j \circ f$ são de classe C^1. Observamos agora que $dg(f(x)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são isomorfismos para todo $x \in \mathbb{R}^n$, já que a matriz abaixo
$$Jg(f(x)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla g_1(f(x)) \\ \vdots \\ \nabla g_n(f(x)) \end{pmatrix}$$

tem linhas linearmente independentes. Logo é invertível. Desta maneira, concluímos que $dg\left(f\left(x\right)\right)$ é um isomorfismo.

Vamos fixar um $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Pelo teorema da aplicação inversa, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ que contém $f(x_0)$ tal que $g|_U : U \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo. Como f é contínua, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ que contém x_0 tal que $f(V) \subset U$. Assim f restrito a V pode ser escrito como

$$f|_V = \left(g|_U\right)^{-1} \circ \left(g \circ f|_V\right).$$

Porém $\left(g|_U\right)^{-1}$ e $g \circ f|_V$ são funções de classe C^1. Logo $f|_V$ é de classe C^1.

Como x_0 que fixamos é arbitrário, concluímos que f é uma função de classe C^1 em torno de todo ponto de $\mathbb{R}^m$. Desta maneira, f é uma função de classe C^1.

Exercício 17. (ELJ 75) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $f \circ f(x_0) = x_0$, para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $df(f(x))df(x) = I$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é invertível e $f^{-1} = f$.

Resolução:

Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $g(x) = f \circ f(x) - id(x)$. Logo g é de classe C^1, já que $f \circ f$ é de classe C^1, por ser composta de funções de classe C^1, e $id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^∞, em que $id(x) = x$.

Além disso,

$$dg(x) = d\left(f \circ f - id\right)(x) = df\left(f(x)\right) df(x) - d\left(id\right)(x) = df\left(f(x)\right) df(x) - I = 0.$$

Portanto, g é uma função constante, já que $\mathbb{R}^n$ é um aberto convexo. Como $g(x_0) = f \circ f(x_0) - id(x_0) = f \circ f(x_0) - x_0 = 0$, concluímos que a constante é igual a zero.

Desta maneira, $g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, ou seja,

$$f \circ f(x) = x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Isto é o mesmo que dizer que f é invertível e $f^{-1} = f$.

Exercício 18. (ELJ 90) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 - z^2, x - y - a\right).$$

Para que valores de a vale a seguinte propriedade: Se $(x, y, z) \in f^{-1}(0)$, então $df(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é sobrejetora. (Observação: Neste caso, o valor 0 é chamado de valor regular)

Resolução:

Vamos calcular $Jf(x, y, z)$. Vemos que

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A única forma de $Jf(x, y, z)$ não ser sobrejetora é quando as colunas são L.I. Para que isto ocorra, temos $x = -y$ e $z = 0$. Logo

$$f(x, y, z) = \left(2x^2, 2x - a\right).$$

Assim, $df(x, y, z)$ não é sobrejetora e $f(x, y, z) = (0, 0)$ ocorre somente se $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ e $a = 0$.

Concluímos que 0 é um valor regular de f se, e somente se, $a \neq 0$.

Exercício 19. (ELJ 102) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ uma função de classe C^1. Sejam $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ dado por $F(x, y) = f(x) - y$ e $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ dado por $G(x) = (x, f(x))$.

a) Mostre que $\text{graf}(f) = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}^n\} = F^{-1}(0)$.

Resolução:

Basta observar que

$$(x, y) \in \text{graf}\,(f) \iff y = f(x) \iff f(x) - y = 0 \iff F\,(x, y) = 0 \iff (x, y) \in F^{-1}\,(0)\,.$$

b) Mostre que se $(x, y) \in F^{-1}(0)$, então $dF(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ é sobrejetora.

Resolução:

Observemos que $dF(x, y)(h, k) = df(x)(h) - k$. Logo, dado $k \in \mathbb{R}^k$, temos que $dF\,(x, y)\,(0, -k) = k$. Portanto, $dF(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ é sobrejetora para todo (x, y). Inclusive, claro, para $(x, y) \in F^{-1}(0)$.

c) Mostre que $\text{graf}(f) = \text{Imagem}(G)$.

Resolução:

Basta observar que

$$(x, y) \in \text{graf}\,(f) \iff y = f(x) \iff (x, y) = (x, f(x)) \iff (x, y) \in \text{Imagem}(G).$$

d) Mostre que $dG : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ é injetora.
Resolução:
Basta observar que se $h \in \mathbb{R}^n$ e $dG(x)(h) = (h, df(x)\,(h)) = (0,0)$, então $h = 0$.

Exercício 20. (ELJ 110 e 113) Dizemos que uma função $h : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão se h é diferenciável e $dh(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetora, para todo $x \in \Omega$. Mostre que

a) Se $h : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão, então $m \leq n$.
Resolução:
Isto decorre do fato de $dh(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ser injetora. Usando o teorema do núcleo e da imagem, temos que

$$\dim(\mathbb{R}^m) = \dim\left(\ker\left(dh(x)\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\left(dh(x)\right)\right) \implies$$

$$m = 0 + \dim\left(\mathrm{Im}\left(dh(x)\right)\right) \implies \dim\left(\mathrm{Im}\left(dh(x)\right)\right) = m.$$

Como $\mathrm{Im}\,(dh(x))$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão m, concluímos que a dimensão de $\mathbb{R}^n$ deve ser maior ou igual a m, ou seja, $m \leq n$.

b) Se $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ é uma imersão de classe C^1, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo de classe C^1, então $\sigma \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ é uma imersão de classe C^1.
Resolução:
Basta mostrar que $d\,(\sigma \circ F)\,(x)$ é injetora para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Isto é verdade, pois se $h \in \mathbb{R}^n$, então

$$d\sigma\left(F\left(x\right)\right) dF(x)\left(h\right) = 0 \overset{(1)}{\implies} dF(x)(h) = 0 \overset{(2)}{\implies} h = 0.$$

A primeira implicação decorre de σ ser imersão. Logo $d\sigma(F(x))$ é injetora. A segunda implicação decorre do fato de F ser um difeomorfismo. Logo $dF(x)$ é um isomorfismo. Em particular, $dF(x)$ é injetora.

c) Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ são imersões de classe C^1, mostre que $f \times g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^{n+p}$ dado por

$$\left(f \times g\right)(x,y) = \left(f(x), g(y)\right)$$

é uma imersão de classe C^1. Conclua que $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ (toro) é a imagem de uma imersão de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^4$.
Resolução:
De fato, seja $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que

$$d\left(f \times g\right)(x,y)\left(h,k\right) = \left(df(x)\left(h\right), dg(y)\left(k\right)\right) = (0,0)\,.$$

Como $df(x)$ e $dg(y)$ são injetoras, concluímos que $h = k = 0$, ou seja, $(h,k) = (0,0)$.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dado por $f(t) = (cos(t), sen(t))$ e $g = f$. Logo f é imersão, já que $\frac{d}{dt}\left(cos(t), sen(t)\right) = (-sen(t), cos(t)) \neq (0,0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Desta forma, $f \times g$ também é uma imersão. Como S^1 é igual a imagem de f, concluímos que $S^1 \times S^1$ é igual a imagem de $f \times g$. Portanto, o toro é a imagem da imersão $f \times g$.

Exercício 21. (ELJ 115) Mostre que se $f : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^n$ é uma submersão de classe C^1, então f leva conjuntos abertos em conjuntos abertos.
Resolução:
Seja $A \subset \mathbb{R}^{n+p}$ um aberto e $x \in A$. Como $df(x) : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^n$ é sobrejetor, concluímos que existem abertos U_x e V_x de $\mathbb{R}^{n+p}$, com $x \in U_x \subset A$, e um difeomorfismo $h : V_x \to U_x$ tal que

$$f \circ h(x,y) = x.$$

Assim, $f\left(U\right) = f \circ h \circ h^{-1}\left(U\right) = \pi\left(h^{-1}\left(U\right)\right)$, em que $\pi\left(x,y\right) = x$.

Sabemos que π leva aberto em aberto, pois se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^{n+p}$ e $(x,y) \in \Omega$, então existem bolas $B_\epsilon\left(x\right)$ de $\mathbb{R}^n$ e $B_\epsilon\left(y\right)$ de $\mathbb{R}^p$, com $\epsilon > 0$, tais que $B_\epsilon(x) \times B_\epsilon(y) \subset \Omega$. Logo $\pi(\Omega) \supset \pi\left(B_\epsilon(x) \times B_\epsilon(y)\right) = B_\epsilon\left(x\right)$, ou seja, $\pi(\Omega)$ contém uma bola que contém $x = \pi\left(x,y\right)$. Assim, $\pi\left(\Omega\right)$ é aberto.

Como h é contínua, então $h^{-1}(U)$ é um aberto. Logo $f(U) = f \circ h\left(h^{-1}(U)\right) = \pi\left(h^{-1}(U)\right)$ é um conjunto aberto.

Exercício 22. (ELJ 118) Seja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ uma submersão de classe C^1 tal que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^4$. Mostre que a função $x \mapsto \|f(x)\|$ não tem máximos nem mínimos locais.

Resolução:
Suponha que x_0 seja um ponto de mínimo ou máximo local de $x \mapsto \|f(x)\|$. Logo x_0 também é um ponto de mínimo ou máximo local de $x \mapsto \|f(x)\|^2$. Definamos $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ a função de classe C^1 dada por $\varphi(x) = \|f(x)\|^2$. Logo x_0 é um ponto crítico de φ. Desta maneira, $d\varphi\left(x_0\right) = 0$, ou seja, $d\varphi\left(x_0\right)\left(v\right) = 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^4$. Assim,

$$d\varphi(x_0)(v) = 2\left\langle df(x_0)v, f(x_0)\right\rangle = 0$$

para todo $v \in \mathbb{R}^4$. Concluímos desta forma que $f(x_0)$ é ortogonal a imagem de $df(x_0)$. Porém, como f é uma submersão, a imagem de $df(x_0)$ é todo o conjunto $\mathbb{R}^3$. Portanto, $f(x_0)$ é ortogonal a todo $\mathbb{R}^3$. Desta maneira, $f(x_0) = 0$. Isto é um absurdo, pois f nunca se anula por hipótese.

Concluímos que f não pode ter máximos nem mínimos locais.