EXERCÍCIOS DA SÉTIMA QUINZENA

Escolha um (apenas um) dos três exercícios abaixo para entregar até o dia **7 de dezembro**.

Problema 1. Definição de Imersão e Submersões. Forma Local das Imersões.

Para cada um dos itens a) e b) abaixo, encontre um exemplo em $\mathbb{R}^2$ de uma função f de classe C^∞ tal que:

a) A função f é uma função aberta (leva abertos em abertos), mas f não é uma submersão. Justifique.

b) A função f é injetora, mas f não é uma imersão. Justifique.

c) Usando a forma local das imersões, mostre que, se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão, então para todo $x \in \mathbb{R}^m$ existe um aberto U tal que $x \in U \subset \Omega$ e $f|_U : U \to \mathbb{R}^n$ é injetora.

Problema 2. Forma Local das Imersões/Submersões e Teorema do Posto.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1 com $m < n$.

a) f pode ser uma imersão? f pode ser uma submersão? Responda dando exemplos ou demonstrando que não.

b) Suponha que f tenha posto constante. Usando o Teorema do Posto (existem difeos β e α tais que $\beta \circ f \circ \alpha(x, y) = (x, 0)$), mostre que f não é injetora.
(OBS: Para resolver o item b), a hipótese de posto constante poderia, com um pouco mais de análise, ser eliminada. Mas para o exercício, suporemos posto constante)

Problema 3. Teorema do Posto

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1, em que Ω é um aberto. Vamos denotar por A_j o conjunto dos pontos $x \in \Omega$ tais que o posto de $df(x)$ é igual a j.

a) Determine os conjuntos A_0, A_1, .., A_n para a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x_1, ..., x_n) = \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2, x_1^2 - \left(x_2^2 + ... + x_n^2\right)\right).$$

b) Mostre que para toda função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, o conjunto $int\,(A_0) \cup int\,(A_1) \cup ... \cup int\,(A_p)$ é denso em Ω, em que $p = \min\{m, n\}$.