GABARITO PROVA 1

Exercício 1

a) A função é uma métrica:

1) Se $x \neq y$, então $d(x,y) > 1$ e se $x = y$, então $d(x,y) = 0$. Logo $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

2) Seja x e $y \in M$. Logo

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ se } x = y \\ 1 + |x-y|, \text{ se } x \neq y \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{ se } x = y \\ 1 + |y-x|, \text{ se } x \neq y \end{cases} = d(y,x).$$

3) Sejam $x, y, z \in M$. Vamos provar que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Se $x = y = z$, então $d(x,y) = 0 = 0 + 0 = d(x,z) + d(z,y)$.

Se $x = y$ e $y \neq z$, então $d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z,y) = 1 + |x-z| + 1 + |z-y|$.

Se $x \neq y$ e $y = z$, então $d(x,y) = 1 + |x-y| = 1 + |x-z| + 0 = d(x,z) + d(z,y)$.

Se $x \neq y$ e $y \neq z$, então $d(x,y) = 1 + |x-y| \leq 1 + |x-z| + |z-y| \leq 1 + |x-z| + 1 + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$.

b)

1) Seja $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Logo $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, mas $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq f(0)$. Logo f não é contínua na métrica usual de $\mathbb{R}$.

2) Se o domínio tem a métrica dada acima, então f é contínua. De fato, seja $A \subset \mathbb{R}$ um aberto na métrica usual e $t \in f^{-1}(A)$. Logo se $d(s,t) < 1$, então $s = t \in f^{-1}(A)$. Concluímos que $B_1(t) \subset f^{-1}(A)$. Portanto, $f^{-1}(A)$ é um aberto.

Exercício 2

a) Seja $(x_n)_n$, $x_n \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, uma sequência convergente em K. Seja $x \in K$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Logo $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, pois f é contínua. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n, f(x_n)) = (x, f(x)) = \varphi(x).$$

Logo, pelo critério de continuidade usando sequências, concluímos que φ é uma função contínua.

b) Basta observar que $graf(f) = \varphi(K)$, ou seja, é a imagem do conjunto K pela função φ. Como φ é contínua, ela leva compacto em compacto e conexo em conexo. Assim $\varphi(K)$ é compacto e conexo. O mesmo, portanto, é verdade para $graf(f)$.

c) Seja $p \in Im(f)$. Como $\{p\}$ é um conjunto fechado e f é uma função contínua, concluímos que $f^{-1}(p) = f^{-1}(\{p\})$ é um conjunto fechado. Mas $f^{-1}(p) \subset K$. Como K é compacto e $f^{-1}(p)$ é fechado, concluímos que $f^{-1}(p)$ é compacto. Suponha que haja um homeomorfismo entre $f^{-1}(p)$ e $\mathbb{R}^n$ dado por $h : f^{-1}(p) \to \mathbb{R}^n$. Logo $\mathbb{R}^n = h(f^{-1}(p))$, ou seja, é igual a imagem de um compacto por uma função contínua. Concluímos, assim, que $\mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto, o que claramente é falso (porque $\mathbb{R}^n$ sequer é limitado).

Exercício 3

a) Vamos mostrar que $\overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{X \cup Y}$.

$\overline{X} \cup \overline{Y} \subset \overline{X \cup Y}$

Sabemos que $X \subset X \cup Y$. Logo $\overline{X} \subset \overline{X \cup Y}$, já que $\overline{X \cup Y}$ é um fechado que contém $X \cup Y$ e, portanto, X. Pelo mesmo argumento, $\overline{Y} \subset \overline{X \cup Y}$. Logo $\overline{X} \cup \overline{Y} \subset \overline{X \cup Y}$.

$\overline{X} \cup \overline{Y} \supset \overline{X \cup Y}$

Seja $z \in \overline{X \cup Y}$. Se $z \notin \overline{X}$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $d(z, X) > \epsilon > 0$. Assim, $B_\epsilon(z) \cap X = \emptyset$. Mas, para toda bola $B_r(z)$, com $r > 0$, temos $B_r(z) \cap (X \cup Y) \neq \emptyset$. Logo devemos ter $B_r(z) \cap Y \neq \emptyset$, sempre que $r < \epsilon$. Como bolas de raio maior contêm bolas de raio menor, isto implica que $B_r(z) \cap Y \neq \emptyset$ para todo $r > 0$. Desta maneira, $z \in \overline{Y}$. Logo $z \in \overline{X} \cup \overline{Y}$. Da mesma maneira, se $z \in \overline{X \cup Y}$ mas $z \notin \overline{Y}$, então $z \in \overline{X} \subset \overline{X} \cup \overline{Y}$. Concluímos que sempre temos $\overline{X \cup Y} \subset \overline{X} \cup \overline{Y}$.

Vamos mostrar agora que $int(X) \cap int(Y) = int(X \cap Y)$.

$int(X) \cap int(Y) \subset int(X \cap Y)$

Se $x \in int(X) \cap int(Y)$, então existe $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tais que $B_{r_1}(x) \subset X$ e $B_{r_2}(x) \subset Y$. Seja $r := \min\{r_1, r_2\}$. Logo $B_r(x) \subset X \cap Y$ e, portanto, $x \in int(X \cap Y)$.

$int(X) \cap int(Y) \supset int(X \cap Y)$

Se $x \in int(X \cap Y)$, então existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset X \cap Y$. Logo $B_r(x) \subset X$ e $B_r(x) \subset Y$. Portanto, $x \in int(X) \cap int(Y)$.

b) Se X e Y são conexos, então $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ também são conexos, pois o fecho de um conjunto conexo é conexo. Como $\overline{X} \cap \overline{Y} \supset X \cap Y \neq \emptyset$, concluímos que $\overline{X} \cup \overline{Y}$ é um conjunto conexo, pois é união de conexos com intersecção não vazia. Logo $M = \overline{X} \cup \overline{Y}$ é um conjunto conexo. Como $f : M \to \mathbb{Q}$ é contínua, então $f(M)$ é um conjunto conexo de $\mathbb{Q}$, pois funções contínuas levam conexos em conexos. Assim, $f(M)$ é um conexo de $\mathbb{Q}$. Porém todo conexo de $\mathbb{Q}$ consiste de apenas um elemento (foi dado em aula, ver Elon em caso de dúvida). Logo $f(M) = \{p\}$ para um certo $p \in \mathbb{Q}$. Assim f é uma função constante igual a p.

Exercício 4

a) Seja $z \in X$. Logo

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z).$$

Assim,

$$d(y, X) \leq d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z).$$

Tomando o ínfimo em z do lado direito, concluímos que

$$d(y, X) \leq d(y, x) + d(x, X) \implies d(y, X) - d(x, X) \leq d(y, x)$$

Fazendo o mesmo argumento, trocando x por y, concluímos que

$$d(x, X) - d(y, X) \leq d(x, y).$$

Assim,

$$|d(x, X) - d(y, X)| \leq d(x, y) < \epsilon.$$

b) Usando o item a), concluímos que a função $f : M \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, X)$ é contínua. De fato, dado $x_0 \in M$ e $\epsilon > 0$. Logo existe $\delta = \epsilon$ tal que se $d(x, x_0) < \delta = \epsilon$, então $|f(x) - f(x_0)| = |d(x, X) - d(x_0, X)| < \epsilon$.

Como f é contínua, então f leva conexo em conexo. Assim, $f(C)$ é um conexo. Seja $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\inf\{d(y, X), y \in C\} < t < \sup\{d(y, X), y \in C\}.$$

Pela definição de ínfimo e supremo, existe $c_1, c_2 \in C$ tais que

$$\inf\{d(y, X), y \in C\} < d(c_1, X) = f(c_1) < t < f(c_2) = d(c_2, X) < \sup\{d(y, X), y \in C\}.$$

Como $f(C)$ é conexo, $f(c_1)$ e $f(c_2) \in f(C)$, concluímos que $[f(c_1), f(c_2)] \subset f(C)$. Assim $t \in [f(c_1), f(c_2)] \subset f(C)$, ou seja, $t = f(x_0)$, para algum $x_0 \in C$. Obtemos, assim, que

$$t = f(x_0) = d(x_0, X).$$