EXERCÍCIOS DA SEGUNDA QUINZENA

Escolha um (apenas um) dos três exercícios abaixo para entregar até dia **21 de setembro**.

Problema 1. Sejam $(E, \|.\|_E)$ e $(F, \|.\|_F)$ espaços vetoriais reais normados. Seja $T : E \to F$ uma aplicação linear. (Lembrando que T é uma aplicação linear se $T(x+y) = T(x) + T(y)$, para todo $x, y \in E$, e $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, para todo $x \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$).

i) Mostre que T é contínua se, e somente se, existe $C > 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E$, para todo $x \in E$.

ii) Denotemos por $B(E, F)$ o conjunto de todas as aplicações lineares contínuas de E em F. Mostre que $B(E, F)$ é um espaço vetorial normado com as operações de soma e multiplicação por escalar usuais e com a norma dada por

$$\|T\|_{B(E,F)} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F .$$

(Em particular, verifique que a função acima define uma norma)

iii) Seja $\|.\|_{\tilde{E}} : E \to [0, \infty[$ uma segunda norma para E. Suponha que as métricas $d(x, y) = \|x - y\|_E$ e $\tilde{d}(x, y) = \|x - y\|_{\tilde{E}}$ são equivalentes em E. Mostre que existem constantes c_1 e $c_2 > 0$ tais que

$$c_1 \|x\|_{\tilde{E}} \leq \|x\|_E \leq c_2 \|x\|_{\tilde{E}} .$$

iv) Seja $E := C^1([0,1], \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínuas e com derivadas contínuas e $F := C([0,1], \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínuas. Consideremos as normas em E e em F definidas como

$$\|f\|_E := \left(\sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{df}{dt}(t) \right| \right) \quad \text{e} \quad \|f\|_F := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| .$$

Mostre que $(T(f))(t) = \frac{df}{dt}(t)$ define um operador linear contínuo de E em F.

Problema 2. Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que M é localmente compacto se, dado $x \in M$, existe um conjunto aberto $U_x \subset M$ tal que $x \in U_x$ e $\overline{U}_x$ é compacto.

i) Seja $f : M \to N$ uma aplicação contínua e aberta (leva abertos em abertos) entre os espaços métricos (M, d) e $\left(N, \tilde{d}\right)$. Se M for localmente compacto, então o conjunto $f(M) \subset N$ é um espaço localmente compacto com a métrica induzida de N.

ii) Mostre que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ com a métrica usual ($d(x, y) = |x - y|$) não é localmente compacto.

iii) Dizemos que um espaço métrico (M, d) é um espaço métrico uniformemente localmente compacto se toda bola fechada $B_R[x]$ é compacta, para todo $x \in M$ e $R > 0$. Mostre que todo espaço métrico uniformemente localmente compacto é localmente compacto. Mostre que o inverso não ocorre (pense no espaço métrico com a métrica que só assume os valores 0 e 1, como visto diversas vezes em sala de aula).

iv) Seja (M, d) um espaço métrico localmente compacto. Suponha que $F \subset M$ seja um subconjunto fechado. Mostre que o espaço métrico F com a métrica induzida por M também é um espaço métrico localmente compacto.

Problema 3. Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que M é localmente conexo se, dado $x \in M$ e $U_x \subset M$ um conjunto aberto tal que $x \in U_x$, então existe um conjunto aberto conexo V_x tal que $x \in V_x \subset U_x$. De forma semelhante, dizemos que M é localmente conexo por caminhos se, dado $x \in M$ e $U_x \subset M$ um conjunto aberto tal que $x \in U_x$, então existe um conjunto aberto conexo por caminhos V_x tal que $x \in V_x \subset U_x$.

i) Mostre que M é localmente conexo se, e somente se, toda componente conexa é um conjunto aberto.

ii) Mostre que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ com a métrica usual ($d(x, y) = |x - y|$) não é localmente conexo.

iii) Seja $f : M \to N$ uma aplicação contínua e aberta (leva abertos em abertos) entre os espaços métricos (M, d) e $\left(N, \tilde{d}\right)$. Se M for localmente conexo, então o conjunto $f(M) \subset N$ é um espaço localmente conexo com a métrica induzida de N.

iv) Seja (M, d) um espaço métrico localmente conexo por caminhos. Seja C uma componente conexa de M e $x \in C$. Mostre que o conjunto $\{y \in C, \exists \text{um caminho em } M \text{que liga } x \text{ a } y\}$ é um conjunto aberto e fechado em C. Conclua que que toda componente conexa de M é conexa por caminhos.