MAP0217 – CÁLCULO DIFERENCIAL
MAT0311 – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL V

Exercícios da sétima quinzena

☞ Soluções ☜

Problema 1

item i) (25 pontos)

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \left(x^3, y^3\right) .$$

Veja que f é um homeomorfismo. De fato, f é contínua e, se

$$g(x,y) = \left(x^{\frac{1}{3}}, y^{\frac{1}{3}}\right) ,$$

então g é uma inversa contínua para f. Em paricular, f é aplicação aberta. Porém, f não é submersão, pois

$$\mathrm{d}f(1,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

não é de posto máximo.

item ii) (25 pontos)

Seja f como no item i). Então f é injetiva, pois é homeomorfismo, mas não é imersão, pois $\mathrm{d}f(1,0)$ não é injetiva.

item iii) (50 pontos)

Note que se f é uma imersão, necessariamente $n \geq m$. Assim, escrevendo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+p}$, a forma local das imersões nos diz que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existem conjuntos abertos $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ contendo a, $W \subseteq \mathbb{R}^p$ contendo 0 e $Z \subseteq \mathbb{R}^{m+p}$ contendo $f(a)$ e um difeomorfismo $\Phi : Z \to V \times W$ de calsse C^1 tais que:

$$\Phi \circ f = \iota \text{ em } U.$$

Aqui, $\iota : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+p}$ é a inclusão $\iota(x) = (x,0)$. Assim, em particular,

$$f|_U = \iota \circ \Phi^{-1}$$

é injetiva, pois escreve-se como composição de aplicações injetivas.

Problema 2

item i) (40 pontos)

Para que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ seja submersão, é preciso que sua derivada seja uma aplicação linear sobrejetiva. Tendo em vista o teorema do núcleo-imagem, isso só é possível se $m \leq n$. Por outro lado, a fim de que f seja imersão, é preciso que sua derivada seja uma aplicação linear injetiva. Isso só é possível se $m \geq n$. Em particular, se $m < n$ a função f pode ser submersão mas não pode ser imersão.

item ii) (60 pontos)

Seja $p \leq m < n$ o posto constante de f. Se $k = n - p > 0$ e $\ell = m - p \geq 0$, consideramos f como uma função $f : \mathbb{R}^{p+k} \to \mathbb{R}^{p+\ell}$. Então, fixado $a \in \mathbb{R}^n$ existem vizinhanças V de a, W de $f(a)$ e difeomorfismos $\alpha : U \subseteq \mathbb{R}^n \to V$, $\beta : W \to Z \subseteq \mathbb{R}^m$ tais que

$$\beta \circ f \circ \alpha(x, y) = (x, 0) \text{ em } V. \tag{1}$$

Assim, se f fosse injetiva, a aplicação $\pi : (x, y) \to (x, 0)$ seria injetiva em V, uma vez que seria escrita como composição de aplicações injetivas. Mas. se $(x, y) \in V$ e $\varepsilon > 0$ é escolhido suficientemente pequeno de forma que $(x, y+\varepsilon), (x, y-\varepsilon) \in V$, vemos que π não é injetiva em V. Logo, f não pode ser injetiva. Note que esse argumento só faz sentido porque $n - p > 0$. Caso $m = n = p$, (1) na realidade recairia no teorema da função inversa e não concluiríamos nada.

Problema 3

item i) (50 pontos)

Temos:

$$\mathrm{d}f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & \ldots & 2x_n \\ 2x_1 & -2x_2 & \ldots & -2x_n \end{pmatrix}.$$

Veja que:

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{vmatrix} = -8x_1x_2 \qquad \ldots \qquad \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_n \\ 2x_1 & -2x_n \end{vmatrix} = -8x_1x_n$$

e todos os demais menores se anulam, pois são da forma:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -a & -b \end{vmatrix}.$$

Vamos analisar os conjuntos nos quais f tem:

Posto 0: Todas as entradas de df devem ser nulas.

Posto 1: Alguma entrada deve ser não-nula e todos os menores de ordem 2 precisam se anular.

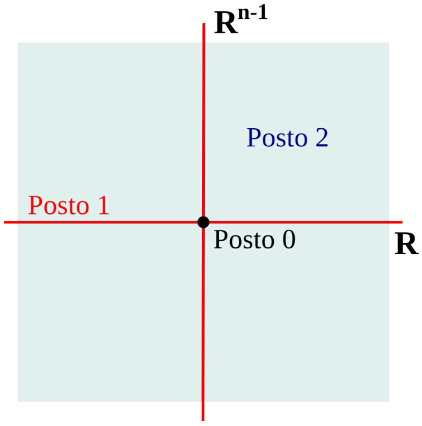
Caso 1: $x_1 = 0$ e $(x_2, \ldots, x_n) \neq 0$:
Conjunto $\{0\} \times \left(\mathbb{R}^{n-1} \setminus (0)\right)$.

Caso 2: $x_1 \neq 0$ e $(x_2, \ldots, x_n) = 0$:
Conjunto $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \{0\}$.

Posto 2: É preciso ter $x_1 \neq 0$ e $(x_2, \ldots, x_n) \neq 0$. Conjunto $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \left(\mathbb{R}^{n-1} \setminus (0)\right)$.

Portanto:

$$A_0 = \{0\}$$
$$A_1 = \left[\{0\} \times \left(\mathbb{R}^{n-1} \setminus (0)\right)\right] \cup \left[(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \{0\}\right]$$
$$A_2 = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \left(\mathbb{R}^{n-1} \setminus (0)\right).$$



item ii) (50 pontos)

É preciso mostrar que para todo $a \in \Omega$ e para todo $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(a) \cap \mathscr{A} \neq \emptyset$, onde

$$\mathscr{A} = A_0^\circ \cup \ldots A_p^\circ .$$

Seja $r = \max\{\operatorname{rk} df(x) : x \in B_\varepsilon(a)\}$ e tome x_0 no qual este máximo é atingido. Então, $df(x_0)$ tem ao menos um menor de ordem r que não se anula. Como f é de classe C^1, existe uma vizinhança V de x_0 na qual este menor ainda se mantém não nulo. Assim, para todo $y \in V$, $\operatorname{rk} df(y) \geq r$ (em outras palavras, o posto é semi-contínuo inferiormente). Restringindo se necessário, podemos assumir $V \subseteq B_\varepsilon(a)$. Neste caso, por escolha de r, para todo $y \in V$ temos $\operatorname{rk} df(y) \leq r$. Segue então que o posto de f é constante e igual a r em V. Portanto, $V \subseteq A_r$ e, em particular, $x_0 \in A_r^\circ$, completando a demonstração.