LISTA DE EXERCÍCIOS 3 - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER (MAP 5722-4)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/DISTRIBUICOES

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do Duistermaat e Kolk (denotado por D.K.) e da Gerd Grubb (denotado por G).

Exercício 1. (D.K. ex. 7.1) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f \in C(\Omega)$. Mostre que o suporte de f como função e como distribuição coincidem ($supp\,(f) = supp\,(T_f)$).

Exercício 2. (D.K. ex. 7.2 e 7.10) Determine o suporte e o suporte singular das distribuições δ_0, $PV\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{x \pm i0}$ e $H(x)$, em que H é a função de Heaviside.

Exercício 3. (D.K. ex. 7.3 e 7.11) Seja $P(D) = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial linear com coeficientes constantes e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Mostre que:
a) $\text{supp}\,(P(D)\,u) \subset \text{supp}\,(u)$.
b) $\text{sing supp}\,(P(D)\,u) \subset \text{sing supp}\,(u)$.

Exercício 4. (D.K. ex. 7.6) Seja $a \in \mathbb{C}$ e definamos $x_+^a = \begin{cases} x^a = e^{a\ln(x)},\ x > 0 \\ 0,\ x \le 0 \end{cases}$. Prove as seguintes afirmações:

a) Se $Re(a) > -1$, então x_+^a é uma função localmente integrável em $\mathbb{R}$ e, portanto, pode ser interpretada como uma distribuição.

b) Se a não é um inteiro negativo, então

$$x_+^a = \frac{1}{(a+k)\ldots(a+1)}\partial_x^k x_+^{a+k},\ \text{para}\, k > -Re(a) - 1$$

define uma distribuição em $\mathbb{R}$ que é uma extensão da distribuição dada pela função x_+^a em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. A distribuição acima independe de k, desde que k seja maior do que $-Re(a)-1$. Determine o suporte e a ordem desta distribuição. O que ocorre se a parte real de a é um inteiro negativo, mas sua parte imaginária não se anula?

c) Seja $l_+(x) = \begin{cases} \ln(x),\ x > 0 \\ 0,\ x \le 0 \end{cases}$. Logo $l_+(x)$ é uma função localmente integrável em $\mathbb{R}$ e, portanto, define uma distribuição em $\mathbb{R}$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\partial_x^k l_+$ é uma distribuição em $\mathbb{R}$ que estende a distribuição em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ dada pela função x_+^{-k}. Determine seu suporte e sua ordem.

d) Formule resultados similares partindo de $(-x)_+^a$ e de $l_+(-x)$.

Exercício 5. (D.K. ex. 7.9) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Suponha que para todo $x \in \Omega$ exista uma vizinhança aberta de x, $U_x \subset \Omega$, com a seguinte propriedade:

Para toda função $\phi \in C_c^\infty(U_x)$, a sequência em $\mathbb{C}$ dada por $(u_j(\phi))_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Prove que existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$.

Exercício 6. (D.K. ex. 8.1) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Suponha que o suporte singular de u seja compacto. Prove que u tem ordem finita.

Exercício 7. (D.K. ex. 8.2) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ uma sequência que converge a $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Mostre que:

a) Se existe um compacto K contido em Ω tal que $\text{supp}\,(u_j) \subset K$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $\text{supp}\,(u) \subset K$.

b) Se existe um compacto K contido em Ω tal que $\text{supp}\,(u_j) \subset K$ para todo $j \in \mathbb{N}$, o seguinte limite $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ vale em $\mathcal{E}'(\Omega)$, isto é, para todo $\phi \in C^\infty(\Omega)$ temos que $\lim_{j\to\infty} u_j(\phi) = u(\phi)$.

c) Seja $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em Ω com a propriedade de que $\lim_{j\to\infty} d(a_j, \mathbb{R}^n\backslash\Omega) = 0$ ou $\lim_{j\to\infty}\|a_j\| = 0$. Prove que $\lim_{j\to\infty}\delta_{a_j} = 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, mas não em $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Exercício 8. (G. ex. 3.17) A distribuição $\frac{d^k}{dx^k}\delta_0$ é frequentemente denotada por $\delta^{(k)}$. Para $k = 1, 2, 3$, a notação δ', δ'' e δ''' (respectivamente) também é usada. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

a) Mostre que existem constantes c_0 e c_1 tais que a identidade $f\delta' = c_0\delta + c_1\delta'$ é válida.

(b) Para $k \in \mathbb{N}_0$, mostre que existem constantes c_{kj} adequadas para as quais a seguinte identidade é válida: $f\delta^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} c_{kj}\delta^{(j)}$.

(Dica: Use a definição de multiplicação por funções e a regra de Leibniz).

Exercício 9. (D.K. ex. 9.2) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\psi \in C^{\infty}(\Omega)$. Escreva a distribuição $\psi\partial^{\alpha}\delta$ como uma combinação linear da seguinte forma:

$$\psi\partial^{\alpha}\delta = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\beta}\partial^{\beta}\delta,$$

em que $c_{\beta} \in \mathbb{C}$. (Dica: Use a definição de multiplicação por funções e a regra de Leibniz. Essencialmente é uma generalização do exercício anterior).

Exercício 10. (D.K. ex. 9.3) Determine as soluções $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ da equação $x^k u = 0$.

Exercício 11. (D.K. ex. 9.4) Determine as soluções $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ da equação $xu' = 0$.

Exercício 12. (D.K. ex. 9.5) Vimos em sala de aula que $u = \frac{1}{x+i0}$ é solução de $xu = 1$. Usando este fato:

a) Prove que a distribuição u satisfaz $xu' = -u$.

b) Aplicando o operador diferencial $x\partial_x$, prove que se u é solução de $x^k u = 1$, então $v = -\frac{1}{k}u'$ é solução de $x^{k+1}v = 1$.

c) Usando os itens a) e b), determine todas as soluções $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ da equação $x^k u = 1$.

Exercício 13. (D.K. ex. 9.7) Mostre que se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é tal que $x_n u = 0$, então existe uma única distribuição $v \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ tal que

$$u(\phi) = v(i^*(\phi)), \ \ \forall \phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n),$$

em que $i^*(\phi)(x_1, ..., x_n) = \phi(x_1, ..., x_{n-1}, 0)$.

Dica: Use $\chi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ com $\chi = 1$ numa vizinhança de 0. Para $\phi \in C_c^{\infty}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, definamos a função $\phi \otimes \chi(x', x_n) = \phi(x')\chi(x_n)$ e deduza que v deve ser definida como $v(\phi) = u(\phi \otimes \chi)$.

Exercício 14. (D.K. ex. 9.10) Determine as soluções $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ da equação $e^{i\xi x}u = u$. Considere os casos $\xi = 0$, $\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $\xi \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Exercício 15. (D.K. ex. 9.9) Seja $a \in \mathbb{C}$. Mostre que as soluções $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ da equação diferencial $xu' = au$ formam um espaço vetorial $\mathcal{H}_a$. Prove que a multiplicação por x e a diferenciação por ∂_x define mapas lineares de $\mathcal{H}_a$ em $\mathcal{H}_{a+1}$ e $\mathcal{H}_{a-1}$, respectivamente. Determine $\mathcal{H}_a$ (Dica: use o exercício 4). Decida se as aplicações de multiplicação e diferenciação são injetoras ou sobrejetoras, respectivamente.

Exercício 16. (G. ex. 3.8) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto.

a) Seja $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Mostre que se $\delta(\phi) = 0$, então $\phi\delta = 0$.

b) Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Verifique se as implicações abaixo valem para todos u e ϕ:

i) $u(\phi) = 0 \implies \phi u = 0$.

ii) $\phi u = 0 \implies u(\phi) = 0$.

Exercício 17. (G. ex. 3.10) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com contorno suave ou $\Omega = \mathbb{R}^n_+$.

a) Mostre que supp $\left(\partial_{x_j}\chi_{\Omega}\right) \subset \partial\Omega$, em que χ_{Ω} é a função característica do conjunto Ω.

b) Mostre que a distribuição $-\Delta\chi_{\Omega}$ satisfaz $-\Delta\chi_{\Omega}(\phi) = -\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi}{\partial n}d\sigma$, para todo $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, em que n é a normal que aponta para fora de Ω. Determine a ordem e o suporte da distribuição no caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$.

Exercício 18. (G. ex. 3.12) Frequentemente se encontra em livros a notação $\delta(x)$ para a distribuição delta de Dirac δ_0. Além disso, é comum encontrarmos em textos de física a notação $\delta(x-a)$ para a distribuição δ_a, $a \in \mathbb{R}$. Isto é motivado pelo seguinte cálculo heurístico:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\phi(x+a)dx = \phi(a),$$

para $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$.

(a) Motive por um cálculo similar a fórmula $\delta(ax) = |a|\,\delta(x)$, para $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(b) Motive por um cálculo similar a fórmula: $\delta\left(x^2 - a^2\right) = \frac{1}{2a}\left(\delta(x-a) + \delta(x+a)\right)$, para $a > 0$ (Dica: Podemos "calcular" (heuristicamente) a integral $\int_{-\infty}^{\infty}$ decompondo-a em duas: uma sobre $]-\infty, 0]$ e outra sobre $[0, \infty[$. Use mudança de variáveis)

Exercício 19. (D.K. ex. 10.1) (Composição de pushforward e diferenciação parcial) Considere um mapa C^∞ de um aberto X de $\mathbb{R}^n$ em um aberto Y de $\mathbb{R}^p$. Prove que para todo $j = 1, ..., n$, a seguinte identidade de mapas lineares contínuos vale:

$$\Phi_* \circ \partial_j = \sum_{k=1}^{n} \partial_k \circ \Phi_* \circ \partial_j \Phi_k : \mathcal{E}'(X) \to \mathcal{E}'(Y).$$

Exercício 20. (D.K. ex. 10.6) (Teorema de Mudança de Variável) Seja $\Psi : Y \to X$ um difeomorfismo de classe C^∞ entre os abertos X e Y de $\mathbb{R}^n$. Mostre que $\chi_{\Psi(Y)} = \Psi_*(j_\Psi \chi_Y)$ em $\mathcal{D}'(X)$, em que $j_\Psi := |det(D\Psi)(x)|$ e χ_A é a função característica do conjunto A.

Exercício 21. (D.K. ex. 10.7) (Composição de pullback e diferenciação parcial) Considere um difeomorfismo de classe C^∞ dado por $\Phi : Y \to X$, em que X e Y são abertos de $\mathbb{R}^n$. Denotemos a inversa da transposta da matrix Jacobiana de Ψ por $(\psi_{jk})_{j,k=1,..,n}$ ou seja, $\left({}^t(D\Psi(y))\right)^{-1} = (\psi_{jk}(y))_{jk}$, para $y \in Y$. Derive a seguinte propriedade entre mapas lineares:

$$\Psi^* \circ \partial_j = \left(\sum_{k=1}^{n} \psi_{jk} \circ \partial_k\right) \circ \Psi^* : \mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'(Y).$$

Exercício 22. (D.K. ex. 10.16) Mostre que $\partial^\alpha \delta$ é uma distribuição homogênea de ordem $-n - |\alpha|$.