EXERCÍCIOS DA QUINTA QUINZENA

Escolha um (apenas um) dos três exercícios abaixo para entregar até dia **9 de novembro**.

Problema 1. Fórmula de Taylor, Máximos e Mínimos e Funções Convexas

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^2.

i) Mostre que, se existe $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(a) = g(a) = 0$ e $df(a) = dg(a) = 0$, e se $d^2 f(x) = d^2 g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$, então $f = g$.

ii) Suponha que f seja a função $f(x, y) = \int_x^y \left(3t^2 - 1\right) dt$. Ache os pontos críticos de f e diga se são máximos locais, mínimos locais ou nem máximo e nem mínimo local.

iii) Mostre que, se f é côncava (isto significa, por definição, que $-f$ é convexa), e se $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto crítico de f, então f tem um máximo global em x_0.

Problema 2. Máximos e Mínimos

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(c)$ é compacto e não vazio.

i) Mostre que, se $n \geq 2$, então um dos conjuntos $F := \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \geq c\}$ ou $G := \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \leq c\}$ é compacto.

ii) Mostre que f assume um máximo ou um mínimo em $\mathbb{R}^n$.

iii) Podemos concluir a mesma coisa se $n = 1$?

iv) Ache $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1, com $n \geq 2$, definido num aberto Ω com a seguinte propriedade: Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(c)$ é compacto e não vazio, mas f não tem máximo nem mínimo em Ω.

Problema 3. Multiplicadores de Lagrange

O objetivo aqui é demonstrar a desigualdade de Hölder usando multiplicadores de Lagrange.

i) Mostre que $M := \{(x, y)\,;\, x > 0,\ y > 0,\ xy = 1\}$ é uma hiperfície de $\mathbb{R}^2$.

ii) Ache o ponto de mínimo da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ restrita a M, em que f é dada por $f(x, y) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$, $p > 0$, $q > 0$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Conclua que, se $xy = 1$ e x e y são positivos, então $1 \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.

iii) Use o resultado do item ii) para provar que $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$ se $x > 0$ e $y > 0$.

iv) Use o resultado do item iii) e mostre que, se $u = (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ e $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$\left|\sum_{j=1}^{n} u_j v_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |u_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |v_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$