PROVA SUBSTITUTIVA - CÁLCULO V - MAP 0217 / MAT 0311

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Observação: O número total de pontos da prova é 10,5 (0,5 extras). No entanto, a nota máxima é 10.

Boa Prova!

Exercício 1 **(Matéria da Primeira Prova)**

(1,0 Ponto) a) Mostre que $S^1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \, x^2+y^2=1\right\}$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Resolução:

Primeiro observamos que o conjunto S^1 é um conjunto compacto. De fato, ele é limitado (está contido na bola aberta de raio 2, por exemplo) e é fechado. Para provar que é fechado (uma das formas de fazer isto), definimos a função $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $F(x,y) = x^2+y^2$. Como F é contínua e $\{1\}$ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$, concluímos que $S^1 := F^{-1}(\{1\})$ é um conjunto fechado.

Agora suponha que exista um homeomorfismo entre S^1 e $\mathbb{R}^2$. Vamos denotar esta função por $g: S^1 \to \mathbb{R}^2$. Desta maneira, concluímos que $\mathbb{R}^2 = g(S^1)$. Como S^1 é compacto e como g é uma função contínua, concluímos que $\mathbb{R}^2$ deve ser compacto (já que funções contínuas levam compactos em compactos). Porém $\mathbb{R}^2$ não é limitado. Logo não pode ser compacto. Um absurdo. Concluímos, então, que S^1 não pode ser homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

(1,0 Ponto) b) Mostre que $\mathbb{R}$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. (Dica: Pense no que ocorre quando tiramos um ponto de $\mathbb{R}$)

Resolução:

Suponha que exista uma função $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que seja um homeomorfismo. Seja $p \in \mathbb{R}$ dado por $p := h(0,0)$. Logo, tirando $(0,0)$ de $\mathbb{R}^2$ e p de $\mathbb{R}$, concluímos que $h: \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}\backslash\{p\}$ também é um homeomorfismo (é bijetora e $h|_{\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}}$ e $h^{-1}|_{\mathbb{R}\backslash\{p\}}$ são contínuas). Porém, $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ é um conjunto conexo, já que ele é conexo por caminhos, como pode ser visto facilmente. No entanto, $\mathbb{R}\backslash\{p\}$ é um conjunto desconexo, já que $\mathbb{R}\backslash\{p\} =]-\infty,p[\cup]p,\infty[$ é uma cisão não trivial deste conjunto. Como $\mathbb{R}\backslash\{p\} = h\left(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\right)$, concluímos $\mathbb{R}\backslash\{p\}$ é igual a imagem de um conexo. Logo este conjunto também deveria ser conexo. Obtemos, assim, um absurdo. Logo $\mathbb{R}^2$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

(1,5 Ponto) c) Sejam M e N espaços métricos e $f: M \to N$ e $g: M \to N$ funções contínuas. Seja $a \in M$ tal que $f(a) \neq g(a)$. Mostre que existe uma bola aberta $B_r(a) \subset M$, $r>0$, tal que se $y \in B_r(a)$, então $f(y) \neq g(y)$.

Resolução: Vamos denotar por d a métrica de M e por $\tilde{d}$ a métrica de N. Seja $\epsilon := \tilde{d}(f(a),g(a))$. Seja $\delta_1 > 0$ tal que se $d(y,a) < \delta_1$, então $\tilde{d}(f(y),f(a)) < \frac{\epsilon}{2}$ e seja $\delta_2 > 0$ tal que se $d(y,a) < \delta_2$, então $\tilde{d}(g(y),g(a)) < \frac{\epsilon}{2}$. Vamos agora definir $r := \frac{1}{2}\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Logo, se $y \in B_r(a)$, então $d(y,a) < \delta_1$ e $d(y,a) < \delta_2$. Portanto, $\tilde{d}(f(y),f(a)) < \frac{\epsilon}{2}$ e $\tilde{d}(g(y),g(a)) < \frac{\epsilon}{2}$. Suponha que $g(y) = f(y)$, então temos que

$$\epsilon = \tilde{d}(f(a),g(a)) \leq \tilde{d}(f(a),f(y)) + \tilde{d}(f(y),g(y)) + \tilde{d}(g(y),g(a)) = \tilde{d}(f(a),f(y)) + \tilde{d}(g(y),g(a)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isto é um absurdo. Logo concluímos que $g(y) \neq f(y)$ para todo $y \in B_r(a)$.

Exercício 2 **(Matéria da Segunda Prova)**

(1,0 ponto) a) Seja $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(tx) = tf(x)$, para todo $t>0$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é uma função linear, isto é, $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, para todo α, $\beta \in \mathbb{R}$ e x, $y \in \mathbb{R}^n$. (Dica: Derive em t dos dois lados)

Resolução:

Derivando em t dos dois lados obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(tf\left(x\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(f\left(tx\right)\right).$$

Usando a regra da cadeia, concluímos que

$$f\left(x\right) = df\left(tx\right)\left(x\right).$$

Vemos que a relação acima vale para todo $t>0$. Como f é uma função de classe C^1, concluímos que df é contínua. Logo, podemos tomar o limite para t tendendo a zero e obter a relação

$$f\left(x\right) = \lim_{t\to 0}\left(df\left(tx\right)\left(x\right)\right) = df\left(0\right)\left(x\right).$$

Como $df(0):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um operador linear, concluímos que f também é, pois

$$f(\alpha x + \beta y) = df\left(0\right)\left(\alpha x + \beta y\right) = \alpha df\left(0\right)\left(x\right) + \beta df\left(0\right)\left(y\right) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

(1,0 ponto) b) Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^4+y^4}, \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \ (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Ela é diferenciável em $(0,0)$?

Resolução:

Não. A função não é diferenciável em $(0,0)$.

Vamos observar inicialmente que existe derivada parcial $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(0,0)$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$. De fato, se $v = (v_1, v_2)$, então

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(0,0) := \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(tv_1, tv_2) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^5 v_1^3 v_2^2}{t^4(v_1^4+v_2^4)}}{t} = \frac{v_1^3v_2^2}{v_1^4+v_2^4}.$$

Se φ fosse diferenciável, então teríamos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(0,0) = \langle \nabla\varphi(0,0), (v_1,v_2)\rangle, \ \ \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

Seja $v = (1,1)$. Logo, temos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(0,0) = \frac{1}{2},$$

mas

$$\langle \nabla\varphi(0,0), (v_1,v_2)\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0) \right), (v_1,v_2) \right\rangle = \langle (0,0), (v_1,v_2)\rangle = 0.$$

Desta maneira, como $\frac{1}{2} \neq 0$, concluímos que φ não é diferenciável.

(1,5 ponto) c) Seja $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$ e $H := \{x \in \mathbb{R}^n; \ \langle b, x\rangle = c\}$. Mostre que o ponto de H mais próximo ao ponto a é o ponto $x = a + \frac{c - \langle b, a\rangle}{\|b\|^2} b$. (Dica: Use método dos multiplicadores de Lagrange)

Resolução:

Queremos achar o ponto $x \in H$ que minimiza a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x-a\|^2$. Logo, x deve satisfazer a condição $\varphi(x) = c$, em que $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada por $\varphi(x) = \langle b, x\rangle$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, podemos achar o ponto crítico de f em H achando o ponto que satisfaz:

$$\begin{cases} \varphi(x) = c \\ \nabla f(x) = \lambda \nabla\varphi(x) \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \langle b, x\rangle = c \\ 2(x-a) = \lambda b \end{cases}.$$

Pela segunda equação, concluímos, tomando o produto interno com b, que

$$2(\langle x, b\rangle - \langle a, b\rangle) = \lambda \|b\|^2.$$

Usando que $\langle b, x\rangle = c$, concluímos que $\lambda = \frac{2(c - \langle a, b\rangle)}{\|b\|^2}$. Desta maneira, usando que $2(x-a) = \lambda b$ e substituindo λ acima, concluímos que

$$x = a + \frac{\lambda}{2} b = a + \frac{c - \langle a, b\rangle}{\|b\|^2} b.$$

Exercício 3 (Matéria da Terceira Prova)

(1,5 ponto) a) Seja $A : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funções diferenciáveis. Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função $\varphi(x) := \langle A(x)(f(x)), g(x)\rangle$. Para $h \in \mathbb{R}^n$, calcule $d\varphi(x)(h)$. (Observe que φ é composição das funções $x \to (A(x), f(x), g(x)) \mapsto \langle A(x)(f(x)), g(x)\rangle$).

Resolução:

Seja $S : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dada por $S(x) = (A(x), f(x), g(x))$ e $T : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $T(A, x, y) = \langle A(x), y\rangle$. Logo $\varphi(x) = T \circ S(x)$. Portanto, pela regra da cadeia, e usando que T é uma função trilinear, obtemos que

$$d\varphi(x)(h) = dT(S(x))dS(x)(h) = dT(A(x), f(x), g(x))(dA(x)(h), df(x)(h), dg(x)(h)) =$$
$$T(dA(x)(h), f(x), g(x)) + T(A(x), df(x)(h), g(x)) + T(A(x), f(x), dg(x)(h)) =$$
$$\langle dA(x)(h)(f(x)), g(x)\rangle + \langle A(x)(df(x)(h)), g(x)\rangle + \langle A(x)(f(x)), dg(x)(h)\rangle.$$

(1,0 ponto) b) Seja $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ a função $\pi(x,y) = x$. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é aberto, então $\pi(A) := \{y \in \mathbb{R}^m; \ \exists x \in A \text{ tal que } y = \pi(x)\}$ é um conjunto aberto.

Resolução:

Para facilitar, vamos usar a norma do máximo para os espaços $\mathbb{R}^p$, em que $p \in \mathbb{N}$. Lembramos que esta norma é dada por

$$\|x\| := \max\{|x_j|, \ 1 \leq j \leq p\},$$

para $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$.

Seja $y \in \pi(A)$. Logo existe $x \in A$ tal que $\pi(x) = y$. Vamos escrever x como $x = (y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Como A é um aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset A$. Como estamos usando a norma do máximo, vemos que o conjunto $B_\epsilon(x)$ pode ser escrito como $B_\epsilon(x) = B_\epsilon^m(y) \times B_\epsilon^n(z) \subset A$, em que $B_\epsilon^m(y)$ é a bola aberta em $\mathbb{R}^m$ com centro em y e raio ϵ e $B_\epsilon^n(z)$ é a bola aberta em $\mathbb{R}^n$ com centro em z e raio ϵ. Logo $\pi(A) \supset \pi\left(B_\epsilon(x)\right) = \pi\left(B_\epsilon^m(y) \times B_\epsilon^n(z)\right) = B_\epsilon^m(y)$. Logo existe uma bola aberta contida em $\pi(A)$ e de centro y, para todo $y \in \pi(A)$. Portanto, $\pi(A)$ é um conjunto aberto (pela definição de abertos em um espaço métrico).

(1,0 ponto) c) Mostre que se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ é uma submersão de classe C^1, então f leva conjuntos abertos de $\mathbb{R}^{m+n}$ em conjuntos abertos de $\mathbb{R}^m$.

Resolução:

Seja $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto. Para facilitar, vamos denotar os elementos de $\mathbb{R}^{m+n}$ por (x_1, x_2), em que $x_1 \in \mathbb{R}^m$ e $x_2 \in \mathbb{R}^n$. Como $df(x) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ é sobrejetor para todo $x \in \Omega$, concluímos, usando a forma local das submersões, que para todo $x \in A$, existem abertos U_x e V_x de $\mathbb{R}^{m+n}$, com $x \in U_x \subset A$, e um difeomorfismo $h : V_x \to U_x$ tal que

$$f \circ h(x_1, x_2) = \pi\left(x_1, x_2\right) = x_1,\ \forall (x_1, x_2) \in V_x,$$

em que $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é dado por $\pi(x_1, x_2) = x_1$.

Assim, $f\left(U_x\right) = f \circ h \circ h^{-1}\left(U_x\right) = \pi\left(h^{-1}\left(U_x\right)\right)$, para todo $x \in A$.

Como h é contínua, então $h^{-1}(U_x)$ é um aberto. Sabemos que π leva aberto em aberto pelo item b). Logo $f(U_x) = f \circ h\left(h^{-1}(U_x)\right) = \pi\left(h^{-1}(U_x)\right)$ é um conjunto aberto.

Por fim, observamos que

$$f(A) = f\left(\cup_{x \in A} U_x\right) = \cup_{x \in A} f\left(U_x\right) = \cup_{x \in A} \pi\left(h^{-1}(U_x)\right).$$

Assim, $f(A)$ é igual a união de abertos. Logo é um conjunto aberto.

Formulário.

Definição 1. *Sejam* (M,d) *e* $\left(N,\tilde{d}\right)$ *espaços métricos. Uma função* $f : M \to N$ *é contínua em* $x_0 \in M$ *se dado* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que se* $d(x,x_0) < \delta$, *então* $\tilde{d}(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. *Dizemos que* f *é contínua, se for contínua em todo ponto de* M.

Definição 2. *Sejam* (M,d) *e* $\left(N,\tilde{d}\right)$ *espaços métricos. Dizemos que* M *e* N *são homeomorfos se existe uma função* $h : M \to N$ *tal que:*

1) f *é uma bijeção.*

2) f *e* f^{-1} *são contínuas.*

Proposição 1. *Sejam* (M,d) *e* $\left(N,\tilde{d}\right)$ *espaços métricos e* $f : M \to N$ *uma função contínua.*

1) Se M *é compacto, então* $f(M)$ *também é compacto.*

2) Se M *é conexo, então* $f(M)$ *também é conexo.*

Definição 3. *Seja* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *uma função definida num aberto* Ω. *Dizemos que* f *é diferenciável em* $x_0 \in \Omega$ *se existe uma transformação linear* $df(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$r_{x_0}(h) := f(x_0 + h) - f(x_0) - df(x_0)(h)$$

satisfaz $\lim_{h\to 0} \frac{r_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$. *Dizemos que* f *é diferenciável se* f *for diferenciável para todo* $x \in \Omega$. *A matriz que representa* $df(x_0)$ *nas bases canônicas é a matriz Jacobiana* $Jf(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i=1,\ldots,n,\, j=1,\ldots,m}$.

Proposição 2. *Sejam* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *uma função diferenciável em* $x_0 \in \Omega$ *e* $g : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *uma função diferenciável em* $f(x_0)$ *tal que* $f(\Omega) \subset \tilde{\Omega}$. *Logo* $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *é uma função diferenciável em* x_0 *e*

$$d\left(g \circ f\right)(x_0)(h) = dg(f(x_0))df(x_0)(h), \quad \forall h \in \mathbb{R}^m.$$

Teorema 1. *(Multiplicadores de Lagrange) Seja* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *e* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *funções diferenciáveis, em que* Ω *é um aberto de* $\mathbb{R}^n$. *Seja* c *um valor regular de* φ, *ou seja, um ponto da imagem de* φ *tal que para todo* $x \in \Omega$ *que satisfaz* $\varphi(x) = c$, *temos* $d\varphi(x) \neq 0$. *Seja* M *a hiperfície* $\varphi^{-1}(c)$. *Logo* $x \in \Omega$ *é um ponto crítico de* $f|_M$ *se, e somente se, existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi(x) = c \\ \nabla f(x) = \lambda \nabla \varphi(x) \end{array} \right. .$$

Lembrando que se x *é um ponto de máximo ou mínimo local de* f *em* M, *então* x *é um ponto crítico de* f *em* M, *ou seja,* $df(x)|_{T_xM} = 0$, *em que* $T_xM := \{\gamma'(0),\ \gamma :]-\delta, \delta[\to M \text{ diferenciável e } \gamma(0) = x\}$.

Definição 4. *Seja* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *uma função definida num aberto* Ω. *Dizemos que* f *é uma submersão se* $df(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *for sobrejetora para todo* $x \in \Omega$.

Teorema 2. *(Forma Local das Submersões) Seja* $f = (f_1, ..., f_n) : \Omega \overset{aberto}{\subset} \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ *uma aplicação de classe* C^k, $k \geq 1$. *Suponha que* f *é uma submersão. Logo para cada ponto* $z \in \Omega$ *existe um aberto* $Z \subset \Omega$ *contendo* z, *um aberto* $W \subset \mathbb{R}^n$ *contendo* $c = f(z)$, *um aberto* $V \subset \mathbb{R}^m$ *e um difeomorfismo* $h : V \times W \to Z$ *de classe* C^k *tais que* $f\left(h(x,w)\right) = w$ *para todo* $x \in V$ *e todo* $w \in W$.