EXERCÍCIOS DA SEXTA QUINZENA

Escolha um (apenas um) dos três exercícios abaixo para entregar até dia **23 de novembro**.

Problema 1. Definição de Diferenciabilidade

Sejam $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ duas funções definidas num aberto Ω de $\mathbb{R}^m$. Mostre que

i) Se Ω é conexo e se existem constantes $C > 0$ e $\alpha > 1$ tais que $\|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|^\alpha$, para todos os pontos x e y contidos em Ω, então f é uma função constante.

ii) Se f é diferenciável num ponto $a \in \Omega$, $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$ e $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{R}^m$ tal que $\lim_{k\to\infty} v_k = v$, então $\lim_{k\to\infty} \frac{f(a+t_k v_k) - f(a)}{t_k} = df(a)(v)$.

iii) Mostre que se existe uma constante $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset \Omega$ e uma função $A : B_r(a) \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cong M_{n\times m}(\mathbb{R})$ contínua em 0 tal que $f(a+h) - f(a) = A(h)(h)$, então f é diferenciável no ponto $a \in \Omega$.

iv) Mostre que se f e g são diferenciáveis num ponto $a \in \Omega$ e $f(a) = g(a)$, então $df(a) = dg(a)$ se, e somente se,

$$\lim_{v\to 0} \frac{f(a+v) - g(a+v)}{\|v\|} = 0.$$

Problema 2. Regra da Cadeia

Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e $g : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e $\varphi : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, em que Ω e $\tilde{\Omega}$ são abertos de $\mathbb{R}^m$ e $f(\Omega) \subset \tilde{\Omega}$.

i) Mostre que $d(\varphi \circ f)(x)(v) = T(v)$, em que T é o funcional linear que corresponde a matriz $\nabla\varphi(f(x)).Jf(x)$. Observe que $\nabla\varphi(f(x))$ é uma matriz $1 \times m$ e $Jf(x)$ é uma matriz $m \times m$.

ii) Mostre que se existe uma constante c tal que $\varphi \circ f(x) = c$, para todo $x \in \Omega$ e $\nabla\varphi(f(a)) \neq 0$ para um certo $a \in \Omega$, então $Jf(a)$ não é invertível.

iii) Mostre que se $x \in \Omega \mapsto \|f(x)\|$ é uma função constante, em que $\|.\|$ é a norma euclidiana, então a matriz $Jf(x)$ não é invertível para nenhum $x \in \Omega$.

iv) Suponha que $df(x)(v)$ seja perpendicular a $g(x)$ e que $dg(x)(v)$ seja perpendicular a $f(x)$, para todo $v \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \Omega$. Se Ω for conexo, o que se pode dizer da função $x \in \Omega \mapsto \langle f(x), g(x)\rangle$?

Problema 3. Desigualdade do Valor Médio

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável definida num aberto Ω convexo. Mostre que

i) Para todo $a, b \in \Omega$ e $y \in \mathbb{R}^n$, existe um ponto $c_y \in [a, b]$ tal que $\langle f(b) - f(a), y\rangle = \langle df(c_y)(b-a), y\rangle$.

ii) A seguinte igualdade é válida

$$\sup_{x\neq y} \frac{\|f(y) - f(x)\|}{\|y - x\|} = \sup_{z\in\Omega} \|df(z)\|.$$

iii) A desigualdade $\|df(x)\| \leq c$ vale para todo $x \in \Omega$ se, e somente se, $\|f(y) - f(x)\| \leq c\|x - y\|$ para todo x, $y \in \Omega$.

iv) Suponha que $\Omega = \mathbb{R}^m$. Logo se $\lim_{x\to\infty} df(x)(x) = 0$, então a função $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dada por $g(x) = f(2x) - f(x)$ é limitada.