LISTA DE EXERCÍCIOS 2 - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER (MAP 5722-4)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/DISTRIBUICOES

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do Duistermaat e Kolk (denotado por D.K.).

Exercício 1. (D.K. ex. 5.1) Seja $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções não negativas em $L^1(\mathbb{R}^n)$ (ou seja, tais que $\int_{\mathbb{R}^n}|f_j(x)|\,dx<\infty$). Suponha que as funções satisfaçam as seguintes propriedades:
a) Para todo $j\in\mathbb{N}$, temos $\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\,dx = 1$.
b) Para todo $r>0$, temos que $\lim_{j\to\infty}\int_{\|x\|\geq r} f_f(x)\,dx = 0$.
Prove que $\lim_{j\to\infty} f_j = \delta_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 2. (D.K. ex. 5.2) Seja $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definamos $f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} f\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Prove que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon = c\delta \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \text{em que} \quad c = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \in \mathbb{C}.$$

(Dica: Uma maneira simples de se provar isto é fazendo a mudança de variável $y=\frac{x}{\epsilon}$ ao calcular $f_\epsilon(\phi)$.)

Exercício 3. (D.K. ex. 5.3) Mostre que:
1) $\frac{1}{x+i0} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{x+i\epsilon} = PV\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta_0$ e que $\frac{1}{x-i0} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{x-i\epsilon} = PV\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta_0$. (Dica: O primeiro limite foi provado em sala de aula. O segundo segue do mesmo argumento, só mudando a região da integração complexa).
2) Usando o resultado anterior, mostre que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{x}{x^2+\epsilon^2} = PV\left(\frac{1}{x}\right) \text{ e } \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = \pi\delta_0 \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Exercício 4. (D.K. ex. 3.1) Prove que $PV\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{x+i0}$ e $\frac{1}{x-i0}$ são todas distribuições de ordem 1. (Observação: A prova para $PV(\frac{1}{x})$ foi feita em aula. Para as demais, basta usar os mesmos argumentos ou usar o fato de que $PV(\frac{1}{x})$ tem ordem 1 junto com os resultados do item 1) do exercício anterior).

Exercício 5. (D.K. ex. 5.4) Seja $\{e_j\}_{j=1,\dots,n}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ ($e_1=(1,0,0,...)$, $e_2=(0,1,0,...)$, ...) e seja $a\in\mathbb{R}^n$. Mostre que:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\delta_{a-te_j}-\delta_a\right) = \partial_{x_j}\delta_a \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Exercício 6. (D.K. ex. 5.5) Considere para $t>0$ a seguinte função em $\mathbb{R}^n$:

$$u_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}.$$

Verifique que a equação acima satisfaz a seguinte equação (chamada equação do calor ou da difusão)

$$\frac{d}{dt}u_t = \Delta u.$$

Calcule os seguintes limites em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:
a) $\lim_{t\to 0^+} u_t$.
b) $\lim_{t\to 0^+}\frac{d}{dt}u_t$.

Exercício 7. (D.K. ex. 6.2) Seja u_t como no exercício anterior, ou seja, $u_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$. Mostre que para todo $k\in\mathbb{N}_0$, temos

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^k}\left(u_t - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{t^j}{j!}\Delta^j\delta\right) = \frac{1}{k!}\Delta^k\delta \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Por que a notação $u_t = e^{t\Delta}\delta$ é adequada para $t>0$?
(Dica: Use Série de Taylor em t para provar o limite e os resultados do exercício anterior)

Exercício 8. (D.K. ex. 5.11) Seja $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ uma sequência tal que $\lim_{j\to\infty} \|a_j\| = \infty$. Seja $(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ uma sequência arbitrária. Definamos as distribuições u_k, $k \in \mathbb{N}$ por

$$u_k := \sum_{j=1}^{k} c_j \delta_{a_j}.$$

Mostre que existe uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{k\to\infty} u_k = u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 9. (D.K. ex. 5.12) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e definamos as distribuições u_k, $k \in \mathbb{N}$, por

$$u_k := \frac{1}{k} \sum_{j=-k^2}^{k^2} f\left(\frac{j}{k}\right) \delta_{\frac{j}{k}}.$$

Existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{k\to\infty} u_k = u$? Se existir, qual é este limite? (Dica: Pense na integral de Riemann)

Exercício 10. (D.K. ex. 5.14) Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de medidas de Radon em Ω com a propriedade de que para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos $\lim_{j\to\infty} u_j(\phi) = u(\phi)$. Mostre que para todo compacto $K \subset \Omega$ existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|u_j(\phi)| \leq c\left(\sup_{x\in\Omega} |\phi(x)|\right), \forall j \in \mathbb{N} \,\mathrm{e}\, \forall \phi \in C_c^\infty(K).$$

Prove que u é é uma medida de Radon positiva.

Por fim, mostre que, para toda $f \in C_c(\Omega)$, não necessariamente diferenciável, temos $\lim_{j\to\infty} u_j(f) = u(f)$.

Dica: Use o seguinte resultado visto em sala de aula. Seja $K \subset \Omega$ um compacto. Logo para toda função $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$, $0 \leq \chi \leq 1$, que seja igual a 1 numa vizinhança de K, temos

$$|u(\phi)| \leq u(\chi) \|\phi\|_{C^0}, \forall \phi \in C_c^\infty(K),$$

em que $\|\phi\|_{C^0} := \sup_{x\in\Omega} |\phi(x)|$.