LISTA DE EXERCÍCIOS 4 - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER (MAP 5722-4)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/DISTRIBUICOES

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do Duistermaat e Kolk (denotado por D.K.), do J. Hounie (denotado por Hounie) e do Rudin (denotado por Rudin).

Exercício 1. (D.K. ex. 11.3) Seja dado uma função $\mathcal{A}: C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mostre que as seguintes propriedades de $\mathcal{A}$ são equivalentes:

i) $\mathcal{A}$ é uma função contínua linear que comuta com as derivadas ∂_j, ou seja, $\partial_j \mathcal{A} = \mathcal{A}\partial_j$.

ii) Existe uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{A}(\phi) = u * \phi$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(Dica: Diferencie $a \mapsto T_a \circ \mathcal{A} \circ T_{-a}$)

Exercício 2. (D.K. feito no capítulo 12) (Fórmula Integral de Pompeiu) Vimos em sala de aula que para todos f e g de classe $C^1(\overline{\Omega})$, em que Ω é um aberto limitado com fronteira C^1, temos

$$\int_\Omega (\partial_{\overline{z}} f(z))\, g(z)\, dxdy + \int_\Omega f(z)\, (\partial_{\overline{z}} g(z))\, dxdy = -\frac{i}{2}\int_{\partial\Omega} f(z)\, g(z)\, dz.$$

Isto pode ser interpretado como

$$\partial_{\overline{z}}(f\chi_\Omega) = (\partial_{\overline{z}} f)\,\chi_\Omega - \frac{1}{2}(n_x + i n_y)\, f\delta_{\partial\Omega}.$$

Fazendo a convolução com a função $\frac{1}{\pi z}$, obtenha a seguinte fórmula, válida para todo $\zeta \in \Omega$:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz - \frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{\partial_{\overline{z}} f(z)}{z-\zeta} dz.$$

Observação: Se f é analítica, obtemos a fórmula de Cauchy.

Exercício 3. (D.K. ex. 11.5) Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição tal que $\partial_{x_j} u = 0$ para todo $1 \le j \le n$. Prove que existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $u = c$.

Exercício 4. (Hounie. Capítulo IV ex. 7) Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sabemos que $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, pode ser interpretado como uma distribuição. Prove que esta distribuição coincide com o produto de convolução $u * T_\phi$, em que T_ϕ é a distribuição associada a ϕ. Em outras palavras, mostre que

$$T_{u*\phi} = u * T_\phi.$$

Exercício 5. (D.K. ex. 11.7) Seja f um polinômio em $\mathbb{R}$ de grau $\le m$ e $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Mostre que $f * T$ é uma função polinomial de graus $\le m$.

Exercício 6. (D.K. ex. 11.8) Calcule $\delta_a * \delta_b$, em que a e $b \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 7. (D.K. ex. 11.9) Suponha que f e g pertençam a $C(\mathbb{R})$ e que f tenha suporte compacto. Mostre que $T_f * T_g = T_{f*g}$, ou seja, a convolução de duas funções no sentido de distribuições coincide com a convolução de duas funções no sentido usual de convolução de funções.

Exercício 8. (D.K. ex. 11.10) Seja $P(D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial linear em $\mathbb{R}^n$ com coeficientes constantes. Prove que:

a) $P(D)u = (P(D)\delta) * u$, para toda $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

b) $P(D)(u * v) = (P(D)u) * v = u * (P(D)v)$, para toda u e $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que ou u ou v tem suporte compacto.

Exercício 9. (D.K. ex. 11.11) Seja $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $S: \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ o operador de reflexão: $Sv(x) = v(-x)$.

a) Prove que a função $(Sv)*: C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ leva funções de suporte compacto em funções de suporte compacto, ou seja, $(Sv)*: C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, de maneira contínua (ou seja, sequencialmente contínua).

b) Considere a função transposta

$${}^t(Sv*): \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Prove que ${}^t(Sv*)(u) = u * v$, para todo $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 10. (D.K. ex. 11.12) Seja E o subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ que consiste de finitas combinações lineares de deltas de Dirac δ_x, $x \in \mathbb{R}^n$.

a) Prove que para toda função contínua f em $\mathbb{R}^n$ existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em E tal que $\lim_{j\to\infty} u_j = f$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. (Dica: Para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, escreva $f(\phi)$ como o limite de somas de Riemann)

b) Prove, agora, que para toda distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em E tal que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 11. (D.K. ex. 12.1) Determine todas as soluções fundamentais $E_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $P = \frac{d^k}{dx^k}$ para $k \in \mathbb{N}_0$. Quais destas distribuições são homogêneas? De qual grau?

Exercício 12. (D.K. ex. 11.14) Defina, por indução matemática em k, a função χ_+^k que satisfaz: $\chi_+^1 = H$, a função de Heavside, e $\chi_+^k = H * \chi_+^{k-1}$, para $k > 1$.

a) Calcule todas as funções χ_+^k e todas as suas derivadas.

b) Para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, verifique a fórmula

$$\frac{d^k}{dx^k}(\phi H) = \sum_{j=0}^{k-1} \phi^{(k-j-1)}(0)\,\delta^{(j)} + \phi^{(k)} H.$$

Faça a convolução dos dois lados por χ_+^k. Interprete o resultado.

Exercício 13. (D.K. ex. 10.25 e Rudin cap.6 2.4) Seja H a função de Heaviside e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

a) Mostre que $H * \phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(x)\,dx$.

b) Mostre que $\delta' * H = \delta$.

c) Mostre que $1 * \delta' = 0$.

d) Mostre que $1 * (\delta' * H) = 1 * \delta = 1$ e que $(1 * \delta') * H = 0 * H = 0$. Isto contradiz o resultado de associatividade visto em sala de aula?

Exercício 14. (D.K. ex. 12.8) (Equação de Onda) Denote os pontos de $\mathbb{R}^2$ por (x,t). Mostre que se u e v são distribuições em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, então $u(t+x)+v(t-x)$ é solução da equação de onda: $\partial_t^2 - \partial_x^2$. (Note que estamos usando o difeomorfismo $\Phi(x,t) = (t+x, t-x)$)

Exercício 15. (D.K. ex. 12.11) Suponha que $P(D)$ e $Q(D)$ sejam operadores hipoelípticos.

a) Mostre que a composição $P(D)\,Q(D)$ também é um operador hipoelíptico.

b) Calcule a composição de ∂_z com $\partial_{\overline{z}}$. Use isto para determinar, a partir da solução fundamental de Δ, a solução fundamental de ∂_z e de $\partial_{\overline{z}}$.

Exercício 16. (D.K. ex. 12.4) (Fórmula de Green e o Problema de Dirichlet) Suponha que $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é uma solução fundamental do operador de Laplace Δ e considere uma função harmônica u definida num aberto Ω de $\mathbb{R}^n$. Seja U um aberto de Ω tal que $\overline{U}$ seja um compacto contido em Ω. Prove que $v := \Delta(u\chi_U)$ é uma distribuição em Ω cujo suporte está contido em ∂U. Prove também que $v \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e que $u\chi_U = E * v$.

Agora assuma que a fronteira ∂U é de classe C^1 e denote a normal exterior ao bordo no ponto $y \in \partial U$ por $\nu(y)$. Para uma função f definida numa vizinhança de ∂U, a derivada normal de $\partial_\nu f$ de f é definida como

$$\partial_\nu f = \sum_{j=1}^n \nu_j(y)\,\partial_j f(y), \quad y \in \partial U.$$

A função acima é contínua em ∂U. Prove agora a fórmula de Green:

$$u(x) = \int_{\partial U} \left(u(y)\,\partial_\nu\,(y \mapsto E(x-y)) - E(x-y)\,\partial_\nu u(y)\right) dy,\ \forall x \in U.$$

Mostre, por fim, que o lado direito da equação acima se anula quando $x \notin U$.

Exercício 17. (D.K. ex. 12.7) (Equação de Onda Unidimensional) Defina o conjunto aberto $V := \{(x,t) : |x| < t\}$. Ache uma constante $a \in \mathbb{C}$ tal que $E = a\chi_V$ é uma solução fundamental de $\partial_t^2 - \partial_x^2$, em que χ_V é a função característica do conjunto V. Determine $\mathrm{supp}(E)$ e o $\mathrm{singsupp}(E)$

Exercício 18. (D.K. ex. 12.12) Seja E a solução fundamental de Δ em $\mathbb{R}^n$. Sejam g_j, para j de 1 a n, distribuições de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ com a propriedade de que $\partial_j g_k = \partial_k g_j$ para todo j e k. Prove que a distribuição

$$f = \sum_{j=1}^n \partial_j E * g_j$$

satisfaz o sistema de equações diferenciais

$$\partial_j f = g_j,\ \forall j.$$