GABARITO PROVA 2

Exercício 1

a) Seja $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$. Logo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{(tv_1)^3(tv_2)^2}{(tv_1)^4+(tv_2)^4}-0}{t}\right)=$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{t^5v_1^3v_2^2}{t^4v_1^4+t^4v_2^4}-0}{t}\right)=\frac{v_1^3v_2^2}{v_1^4+v_2^4}.$$

Assim, vemos que $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ existe, pois os limites acima existem, e é igual a $\frac{v_1^3v_2^2}{v_1^4+v_2^4}$.

b) Não. Ela não é sempre válida.

Tomando $v=(1,0)$ ou $v=(0,1)$, concluímos, usando o item a), que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)=0$. Consideremos $v=(1,1)$. Logo pelo item a), temos

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\frac{1}{2},$$

mas

$$\langle\nabla f(0,0),(1,1)\rangle=\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)1=0.$$

Logo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\frac{1}{2}\neq 0=\langle\nabla f(0,0),(v_1,v_2)\rangle.$$

c) Não. A função f não é diferenciável em $(0,0)$. Se fosse, valeria $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=df(0,0)(v)=\langle\nabla f(0,0),v\rangle$ para todo $v\in\mathbb{R}^2$.

Exercício 2

a) Sabemos que $\overline{B_1(0)}$ é um compacto. Logo $f|_{\overline{B_1(0)}}:\overline{B_1(0)}\to\mathbb{R}$ assume valores máximos e mínimos. Suponha que ou o máximo ou o mínimo é atingido em $B_1(0)$. Como $B_1(0)$ é um aberto e f é uma função diferenciável, concluímos que este máximo ou mínimo é um ponto crítico.

Vamos supor que o ponto de máximo e de mínimo estejam ambos em $\overline{B_1(0)}\backslash B_1(0)$. Logo, como a função assume apenas o valor zero nesta região, concluímos que o máximo e o mínimo de f é igual a zero. Portanto, f é igual a zero em todo $\overline{B_1(0)}$. Desta forma, $df=0$, pois f é uma função constante. Logo todo ponto de $B_1(0)$ é um ponto crítico. Desta maneira, f sempre tem pontos críticos em $B_1(0)$.

b) Basta observar que

$$d^4f(x)(v)=\sum_{i,j,k,l}\frac{\partial^4 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_l\partial x_k}(x)v_iv_jv_kv_l=\|v\|^4\sum_{i,j,k,l}\frac{\partial^4 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_l\partial x_k}(x)\frac{v_i}{\|v\|}\frac{v_j}{\|v\|}\frac{v_k}{\|v\|}\frac{v_l}{\|v\|}=\|v\|^4d^4f(x)\left(\frac{v}{\|v\|}\right).$$

Como $df(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ é contínuo, concluímos que $df(x)|_{S^{n-1}}$ também é uma função contínua. Logo assume máximo e mínimo, já que S^{n-1} é compacto. Seja $\tilde{c}=\min\left\{\|df(x)(v)\|,\, v\in S^{n-1}\right\}$. Logo $\tilde{c}>0$, já que $df(x)(v)\neq 0$ se $v\neq 0$. Seja $c>0$ tal que $c<\tilde{c}$. Logo

$$d^4f(x)(v)=\|v\|^4d^4f(x)\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\geq\tilde{c}\|v\|^4>c\|v\|^4.$$

c) Neste caso, 0 é um ponto de mínimo local estrito de f. Pela fórmula de Taylor, temos

$$f(x)=f(0)+df(0)(x)+\frac{1}{2!}d^2f(0)(x)+\frac{1}{3!}d^3f(0)(x)+\frac{1}{4!}d^4f(0)(x)+r(x),\quad \lim_{x\to 0}\frac{r_j(x)}{\|x\|^4}=0.$$

Pelas nossas hipóteses temos $f(0) = df(0)(x) = \frac{1}{2!}df(0)(x) = \frac{1}{3!}df(0)(x) = 0$ para todo x. Seja $\delta > 0$ tal que se $\|x\| < \delta$, então $\frac{r_j(x)}{\|x\|^4} < \frac{c}{2\times 4!}$, em que c é a constante do item b). Logo se $\|x\| < \delta$, temos

$$f(x) = \frac{1}{4!}df(0)(x) + r(x) \geq \frac{1}{4!}c\,\|x\|^4 + r(x) \geq$$
$$\|x\|^4\left(\frac{1}{4!}c + \frac{r(x)}{\|x\|^4}\right) > \|x\|^4\left(\frac{1}{4!}c - \frac{c}{2\times 4!}\right) = \frac{1}{2}\frac{c}{4!}\,\|x\|^4.$$

Logo $f(x) > f(0) = 0$ se $x \in B_\delta(0)\setminus\{0\}$. Portanto, 0 é um ponto de mínimo local estrito.

Exercício 3

a) Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $\varphi(x) = \|x\|^2$. Logo $S^2 = \varphi^{-1}(1)$. Como $\nabla\varphi(x) = 2x$, concluímos que $\nabla\varphi(x) \neq 0$ se $x \in S^2$. Logo 1 é um valor regular e S^2 é uma hiperfície. Para achar o mínimo e máximo de f em S^2, usaremos o método dos multiplicadores de Lagrange. Devemos resolver as equações abaixo:

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 \\ \nabla f(x) = \lambda\nabla\varphi(x) \end{cases} \iff \begin{cases} \|x\|^2 = 1 \\ (1,1,1) = 2\lambda\,(x,y,z) \end{cases}.$$

Assim

$$x = y = z = \frac{1}{2\lambda} \text{ e } 3\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1 \implies \frac{1}{2\lambda} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \implies \lambda = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Os pontos críticos são $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Devem corresponder, assim, ao máximo e ao mínimo de f em S^2. Os valores máximo e o mínimo de $f|_{S^2}$ são, portanto, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$.

b) Novamente usamos os multiplicadores de Lagrange para concluir que, se (x,y,z) é um máximo ou mínimo de f em S^2, então também é um ponto crítico de f em S^2. Deve satisfazer, assim, (usando a mesma função φ anterior)

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 \\ \nabla f(x) = \lambda\nabla\varphi(x) \end{cases} \iff \begin{cases} \|x\|^2 = 1 \\ 2ax + 2by + 2cz = 2\lambda x \\ 2by + 2ey + 2fz = 2\lambda y \\ 2cx + 2fy + 2gz = 2\lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} \|x\|^2 = 1 \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Concluímos, assim, que os pontos de máximo e mínimo de f em S^2 são autovetores da matriz $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & g \end{pmatrix}$ de norma 1.

Exercício 4

a) Vamos estudar a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(y) = y\left(1 + y^6\right)$. Observemos que $\frac{dh}{dy}(y) = 1 + 7y^6 > 0$. Logo h é estritamente crescente e, portanto, injetora. Além disso, $\lim_{y\to\pm\infty} h(y) = \pm\infty$. Logo h é sobrejetora, já que $h(\mathbb{R})$ é um conexo que contém valores arbitrariamente grandes e pequenos. Concluímos que h é bijetora. Logo, dado $x \in \mathbb{R}^n$, deve existir um, e somente um, $y \in \mathbb{R}$ tal que $h(y) = g(x)$. Ele será dado por $y = h^{-1}(g(x))$. Isto implica que existe um, e somente um, $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$h(y) - g(x) = 0 \iff y\left(1 + y^6\right) - g(x) = 0 \iff F(x,y) = 0.$$

b) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = h^{-1}\circ g(x)$. Logo $f(x)$ é o único valor para o qual $h(f(x)) = g(x)$, ou seja, para o qual $F(x, f(x)) = 0$. Lembremos que $F(x,y) = h(y) - g(x)$.

Vamos mostrar que f é de classe C^1.

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Logo $F(x_0, f(x_0)) = 0$. Sabemos que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, f(x_0)) = 1 + 7f(x_0)^6 \neq 0$. Logo, como g e h são funções de classe C^1, então F também é de classe C^1. Concluímos, pelo Teorema da função implícita, que existe um aberto Z que contém $(x_0, f(x_0))$ e uma função $\xi : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que (

$$(x,y) \in Z \text{ e } F(x,y) = 0 \iff y = \xi(x).$$

Ou seja, $F(x, \xi(x)) = 0$. Porém, da unicidade do exercício a), concluímos que $\xi = f$. Portanto, f é de classe C^1 num aberto que contém x_0. Como x_0 é arbitrário e diferenciabilidade é uma propriedade local, concluímos que f é uma função de classe C^1.