EXERCÍCIOS DA PRIMEIRA QUINZENA

Escolha um (apenas um) dos três exercícios abaixo para entregar até dia **31 de agosto**.

Problem 1. Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que

i) A função $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{1+x}$ é uma função crescente.

ii) Mostre que a função $\tilde{d} : M \times M \to [0, \infty[$ dada por $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ é uma métrica para M .

iii) Mostre que dado $r > 0$, existe $\tilde{r} > 0$ tal que se $\tilde{d}(x, y) < \tilde{r}$, então $d(x, y) < r$. Inversamente, mostre que dado $\tilde{r} > 0$, existe $r > 0$ tal que se $d(x, y) < r$, então $\tilde{d}(x, y) < \tilde{r}$. Conclua que toda bola aberta de (M, d) contém uma bola aberta de $\left(\tilde{M}, \tilde{d}\right)$ e vice e versa.

iv) Mostre que $A \subset M$ é um aberto de (M, d) se, e somente se, A é um aberto de $\left(M, \tilde{d}\right)$, ou seja, as métricas geram a mesma topologia.

Problem 2. Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $X \subset M$ é um conjunto localmente fechado em M se para todo $x \in X$, existe um aberto U de M que contém x tal que $U \cap X$ é fechado em U. Mostre que

i) X é localmente fechado em M se, e somente se, X é um subconjunto fechado de algum aberto de M.

ii) $\mathbb{Q}$ não é localmente fechado em $\mathbb{R}$.

iii) Todo aberto $A \subset M$ é localmente fechado em M.

iv) Se $S \subset T \subset M$, com S localmente fechado em T e T localmente fechado em M, então S é localmente fechado em M.

Problem 3. Seja (M, d) um espaço métrico. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações.

i) Seja $X \subset M$ um conjunto desconexo. Logo $\overline{X}$ também é um conjunto desconexo.

ii) Seja $X \subset M$ um conjunto conexo. Logo ∂X também é um conjunto conexo.

iii) No espaço métrico (M, d), em que

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \neq y \\ 0, \text{ se } x = y \end{cases},$$

os únicos conjuntos conexos são o vazio e os conjuntos formados por apenas um ponto.

iv) Sejam $\{X_n \subset M, \, n = 1, 2, 3, ...\}$ subconjuntos conexos. Suponha que $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \{1, 2, 3, ...\}$. Logo $\cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ é um conjunto conexo.