**EXERCÍCIOS DA QUARTA QUINZENA**

Escolha um (apenas um) dos três exercícios abaixo para entregar até dia **28 de outubro**.

**Problema 1.** Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é homogênea de grau $k \in \mathbb{R}$, se $f(tx) = t^k f(x)$, para todo $t > 0$.

i) Seja $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Mostre que, se $f$ é homogênea de grau $k \in \mathbb{R}$, então $\frac{\partial f}{\partial x_j} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é homogênea de grau $k-1$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$. Por indução, conclua que, se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ é homogênea de grau $k$, então toda derivada parcial de ordem $l \in \mathbb{N}$ é homogênea de grau $k - l$.

ii) Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ uma função homogênea de grau $k \in \mathbb{R}$. Mostre que $f$ satisfaz a relação de Euler:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, x_j = k f(x).$$

iii) Calcule $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, x_j$ para a função $f(x) = \langle x, x \rangle^k = \|x\|^{2k}$ e obtenha a relação de Euler.

iv) Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(tx) = t f(x)$, para todo $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $f$ é da forma

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j.$$

Quais são os valores dos coeficientes $a_j$?

(Dica: Use o item i) e o fato de $f$ ser $C^\infty$ em torno do zero para mostrar que as derivadas de ordem 2 de $f$ se anulam. Use a fórmula de Taylor com resto de Lagrange ou integral para obter o resultado.)

**Problema 2.** Sejam $\Omega$ e $\tilde{\Omega}$ abertos de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2$ e $g = (g_1, ..., g_n) : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ uma função tal que $g_j : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ é de classe $C^2$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$ e $g\left(\tilde{\Omega}\right) \subset \Omega$.

i) Usando a regra da cadeia, ache uma fórmula para $\frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial x_i \partial x_j} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$.

ii) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear ortogonal, ou seja, $T\, T^* = I$, em que $T^*_{ij} := T_{ji}$, e $\tilde{\Omega} := T^{-1}(\Omega)$. Mostre que $\Delta(f \circ T) = (\Delta(f)) \circ T$, em que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

iii) Seja $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a forma quadrática associada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix},$$

ou seja, $q(v_1, v_2) = a v_1^2 + 2c v_1 v_2 + b v_2^2$. Mostre que se $A \neq 0$ e $a + b = 0$, então a forma quadrática é indefinida, ou seja, existe $v \in \mathbb{R}^2$ e $\tilde{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $q(v) > 0$ e $q(\tilde{v}) < 0$.

iv) Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2$, para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tal que $\Delta f(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in \Omega$. Mostre que se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto crítico de $f$ e $d^2 f(x_0, y_0) \neq 0$, então $(x_0, y_0)$ não é máximo nem mínimo de $f$.

**Problema 3.** Utilize o teorema das funções implícitas para para provar as seguintes afirmações:

i) Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\left(x^2 + y^4\right) f(x, y) + f(x, y)^3 = 1$ para qualquer $(x, y) \in \Omega$. Prove que $f \in C^\infty$. (Dica: Use $h(x, y, z) := \left(x^2 + y^4\right) z + z^3$)

ii) Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que $f$ é contínua e $g(x) = f(x) + (f(x))^5$. Se $g \in C^r(\mathbb{R}^n)$, então $f \in C^r(\mathbb{R}^n)$.

iii) Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se a função $g : \Omega \to \mathbb{R}$ dada pela expressão $g(x) = \int_0^{f(x)} \left(1 + t^2\right) dt$ for de classe $C^\infty$, então $f$ é de classe $C^\infty$. (Dica: Mostre que $g$ é contínua, ache uma função $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ conveniente e utiliza o teorema das funções implícitas).

iv) Sejam $\xi : I \to \mathbb{R}$ contínua e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, com $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ em todos os pontos. Se $f(x, \xi(x)) = 0$ para todo $x \in I$, prove que $\xi$ é de classe $C^1$. (Dica: Mostre que $\xi$ é única. Depois use o teorema da função implícita para abertos que contenham $(x_0, \xi(x_0))$, para todo $x_0 \in I$.)