GABARITO PROVA 3

Exercício 1

a)

Como f é multilinear, vale a seguinte regra de derivação vista em sala de aula

$$df\left(A_1,...,A_k\right)\left(H_1,...,H_k\right)=$$

$$f\left(H_1,A_2,A_3,...,A_k\right)+f\left(A_1,H_2,A_3,...,A_k\right)+f\left(A_1,A_2,H_3,...,A_k\right)+...+f\left(A_1,A_2,A_3,...,H_k\right).$$

Logo

$$df\left(A_1,...,A_k\right)\left(H_1,...,H_k\right)=$$

$$H_1A_2A_3...A_k+A_1H_2A_3...A_k+A_1A_2H_3...A_k+...+A_1A_2A_3...A_{k-1}H_k.$$

b) Observamos que g é composição das seguintes funções

$$X\overset{T}{\mapsto}(X,...,X)\overset{f}{\mapsto}X^k,$$

em que f é a função do item a). Como T é linear, temos $dT(X)=T$. Logo

$$dg(X)(H)=df(T(X))dT(X)(H)=df(X,X,...,X)T(H)=$$

$$df(X,X,...,X)\left(H,...,H\right)=HX^{k-1}+XHX^{k-2}+X^2HX^{k-3}+...+X^{k-1}H=\sum_{j=1}^{k}X^{j-1}HX^{k-j}.$$

Convencionamos $X^0=I$.

No caso em que $X=I$, temos $dg(I)(H)=kH$. Logo é um isomorfismo com inversa dada pela função $S:M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$ definida como

$$S(H)=\frac{1}{k}H.$$

c) Sabemos que g é uma função de classe C^∞, pois é composta de uma função linear e uma multilinear. Logo é composta de funções C^∞. Como $g(I)=I^k=I$ e como $dg(I)$ é um isomorfismo, concluímos, pelo Teorema da função inversa, que existem abertos $\tilde{\Omega}$ e Ω que contém I e $g(I)=I$, respectivamente, tais que $g:\tilde{\Omega}\to\Omega$ é um difeomorfismo. Seja $h:\Omega\to\tilde{\Omega}$ dada por $h=\left(g|_{\tilde{\Omega}}\right)^{-1}$. Logo h é diferenciável e dada $A\in\Omega$, $h(A)$ é a única matriz em $\tilde{\Omega}$ tal que

$$g(h(A))=A,$$

ou seja, tal que

$$h(A)^k=A.$$

Exercício 2

a) Vemos que $F=T\circ S$. Logo

$$dF(x,y,z)(u,v,w)=dT(S(x,y,z))dS(x,y,z)(u,v,w)=$$

$$dT(A(x),f(y),g(z))\left(dA(x)u,df(y)v,dg(z)w\right)=$$

$$T(dA(x)u,f(y),g(z))+T(A(x),df(y)v,g(z))+T(A(x),f(y),dg(z)w)=$$

$$\left\langle\left(dA(x)u\right)\left(f(y)\right),g(z)\right\rangle+\left\langle A(x)\left(df(y)v\right),g(z)\right\rangle+\left\langle A(x)\left(f(y)\right),dg(z)w\right\rangle.$$

b) Basta observar que F é composição das funções abaixo

$$x\overset{S}{\mapsto}(f(x),f(x))\overset{B}{\mapsto}\langle f(x),f(x)\rangle,$$

em que $S(x)=(f(x),f(x))$ e $B(u,v)=\langle u,v\rangle$ (Note que B é bilinear). Logo

$$dF(x)(h)=dB(S(x))dS(x)(h)=dB(f(x),f(x))\left(df(x)(h),df(x)(h)\right)=$$

$$B(df(x)(h),f(x))+B(f(x),df(x)(h))=$$

$$\langle df(x)(h),f(x)\rangle+\langle f(x),df(x)(h)\rangle=2\langle df(x)(h),f(x)\rangle.$$

Observamos que se $dF(x_0) = 0$, então $\langle df(x_0)(h), f(x_0)\rangle = 0$, para todo $h \in \mathbb{R}^m$. Suponha que $dF(x_0) = 0$ e que $df(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ seja sobrejetora. Logo, existe $h \in \mathbb{R}^m$ tal que $df(x_0)(h) = f(x_0)$. Assim

$$0 = dF(x_0)(h) = 2\langle df(x_0)(h), f(x_0)\rangle = 2\|f(x_0)\|^2,$$

ou seja, $f(x_0) = 0$. Assim, se $dF(x_0) = 0$ e $f(x_0) \neq 0$, então $df(x_0)$ não é sobrejetora.

c) Seja $x \in f^{-1}(c)$. Logo $df(x)$ é sobrejetora, pois c é um valor regular, e $dF(x) = 0$, pois $F(x) = \|c\|^2$ é o mínimo de F. Assim, pelo item b), devemos ter $f(x) = 0$, ou seja, $c = f(x) = 0$.

Exercício 3

a) Suponha que $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$ para todo $x, y \in \Omega$. Logo, para todo $x \in \Omega$ e $v \in \mathbb{R}^m$, temos

$$\|df(x)(v)\| = \left\|\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv) - f(x)}{t}\right\| = \lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(x+tv) - f(x)}{t}\right\| \leq$$

$$\limsup_{t\to 0}\frac{\|f(x+tv) - f(x)\|}{t} \leq \limsup_{t\to 0}\frac{Mt\|v\|}{t} = M\|v\|.$$

Assim, $\|df(x)\| \leq M$.

Por outro lado, se $\|df(x)\| \leq M$ para todo $x \in \Omega$, então, usando o Teorema do valor Médio, concluímos que

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \sup_{t\in[0,1]}\|df(x + t(y-x))\|\,\|y - x\| \leq M\|y - x\|.$$

b) Vamos mostrar que f é diferenciável e que $df(x) = 0$ para todo x. Como Ω é conexo, isto implica que f é constante. Seja $x \in \Omega$ e $v \in \mathbb{R}^m$. Logo

$$df(x)(v) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

Mas

$$\left\|\frac{f(x+tv) - f(x)}{t}\right\| = \frac{\|f(x+tv) - f(x)\|}{t} \leq \frac{t^2\|v\|^2}{t} = t\|v\|^2.$$

Logo

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(x+tv) - f(x)}{t}\right\| = \lim_{t\to 0} t\|v\|^2 = 0 \implies df(x)(v) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = 0.$$

Exercício 4

a) Seja $x_0 \in \Omega$. Pela Teorema da forma local das imersões, existe um difeomorfismo $h : Z \subset \mathbb{R}^n \to V \times W \subset \mathbb{R}^n$, em que $(x_0, 0) \in V \times W$ e $f(x_0) \in Z$ tal que

$$h \circ f(x) = (x, 0),\ \forall x \in V.$$

Assim, seja x e $y \in V$ tais que $f(x) = f(y)$. Logo

$$h \circ f(x) = h \circ f(y) \implies (x, 0) = (y, 0) \implies x = y.$$

Desta maneira, $f|_V : V \to \mathbb{R}^n$ é uma função injetora.

b) Seja $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(x) = (x, f(x))$. Vemos assim que

$$\varphi(\Omega) = \{(x, f(x)),\, x \in \Omega\} = graf(f).$$

Basta agora mostrar que φ é uma parametrização.

1) φ é uma imersão.

De fato, $d\varphi(x)(h) = (h, df(x)(h)) = (0, 0)$ implica que $h = 0$. Logo $d\varphi(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetora.

2) φ é injetora. Portanto $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ é uma bijeção.

De fato, se $\varphi(x) = \varphi(y)$, então $(x, f(x)) = (y, f(y))$. Logo $x = y$.

3) $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ é um homeomorfismo.

De fato, seja $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dado por $\pi(x, y) = x$. Logo

$$\pi \circ \varphi(x) = \pi(x, f(x)) = x \ \text{ e } \ \varphi \circ \pi(x, f(x)) = \varphi(x) = (x, f(x)).$$

Logo $\varphi^{-1} = \pi|_{\varphi(\Omega)}$, ou seja, φ^{-1} é igual a restrição de uma função contínua. Logo é uma função contínua. Assim, $\varphi; \Omega \to \varphi(\Omega)$ é um homeomorfismo.