EXERCÍCIOS DA TERCEIRA QUINZENA

Escolha um (apenas um) dos três exercícios abaixo para entregar até dia **12 de outubro**.

Problema 1. Seja M um espaço métrico compacto. Seja $C(M,\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : M \to \mathbb{R}$ contínuas.

i) Mostre que a função $\|.\| : C(M,\mathbb{R}) \to [0,\infty[$ definida abaixo é uma norma para $C(M,\mathbb{R})$:

$$\|f\| := \sup_{x\in M} |f(x)|.$$

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy de $C(M,\mathbb{R})$ com a métrica $d(f,g) := \|f-g\|$.
ii) Mostre que existe uma função $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in M$.
iii) Mostre que a função f definida acima é uma função contínua, ou seja, $f \in C(M,\mathbb{R})$.
iv) Mostre que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ na métrica definida pela norma do item i). Conclua que $(C(M,\mathbb{R}), d)$ é um espaço métrico completo.

Problema 2. Seja (M,d) um espaço métrico.

i) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente e $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Mostre que $K := \{x_n,\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é um conjunto compacto.
Para os itens abaixo vamos usar a seguinte definição: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em M. Dizemos que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, se não existe nenhuma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que seja convergente.
ii) Prove que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ se, e somente se, para todo compacto $K \subset M$, o conjunto $\{n \in \mathbb{N},\, x_n \in K\}$ é finito.
iii) Seja $\left(N, \tilde{d}\right)$ um espaço métrico e $f : M \to N$ uma função contínua. Mostre que as seguintes propriedades de f são equivalentes:
I) Para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de M que satisfaz $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, temos que a sequência $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de N satisfaz $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.
II) Para todo compacto $K \subset N$, o conjunto $f^{-1}(K)$ é um conjunto compacto de M.

Problema 3. Seja (N,d) um espaço métrico. Dizemos que um subconjunto $Q \subset N$ é um subespaço completo de N se o espaço métrico $\left(Q, d|_{Q\times Q}\right)$ é completo.
i) Sejam M_1, ..., $M_n \subset N$ subespaços completos de N. Mostre que $M := M_1 \cup ... \cup M_n$ é um subespaço métrico completo de N.
ii) Sejam $M_\alpha \subset N$, $\alpha \in \Lambda$, subespaços completos de N. Prove que $M := \cap M_{\alpha\in\Lambda}$ também é um subespaço completo de N.
iii) Seja $F \subset N$ um subespaço completo de N. Prove que F é um subconjunto fechado de N.
iv) Sejam (P,d') um outro espaço métrico e $f : N \to P$ uma função contínua que satisfaz

$$d'(f(x), f(y)) \geq C d(x,y)$$

para todo $x, y \in N$ e para uma constante $C > 0$ fixa (que independe de x e y). Mostre que se N é um espaço métrico completo, então $f(N)$ é um subespaço completo de P. Conclua, usando o item iii), que nestas condições, se $F \subset N$ é um conjunto fechado de N, então $f(F)$ é um conjunto fechado de P.