LISTA DE EXERCÍCIOS 1 - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER (MAP 5722-4)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/DISTRIBUICOES

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do Duistermaat e Kolk (denotado por D.K.), do J. Hounie, do M. W. Wong (An Introduction to Pseudo-Differential Operators) e da Gerd Grubb.

Exercício 1. (Wong ex. 1.1) Ache os símbolos de cada um dos operadores diferenciais abaixo:
a) $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.
b) $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.
c) $\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.
d) $\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.
e) $\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}$.
f) $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+x_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

Exercício 2. (Wong ex. 1.5 e 7.2) Seja $x\in\mathbb{R}^n$. Definamos $\|x\|=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$. Prove que
a) $|x^\alpha|\leq\|x\|^{|\alpha|}$, para todo $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$.
b) $\|x\|^{2N}\leq n^N\sum_{|\gamma|=N}|x^\gamma|^2$, para todo $N\in\mathbb{N}_0$.

Exercício 3. (Wong ex. 7.3) Seja $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Usando a fórmula de Taylor com resto integral, mostre que se

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha f(x)|<\infty,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}_0^n,$$

então para todo $N\in\mathbb{N}_0$, existe uma constante positiva $C_N>0$ tal que

$$\left|f(x)-\sum_{|\alpha|<N}\frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!}x^\alpha\right|\leq C_N\|x\|^N,\ \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Exercício 4. (Hounie capítulo 1 ex. 1) Determine quais das funções abaixo são funções teste (elementos de $C_c^\infty(\mathbb{R})$):
a) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x(x-1)}},\ 0<x<1\\ 0,\ x\leq 0 \text{ ou } x\geq 1\end{cases}$.
b) $f(x)=\begin{cases}\cos(x),\ |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0,\ |x|\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$.
c) $f(x)=\begin{cases}\cos(x)\,e^{\frac{1}{(4\pi^2-x^2)}},\ |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0,\ |x|\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

Exercício 5. (Hounie capítulo 1 ex. 2) Quais das funções abaixo são funções localmente integráveis?
a) $f(x)=\frac{1}{x}$ em $\mathbb{R}$.
b) $f(x,y)=\frac{1}{x+iy}$ em $\mathbb{R}^2$.
c) $f(x)=\frac{1}{\|x\|^{n-\frac{1}{2}}}$ em $\mathbb{R}^n$.
(Dica: Use coordenadas polares).

Exercício 6. (Hounie capítulo 1 ex. 3) Dizemos que uma sequência de funções $(\phi_j)_j$ em $L^1_{loc}(\Omega)$, em que $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ é um aberto, converge para $\phi\in L^1_{loc}(\Omega)$ se, para todo compacto $K\subset\Omega$, temos

$$\lim_{j\to\infty}\int_K|\phi(x)-\phi_j(x)|\,dx=0.$$

Mostre que se $f\in L^1_{loc}(\Omega)$, então existem uma sequência de funções teste $(\phi_j)_j$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tais que $\lim_{j\to\infty}\phi_j=f$ em $L^1_{loc}(\Omega)$.

Exercício 7. (Hounie capítulo 1 ex. 6) Prove que $T: C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ dada como $T(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t)\, dt$ é a distribuição nula.

Exercício 8. (Hounie capítulo 1 ex. 7) Quais das funções $T: C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ abaixo definem distribuições?
a) $T(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t^2} \phi(t)\, dt$.
b) $T(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d\phi}{dt}(t) \right| dt$.
c) $T(\phi) = \lim_{n\to\infty} n\left[\phi\left(1+\frac{1}{n}\right) - \phi(1)\right]$.

Exercício 9. (Hounie capítulo 1 ex. 8) Prove que não existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $\int f(x)\phi(x)\, dx = \phi(0)$ para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. (Dica: observe que se isto fosse verdade, teríamos $\int f(x)\phi(x)\, dx = 0$ para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Isto implicaria que $f = 0$ q.t.p em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, e, portanto, também em $\mathbb{R}$, já que $\{0\}$ tem medida nula. De fato, basta usar os resultados vistos em sala de aula. Detalhe o argumento)

Exercício 10. (Hounie capítulo 2 ex. 2 e 5) Calcule as seguintes derivadas no sentido das distribuições:
a) $\left(\frac{d}{dx} - a\right)(H(x)e^{ax})$.
b) $\frac{d^k}{dx^k}|x|$. (Dica: Tente fazer os exercícios 20 a) e b) antes)
c) $\left(\frac{d}{dx} + a^2\right)\left(\frac{H(x)\cos(ax)}{a}\right)$.
d) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(H(x)H(y))$.
Acima usamos que $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ é a função de Heaviside.

Exercício 11. (Hounie capítulo 2 ex. 7) Mostre que se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ satisfaz $\frac{du}{dx} = \delta_0$, então existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $u(x) = H(x) + c$.

Exercício 12. (Grubb ex. 2.1) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Seja $\varphi: I \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Mostre que se $\varphi \in C_c^\infty(I)$, então $\varphi = 0$.

Exercício 13. (Grubb ex. 2.5) Mostre que se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\text{supp}(\varphi) \subset B_R(0)$, então

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \leq 2R \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial_{x_1}\varphi(x)|.$$

Dica: Expresse φ como uma integral de $\partial_{x_1}\varphi$.

Exercício 14. (D.K. ex. 2.2) Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\phi \neq 0$ e $0 \notin \text{supp}\phi$. Consideremos as seguintes sequências:
i) $\phi_j(x) = \frac{1}{j}\phi(x-j)$.
ii) $\phi_j(x) = \frac{1}{j^p}\phi(jx)$, em que $p \in \mathbb{N}$.
iii) $\phi_j(x) = e^{-j}\phi(jx)$.
a) Para cada uma das sequências acima, mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}$ e para cada $k \in \mathbb{N}_0$, a sequência $\left(\frac{d^k\phi_j}{dx^k}(x)\right)_j$ converge para zero. Mostre que a convergência é uniforme no item iii).
b) Determine quais das sequências acima convergem a zero em $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Exercício 15. (D.K. ex. 2.3) Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função tal que $\phi \geq 0$, $\text{supp}\phi \subset B_1(0)$ e $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\, dx = 1$. Definamos $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Dado $\psi \in C_c^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0$, mostre que:
a) $\partial_x^\alpha(\psi * \phi_\epsilon) = (\partial_x^\alpha\psi) * \phi_\epsilon$, para todo $|\alpha| \leq k$.
b) $\lim_{\epsilon\to 0}\psi * \phi_\epsilon = \psi$ em $C_c^k(\Omega)$.
c) Conclua que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $C_c^k(\Omega)$ no seguinte sentido: Dado $\varphi \in C_c^k(\Omega)$, existe uma sequência $(\varphi_j)_j \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\lim_{j\to\infty}\varphi_j = \varphi$ em $C_c^k(\Omega)$.

Exercício 16. (D.K. ex. 3.1 e 3.2) Considere a distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definida abaixo:

$$u(\phi) = \frac{d^k\phi}{dx^k}(0).$$

a) Mostre que a ordem de u é menor ou igual a $k \in \mathbb{N}_0$.
b) Prove que a distribuição acima é de ordem exatamente igual a $k \in \mathbb{N}_0$.
(Dica: Seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\psi(0) = 1$. Definimos $\phi_\delta(x) = x^k\psi\left(\frac{x}{\delta}\right)$. Suponha que a ordem de u seja menor do que k. Use as funções ϕ_δ para obter uma contradição. O argumento completo pode ser encontrado no exemplo 2.1.2 do livro do Hörmander)

Exercício 17. (D.K. ex. 3.4) Verifique que u, v e w definidas abaixo são distribuições em $\mathbb{R}^2$:

i) $u(\phi) = \partial_{x_1}\partial_{x_2}\phi(1,1)$.

ii) $v(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t,0)\, dt$.

iii) $w(\phi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\|x\|^2} \phi(x)\, dx$, em que $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Exercício 18. (D.K. ex. 3.5) Consideremos funções e distribuições em $\mathbb{R}^2$:

a) Seja $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$. Mostre que $\frac{1}{r}$ e $\ln(r)$ definem distribuições em $\mathbb{R}^2$. Qual é a ordem destas distribuições?

b) Definimos $u(\phi) = \int_0^{\pi} (cos(t)\, \partial_{x_1} + sen(t)\, \partial_{x_2})\, \phi(\cos(t), \operatorname{sen}(t))\, dt$. Mostre que u define uma distribuição em $\mathbb{R}^2$. Qual é a sua ordem?

c) Definimos $u(\phi) = \int_0^{\pi} (-sen(t)\, \partial_{x_1} + cos(t)\, \partial_{x_2})\, \phi(\cos(t), \operatorname{sen}(t))\, dt$. Mostre que u define uma distribuição em $\mathbb{R}^2$. Qual é a sua ordem?

Exercício 19. (D.K. ex. 3.6) Mostre que se f é uma função contínua e T_f é a distribuição que corresponde a f, então $T_f \geq 0$ se, e somente se, $f \geq 0$.

Exercício 20. (D.K. ex. 4.1 e 4.2) Prove que:

a) $\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sign}(x)$, em que $\operatorname{sign}(x)$ é a função igual a 1 se $x \geq 0$ e a -1 se $x < 0$.

b) $\frac{d^2}{dx^2}|x| = 2\delta_0$.

c) $\frac{d}{dx}\ln(x) = PV\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercício 21. (D.K ex. 4.4) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a função definida como

$$f(x) = \begin{cases} e^{\lambda x}, \; x > 0 \\ 0, \; x \leq 0 \end{cases}.$$

Prove que as derivadas de f satisfazem:

$$\frac{d^k}{dx^k} f = \lambda^k f + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-1-j} \frac{d^j}{dx^j}(\delta_0), \; k \in \mathbb{N}_0.$$

Seja p um polinômio de grau $m > 0$ tal que $p(\lambda) = 0$. É verdade que $p(\partial) f = 0$? Calcule a ordem de f.

Exercício 22. (D.K. ex. 4.6) Seja $p \in \mathbb{R}^n$ e $v_j(x) = \frac{x_j - p_j}{\|x-p\|^n}$, $1 \leq j \leq n$. Verifique que v_j são localmente integráveis em $\mathbb{R}^n$ e que, portanto, definem distribuições em $\mathbb{R}^n$. Prove que

$$\operatorname{div}(v) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} v_j = c_n \delta_p,$$

em que c_n denota o volume da esfera $\mathbb{S}^{n-1}$.

Exercício 23. (D.K. ex. 4.7) Para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Definamos

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)c_n\|x\|^{n-2}}, \text{ se } n \neq 2 \\ \frac{1}{2\pi}\ln\|x\|, \text{ se } n = 2 \end{cases}.$$

a) Mostre que existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $\partial_{x_j} E = c v_j$.

b) Mostre que $\Delta E = \delta$, em que

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2.$$

Exercício 24. (D.K. ex. 4.8) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Suponha que c_1, ..., $c_q \in \mathbb{C}$ e $a_1 < ... < a_q \in \mathbb{R}$. Ache as soluções $u \in \mathcal{D}'(I)$ de $\frac{du}{dx} = \sum_{j=1}^{q} c_j \delta_{a_j}$.