Observemos que $\|\tilde{\mathcal{F}}(f)\| = \lim \|\mathcal{F}(\phi_j)\| = \lim \|\phi_j\| = \|f\|$. Logo $\tilde{\mathcal{F}} : L^2 \to L^2$ é isometria.

Por fim, $\tilde{\mathcal{F}} f = 0 \Rightarrow \|\tilde{\mathcal{F}}(f)\| = 0 \Rightarrow \|f\| = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ é injetora

Seja $g \in L^2$. Logo $S \circ \tilde{\mathcal{F}}(g) \in L^2 \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}} \circ S \circ \tilde{\mathcal{F}}(g) = S \circ \tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mathcal{F}}(g) = g \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ é sobrejetora IV

Exemplos de Transformadas de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

1) Delta de Dirac $\quad \mathcal{F}(\delta) = 1 \quad$ e $\quad \mathcal{F}(1) = (2\pi)^n \delta$

Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo $\mathcal{F}(\delta)(\phi) = \delta(\mathcal{F}\phi) = \delta\left(\int e^{-ix\xi}\phi(x)\,dx\right) = \int \phi(x)\,dx = 1(\phi)$.

$$\mathcal{F}(1)(\phi) = 1(\mathcal{F}\phi) = \int \mathcal{F}\phi(\xi)\,d\xi = (2\pi)^n \frac{1}{(2\pi)^n}\int \mathcal{F}\phi(\xi)\,d\xi = (2\pi)^n \phi(0) = (2\pi)^n \delta(\phi).$$

2) Valor Principal $\quad \mathcal{F}(PV(\frac{1}{x})) = -i\pi \operatorname{sgn} \xi$.

Seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que χ é igual a 1 numa vizinhança de 0. Logo

$$PV(\tfrac{1}{x}) = \chi P(\tfrac{1}{x}) + (1-\chi)\tfrac{1}{x} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Seja $v = \mathcal{F}(PV(\frac{1}{x}))$. Logo $-D_\xi v = -D_\xi \mathcal{F}(PV(\frac{1}{x})) = \mathcal{F}(x\,PV(\frac{1}{x})) = \mathcal{F}(1) = 2\pi\delta$.

Logo $i v(\xi) = 2\pi H(\xi) + c \Rightarrow v(\xi) = -2\pi i H(\xi) + c$.

Note que $PV(\frac{1}{x})(S\phi) = PV\int \frac{1}{x}\phi(-x)\,dx = -PV\int \frac{1}{x}\phi(x)\,dx = -PV(\frac{1}{x})(\phi) \Rightarrow S(PV(\frac{1}{x})) = -PV(\frac{1}{x})$.

Logo $\quad S\mathcal{F}(PV(\frac{1}{x}))(\phi) = \mathcal{F}(PV(\frac{1}{x}))(S\phi) = PV(\frac{1}{x})(\mathcal{F}S\phi) = PV(\frac{1}{x})(S\mathcal{F}\phi) = S\,PV(\frac{1}{x})(\mathcal{F}\phi) =$

$$= -PV(\tfrac{1}{x})(\mathcal{F}\phi) = -\mathcal{F}(PV(\tfrac{1}{x}))(\phi) \Rightarrow S\mathcal{F}(PV(\tfrac{1}{x})) = -\mathcal{F}(PV(\tfrac{1}{x})).$$

Assim, $v(-\xi) = Sv(\xi) = -v(\xi) \Rightarrow 2\pi i H(\xi) - c = -2\pi i H(-\xi) + c \Rightarrow 2c = 2\pi i(H(\xi) + H(-\xi))$

$$\Rightarrow c = i\pi.$$

Portanto, $-2\pi i H(\xi) + i\pi = -i\pi \operatorname{sgn}(\xi) \Rightarrow \mathcal{F}(PV(\frac{1}{x})) = -i\pi \operatorname{sgn}(\xi)$

3) Função Heaviside $\quad \mathcal{F}(H) = -iPV(\frac{1}{\xi}) + \pi\delta = \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{a+i\xi} = -i\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{\xi - ia} = -i\frac{1}{\xi - i0}$.

Vimos $\mathcal{F}(PV(\frac{1}{x})) = -2\pi i H(\xi) + i\pi \Rightarrow \mathcal{F}(H) = \frac{i}{2\pi}\mathcal{F}\mathcal{F}(PV(\frac{1}{x})) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(1)$

$$= i\frac{1}{2\pi}SS\mathcal{F}\mathcal{F}(PV(\tfrac{1}{x})) + \tfrac{1}{2}2\pi\delta$$

$$= -iPV(\tfrac{1}{x}) + \pi\delta =$$

Transformada de Fourier e Convolução.

Vamos agora demonstrar alguns teoremas de convolução para distribuições temperadas.

1) Tínhamos visto: $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Conclusão: $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Novo Teorema: Se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos $u * \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ por $u * \phi(x) = u(y \mapsto \phi(x-y))$.

Logo $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha(u * \phi) = (\partial^\alpha u) * \phi = u * \partial^\alpha \phi$. e $T_a(u * \phi) = (T_a u) * \phi = u * T_a \phi$.

Demonstração: • Vamos mostrar que $u * \phi$ é contínua

Se $x_n \to x$, então $(y \mapsto \phi(x_n - y)) \xrightarrow{n \to \infty} (y \mapsto \phi(x-y))$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De fato,

$$|y^\alpha \partial_y^\beta \phi(x_n - y) - y^\alpha \partial_y^\beta \phi(x-y)| \leq \sum_{j=1}^n \left| (x_{n_j} - x_j)\, y^\alpha \partial_y^\alpha \int_0^1 (\partial_j \phi)(x - y + \theta(x_n - x))\, d\theta \right| \circledast$$

$$\text{Mas } y^\alpha = (y - x - \theta(x_n - x) + x + \theta(x_n - x))^\alpha \leq \sum_{\delta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\delta} (x + \theta(x_n - x))^\delta (y - x - \theta(x_n - x))^{\alpha - \delta}$$

$$\circledast \leq \sum_{j=1}^n \sum_{\delta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\delta} \|x_n - x\| (\|x\| + \|x_n - x\|)^{|\delta|} \int_0^1 |(y - x - \theta(x_n - x))^{\alpha - \delta} (\partial_y^{\alpha + \delta_j} \phi)(x - y + \theta(x_n - x))| d\theta$$

$$\leq \|x_n - x\| \sum_{j=1}^n \sum_{\delta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\delta} (\|x\| + \|x_n - x\|)^{|\delta|} \| x^{\alpha - \delta} \partial^{\alpha + \delta_j} \phi(x) \|_{L^\infty} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

•• Vamos mostrar que $\partial_{x_j}(u * \phi) = u * \partial_j \phi = u((\partial_j \phi)(x - y)) = u(-\partial_{y_j}(\phi(x-y))) = (\partial_j u)(\phi(x-y)) = (\partial_j u) * \phi$.

$$\frac{u * \phi(x + he_j) - u * \phi(x)}{h} = u\left(\frac{\phi(x + he_j - y) - \phi(x - y)}{h} \right) = u\left(\int_0^1 (\partial_j \phi)(x - y + \theta h e_j)\, d\theta \right)$$

$$\text{Mas } \left| y^\alpha \partial_y^\beta \left(\int_0^1 \partial_j \phi(x - y + \theta h e_j)\, d\theta \right) - y^\alpha \partial_y^\beta (\partial_j \phi)(x-y) \right| = \left| \int_0^1 \left(y^\alpha \partial_y^{\beta + \delta_j} \phi(x - y + \theta h e_j) - y^\alpha \partial_y^{\beta + \delta_j} \phi(x-y) \right) d\theta \right| \leq$$

$$\| y^\alpha \partial_y^{\beta + \delta_j} (\phi(x - y + \theta h e_j) - \phi(x-y)) \|_{L^\infty} \xrightarrow{h \to 0} 0, \text{ pelo item acima}$$

$$\text{Assim, } \frac{u * \phi(x + he_j) - u * \phi(x)}{h} \xrightarrow{h \to 0^+} u * (\partial_j \phi)$$

Concluímos que $u * \phi$ tem derivadas parciais e $\partial_j(u*\phi) = u*(\partial_j\phi)$. Por $\bullet$, vemos que $u * \partial_j \phi$ é contínua. Logo $u*\phi$ é de classe C^1. Por indução vemos que para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, temos $\partial^\alpha(u*\phi) = (\partial^\alpha u)*\phi = u*(\partial^\alpha\phi)$.

Por fim, $T_a(u*\phi)(x) = u*\phi(x-a) = u(\phi(x-a-y)) = u((T_a\phi)(x-y)) = u*(T_a\phi)$

$$\| \quad u(T_{-a}(y \mapsto \phi(x-y))) = (T_a u)(\phi(x-y)) = (T_a u)*\phi$$

$\boxed{E}$

2) Tínhamos visto: $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Logo $u*v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, em que

$$u*v(\phi) = u(S(v*S\phi))$$

Conclusão: $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $u*v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Novo Teorema: Se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Logo $u*v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, em que $u*v(\phi) = u(S(v*S\phi))$.

Demonstração: Como $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, basta mostrar que $v*: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ continuamente. Como $v*: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como v tem suporte compacto, $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, já sabemos que então $\exists\, K \subset\subset \mathbb{R}^n$, $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $|v(\phi)| \leq C \max_{|\sigma|\leq m} \|\partial^\sigma\phi\|_{L^\infty(K)}$, $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$|x^\alpha \partial^\beta(v*\phi)(x)| = |x^\alpha(v*\partial^\beta\phi)(x)| = |v(x^\alpha \partial^\beta\phi(x-y))| \leq C \max_{|\sigma|\leq m} \|x^\alpha(\partial^{\sigma+\beta}\phi)(x-y)\|_{L^\infty(K)} \leq$$

$$C\sum_{\delta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\delta} \max_{|\sigma|\leq m} \|y^\delta (x-y)^{\alpha-\delta}(\partial^{\sigma+\beta}\phi)(x-y)\|_{L^\infty(K)} \underset{K \subset B_R(0)}{\leq} C\sum_{\delta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\delta}R^\delta \max_{|\sigma|\leq m}\|(x-y)^{\alpha-\delta}(\partial^{\sigma+\beta}\phi)(x-y)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\tilde{C}\,\|\phi\|_{|\alpha|+|\beta|+m,\mathcal{S}}$$

Logo $\|v*\phi\|_{|\alpha|+|\beta|,\mathcal{S}} \leq \tilde{C}\,\|\phi\|_{|\alpha|+|\beta|+m,\mathcal{S}}$.

Assim, se $\lim_{n\to\infty}\phi_n = \phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|\phi_n - \phi\|_{N,\mathcal{S}} = 0,\ \forall N \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|v*\phi_n - v*\phi\|_{N,\mathcal{S}} = 0, \forall N$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} v*\phi_n = v*\phi \text{ em } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Concluímos que $u*v(\phi) = \underset{\mathcal{S}}{\phi} \xmapsto{S} \underset{\mathcal{S}}{S\phi} \xmapsto{v*} \underset{\mathcal{S}}{v*S\phi} \xmapsto{S} \underset{\mathcal{S}}{S(v*S\phi)} \xmapsto{u} \underset{\mathbb{C}}{u(S(v*S\phi))}$ é linear e contínuo

$\boxed{E}$

Observação. $S(v * S\phi)(x) = v*(S\phi)(-x) = \int v(y)(S\phi)(-x-y)\,dy = \int v(y)\phi(x+y)\,dy$
$Sv * \phi(x) = \int v(-y)\phi(x-y)\,dy = \int v(y)\phi(x+y)\,dy$ $\Big\}$ $S(v*S\phi) = (Sv)*\phi$.

Se $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $Sv(\phi) := v(S\phi)$.

Transformada de Fourier de um elemento em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Pré-requisito:

Definição. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ um aberto. Dizemos que uma função $f: \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa se

1) f é uma função contínua.

2) Para todo $j = 1, \dots, n$, temos $z_j \in \{z \in \mathbb{C} : (z_1, \dots, \underset{\text{j-ésima coor}}{z}, \dots, z_n) \in \Omega\} \mapsto f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n) \in \mathbb{C}$ é holomorfa.

Observação: 2) equivale a dizer que f é uma função holomorfa para cada variável quando as demais são mantidas constantes.

Proposição: $f: \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa $\Leftrightarrow$ Para todo $w \in \Omega$, $\exists R > 0$ t.q. se $z \in B_R(w)$, temos

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \partial_z^\alpha f(w) (z-w)^\alpha.$$

Definimos $\partial_z^\alpha = \partial_{z_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{z_n}^{\alpha_n}$ e $(z-w)^\alpha = (z_1 - w_1)^{\alpha_1} \cdots (z_n - w_n)^{\alpha_n}$.

Demo: ($\Leftarrow$) Basta observar que $\partial_{\bar z_j}\left(\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_z^\alpha f(w)(z-w)^\alpha\right) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}(\partial_z^\alpha f)(w)\, \partial_{\bar z_j}(z-w)^\alpha = 0$.

($\Rightarrow$) Como f é holomorfa, podemos usar o teorema de Cauchy para cada variável e obter

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1}\, d\zeta_1 = \dots = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)}\, d\zeta_1 \dots d\zeta_n$$

para $z \in \Omega$ e $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ curvas da forma $\gamma_j(\zeta_j) = z_j + Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Se $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$, $\gamma_j = \partial B_\varepsilon(a_j)$ e $z \in B_\varepsilon(a_1) \times \dots \times B_\varepsilon(a_n) \subset \Omega$, então

$$\frac{1}{\zeta_j - z_j} = \frac{1}{(\zeta_j - a_j) + (a_j - z_j)} = \frac{1}{(\zeta_j - a_j)}\left(\frac{1}{1 - \left(\frac{z_j - a_j}{\zeta_j - a_j}\right)}\right) = \frac{1}{\zeta_j - a_j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_j - a_j}{\zeta_j - a_j}\right)^n.$$

Assim, como f é contínua e a série converge uniformemente para $z \in B_r(a_1)\times\dots\times B_r(a_n)$, $\forall\, r < \varepsilon$, obtemos

$$f(z_1,\dots,z_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\dots\sum_{k_n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\gamma_1}\dots\int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)}{(\zeta_1-a_1)^{k_1+1}\dots(\zeta_n-a_n)^{k_n+1}}\, d\zeta_1\dots d\zeta_n\right)}_{(\partial_{z_1}^{k_1}\dots\partial_{z_n}^{k_n} f)(a_1,\dots,a_n)} (z_1-a_1)^{k_1}\dots(z_n-a_n)^{k_n}.$$

$\blacksquare$

Observação: Pelo Teorema de Hartogs, para que $f:\Omega \overset{ab}{\subset} \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ seja holomorfa, basta que seja holomorfa em cada variável. A continuidade sai automaticamente (difícil de provar!).

Provaremos mais adiante que: Se $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ é holomorfa e $f|_{\mathbb{R}^n}\equiv 0$, então $f\equiv 0$. Lembrando que $\mathbb{R}^n\subset\mathbb{C}^n$ é o conjunto dos elementos $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$, $z_j\in\mathbb{R}$, $\forall\, j$. Assim, se $f,g:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ são holomorfas e $f|_{\mathbb{R}^n}=g|_{\mathbb{R}^n}$, então $f=g$. Isto implica que se $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ admite uma extensão holomorfa em $\mathbb{C}^n$, esta extensão é única.

Proposição: Seja $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Logo $z\in\mathbb{C}^n \mapsto u(x\mapsto e^{-iz\cdot x})$ é uma função holomorfa.

Demo: Vamos mostrar que se $\lim_{m\to\infty} z_m = z$, então $e^{-iz_m\cdot x}\xrightarrow[m\to\infty]{} e^{-iz\cdot x}$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

De fato, seja $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ dado por $F(x,z)=e^{-iz\cdot x}$ e $K\subset\subset\mathbb{R}^n$. Logo

$$\|\partial_x^\alpha e^{-iz\cdot x} - \partial_x^\alpha e^{-iz_m\cdot x}\|_{L^\infty(K)} = \sup_{x\in K}|\partial_x^\alpha F(x,z_m)-\partial_x^\alpha F(x,z)| \xrightarrow{m\to\infty} 0;$$

(Usamos que F é uniformemente contínua em $K\times\overline{B_R(0)}$, em que $\overline{B_R(0)}\subset\mathbb{C}$ é tal que $z_m\in B_R(0)$, $\forall\, m$. Logo dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ tal que se $\|(x,z)-(y,\tilde z)\|<\delta$, $(x,z),(y,\tilde z)\in K\times\overline{B_R(0)}$, então $|\partial_x^\alpha F(x,z)-\partial_x^\alpha F(y,\tilde z)|<\varepsilon$. Assim, se $M>0$ é tal que $|z_m-z|<\delta$ para $m>M$, então $|\partial_x^\alpha F(x,z)-\partial_x^\alpha F(x,z_m)|<\varepsilon$, $\forall\, m>M$, $x\in K$.)

Vamos agora mostrar que se $\lim_{m\to\infty} h=0$, então $\dfrac{e^{-i(z_1+h)x_1-iz_2x_2-\dots-iz_nx_n} - e^{-iz\cdot x}}{h} \xrightarrow{h\to 0} -ix_1e^{-iz\cdot x}$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato,

$$\frac{e^{-i(z_1+h)x_1-iz_2x_2-\dots-iz_nx_n} - e^{-iz\cdot x}}{h} + ix_1e^{-iz\cdot x} = ix_1\int_0^1\left(e^{-i(z_1+\theta h)x_1-\dots-iz_nx_n} - e^{-iz\cdot x}\right)d\theta$$

Assim, $\sup_{x\in K} \left| i x_1 \int_0^1 (e^{-i(z_1+\theta h)x_1 - \dots - i z_n x_n} - e^{-iz\cdot x})\, d\theta \right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Estamos novamente usando que

$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ dado por $F(x,z) = -ix_1 e^{-iz\cdot x}$ é contínua. Logo uniformemente contínua em

compactos.

Concluímos que $\lim_{m\to\infty} u(e^{-iz_m\cdot x}) = u(e^{-iz\cdot x})$

$\lim_{h\to 0} u\left(\frac{e^{-i(z_1+h)x_1 - \dots - i z_n x_n} - e^{-iz\cdot x}}{h} \right) = u(-ix_1 e^{-ix\cdot z})$ (Analogamente para z_j) ■

Logo $z \mapsto u(e^{-iz\cdot x})$ é contínua e $z_j \mapsto u(e^{-iz\cdot x})$ é holomorfa em z_j, $\forall j$.

<u>Teorema:</u> Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Logo $\mathcal{F}u(\xi) = u(e^{-i\xi\cdot x})$. Logo $\mathcal{F}u$ é uma função que tem extensão holomorfa em $\mathbb{C}^n$.

<u>Demo:</u> Seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi(x) = 1$ para x numa vizinhança aberta de supp u. Logo

se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\mathcal{F}(u)(\phi) = u(\mathcal{F}(\phi)) \underset{\text{pois } u = \chi u}{=} (\chi u)(\mathcal{F}(\phi)) = u(\chi\, \mathcal{F}(\phi)) = u\left(\int e^{-ix\cdot y} \chi(x) \phi(y)\, dy \right). \ (*)$$

Seja $A: \mathbb{R}^n \to C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dado por $A(y) = x \mapsto e^{-ix\cdot y}\chi(x)\phi(y)$. Logo

1. $A(y) = 0$, se $y \notin \text{supp}\, \phi \subset\subset K$
2. $x \mapsto A(y)(x)$ tem suporte contido em suppχ.
3. Dado $\varepsilon > 0$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $|y - \tilde{y}| < \delta$, então $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \| \partial_x^\alpha A(y)(x) - \partial_x^\alpha A(\tilde{y})(x) \| < \varepsilon$.

Logo definimos $\left(\int A(y)\,dy \right)(x) = \int A(y)(x)\,dy$. Logo $\int A(y)\,dy \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, e temos

$$u\left(\int A(y)\,dy \right) = \int u \circ A(y)\, dy.$$

Assim $(*) = \int u(e^{-ixy}\chi(x))\phi(y)\,dy = \int u(e^{-ixy})\phi(y)\,dy$. Logo $\mathcal{F}u(y) = u(e^{-ix\cdot y})$ ■

Convolução e transformada de Fourier

__Teorema:__ Sejam $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Logo $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(v)\mathcal{F}(u)$.

__Demonstração:__ Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, e $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo

$$\mathcal{F}(u * v)(\phi) = u * v(\mathcal{F}\phi) = v(Su * \mathcal{F}\phi)$$

$$\mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v)(\phi) = \mathcal{F}(v)(\mathcal{F}(u)\phi) = v(\mathcal{F}(\mathcal{F}(u)\phi))$$

Sabemos que se $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $\exists (v_j)_j \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty} v_j = v$ em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Logo

$$\mathcal{F}(u * v) = v(Su * \mathcal{F}\phi) = \lim_{j\to\infty} v_j(Su * \mathcal{F}\phi) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}(u * v_j)(\phi) \underset{\downarrow}{=} \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v_j)(\phi) =$$

pois $\mathcal{F}(u * v_j) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v_j)$, $\forall u, v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{j\to\infty} v_j(\mathcal{F}(\mathcal{F}(u)\phi)) = v(\mathcal{F}(\mathcal{F}(u)\phi)) = \mathcal{F}(u * v)(\phi).$$

Se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, então $\exists (u_j)_j \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Logo

$$\mathcal{F}(u * v)(\phi) = u(Sv * \mathcal{F}\phi) = \lim_{j\to\infty} u_j(Sv * \mathcal{F}\phi) = \mathcal{F}(u_j * v)(\phi) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{provado acima}}}{=} \mathcal{F}(u_j)\mathcal{F}(v)(\phi) =$$

$$\lim_{j\to\infty} u_j(\mathcal{F}(\mathcal{F}(v)\phi)) = u(\mathcal{F}(\mathcal{F}(v)\phi)) = \mathcal{F}(u * v)(\phi). \qquad \blacksquare$$

De forma semelhante, podemos provar que

__Teorema:__ Sejam $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v)$.

__Demo:__ Ver Rudin (Análogo ao resto).

__Observação:__ Pode-se provar, sem dificuldade, que $(u * \phi) * \psi = u * (\phi * \psi)$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, através do resultado acima (ver Rudin)

__Exemplo de Aplicação:__ Definimos a transformada de Hilbert $\mathcal{H}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ como

$$\mathcal{H}(f) = PV\left(\tfrac{1}{x}\right) * f(x)$$

Logo $\mathcal{H}(f) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(PV(\tfrac{1}{x}) * f) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}^{-1}(PV(\tfrac{1}{x}))\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}^{-1}(-i\,\mathrm{sgn}(\xi)\,\mathcal{F}(f)(\xi))$.

15. Kernels (Núcleos) de Distribuições.

Começando com um exemplo...

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abertos. Seja $k \in C(\Omega \times \tilde{\Omega})$. Vamos definir o operador.

$K : C_c^\infty(\tilde{\Omega}) \to C(\Omega)$ por

$$K\psi(x) = \int_{\tilde{\Omega}} k(x,y)\,\psi(y)\,dy.$$

O operador K é chamado de operador integral e a função k é chamada de núcleo/kernel integral.

Como $K\psi \in C(\Omega)$, então $K\psi$ define uma distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$ pela expressão abaixo

$$(K\psi)(\varphi) = \int K\psi(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \left(\int_{\tilde{\Omega}} k(x,y)\,\psi(y)\,dy \right) \varphi(x)\,dx = \int_{\Omega\times\tilde{\Omega}} k(x,y)\,\varphi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy, \quad \begin{matrix} \forall \psi \in C_c^\infty(\tilde{\Omega}) \\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{matrix}$$

Observações Importantes:

1) Como $k \in C(\Omega\times\tilde{\Omega})$, podemos definir a distribuição $k \in \mathcal{D}'(\Omega\times\tilde{\Omega})$ por

$$k(\chi) = \int_{\Omega\times\tilde{\Omega}} k(x,y)\,\chi(x,y)\,dx\,dy, \quad \forall\, \chi \in C_c^\infty(\Omega\times\tilde{\Omega})$$

Logo $K(\psi)(\varphi) = k(\varphi\otimes\psi)$, em que $\underline{\varphi\otimes\psi(x,y) := \varphi(x)\,\psi(y)}$.

2) $K : C_c^\infty(\tilde{\Omega}) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ é uma função sequencialmente contínua: Se $(\psi_n)_n \subset C_c^\infty(\tilde{\Omega})$ é tal que $\lim \psi_n = \psi$ em $C_c^\infty(\tilde{\Omega})$, então $K(\psi_n) \to K(\psi)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Demo: Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo

$$|K(\psi_n)(\varphi) - K(\psi)(\varphi)| = \left| \iint k(x,y)\,\varphi(x)\,(\psi_n(y) - \psi(y))\,dy \right| \leq \int |k(x,y)|\,|\varphi(x)|\,|\psi_n(y) - \psi(y)|\,dx\,dy \leq$$

$$\|k\|_{L^\infty(\operatorname{supp}\varphi \times \operatorname{supp}\psi)}\, \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|\psi_n - \psi\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \quad ■$$

Usando Teoria das Distribuições podemos facilmente generalizar o que foi feito anteriormente.

Seja $k \in \mathcal{D}'(\Omega \times \tilde{\Omega})$. Podemos definir $K: C_c^\infty(\tilde{\Omega}) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ por

$$K(\psi)(\varphi) := k(\varphi \otimes \psi)$$

(Se $\psi \in C_c^\infty(\tilde{\Omega})$, então $K(\psi) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é a distribuição dada por $K(\psi)(\varphi) = k(\varphi \otimes \psi)$).

Como $k \in \mathcal{D}'(\Omega \times \tilde{\Omega})$, para todos os compactos $K \subset\subset \Omega$ e $\tilde{K} \subset\subset \tilde{\Omega}$, $\exists$ constante $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que $|k(\chi)| \leq C \|\chi\|_{C^N}$, $\forall\, \chi \in C_c^\infty(K \times \tilde{K})$. Observemos que se $\varphi \in C_c^\infty(K)$ e $\psi \in C_c^\infty(\tilde{K})$, então $\|\varphi \otimes \psi\|_{C^N} := \max_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha_{x,y} (\varphi \otimes \psi)\|_{L^\infty(\Omega \times \tilde{\Omega})} = \max_{|\sigma| + |\sigma'| \leq N} \|\partial^\sigma \varphi(x)\, \partial^{\sigma'} \psi(y)\|_{L^\infty(\Omega \times \tilde{\Omega})} \leq$

$$\max_{|\sigma| + |\sigma'| \leq N} \left(\|\partial^\sigma \varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\partial^{\sigma'} \psi\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \right) \leq \left(\max_{|\sigma| \leq N} \|\partial^\sigma \varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \left(\max_{|\sigma'| \leq N} \|\partial^{\sigma'} \psi\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \right) = \|\varphi\|_{C^N} \|\psi\|_{C^N}.$$

Logo $|k(\varphi \otimes \psi)| \leq C \|\varphi\|_{C^N} \|\psi\|_{C^N}$.

Algumas implicações: 1) A aplicação $\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \mapsto K(\psi)(\varphi) \in \mathbb{C}$ é uma distribuição

Dem: É linear, pois $K(\psi)(\alpha \varphi + \tilde{\varphi}) = k((\alpha \varphi + \tilde{\varphi}) \otimes \psi) = k(\alpha \varphi \otimes \psi + \tilde{\varphi} \otimes \psi) = \alpha k(\varphi \otimes \psi) + k(\tilde{\varphi} \otimes \psi) =$ $\alpha K(\psi)(\varphi) + K(\psi)(\tilde{\varphi})$.

É contínua, pois dado $K \subset\subset \Omega$, e $\tilde{K} := \operatorname{supp} \psi$, vimos que $\exists\, C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$|K(\psi)(\varphi)| \leq \left(C \|\psi\|_{C^N} \right) \|\varphi\|_{C^N}, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(K).$$

2) O mapa $K: C_c^\infty(\tilde{\Omega}) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ é sequencialmente contínuo: Seja $(\psi_n)_n \subset C_c^\infty(\tilde{\Omega})$ tal que $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ em $C_c^\infty(\tilde{\Omega})$. Logo $K(\psi_n) \to K(\psi)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dem: Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo

$$|K(\psi_n)(\varphi) - K(\psi)(\varphi)| = |k(\varphi \otimes (\psi_n - \psi))| \leq C \|\varphi\|_{C^N} \|\psi_n - \psi\|_{C^N} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \quad \blacksquare$$

Exemplo 1: Identidade: $I: C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ dado por $I(\varphi) = \varphi$.

Seja $k \in \mathcal{D}'(\Omega\times\Omega)$ dado por $k(\chi) = \int_{\Omega\times\Omega} \chi(x,x)\,dx$, $\chi \in C_c^\infty(\Omega\times\Omega)$. Logo

$K(\psi)(\varphi) = k(\varphi\otimes\psi) = \int \varphi(x)\psi(x)\,dx = T_\psi(\varphi)$. Logo $K(\psi) = \psi$. $\Rightarrow K = I$. ■

Exemplo 2: Operadores Diferenciais: $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$, $a_\alpha \in C_c^\infty(\Omega)$. $\left(P(x,D): C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)\right)$

Seja $k \in \mathcal{D}'(\Omega\times\Omega)$ dado por $k(\chi) = \int_{\Omega\times\Omega} \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)(D_y^\alpha \chi)(x,x)\,dx$, $\chi \in C_c^\infty(\Omega\times\Omega)$. $(\chi(x,y))$. Logo

$$K(\psi)(\varphi) = k(\varphi\otimes\psi) = \int_{\Omega\times\Omega} \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\,\varphi(x)(D^\alpha\psi)(x)\,dx = \int_{\Omega\times\Omega} \varphi(x)\,P(x,D)\psi(x)\,dx = T_{P(x,D)\psi}(\varphi).$$

■

Assim, $K(\psi) = P(x,D)\psi$.

Estes operadores incluem operadores diferenciais e integrais. Vamos agora mostrar que todo operador sequencialmente contínuo $K: C_c^\infty(\tilde\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ é da forma $K(\psi)(\varphi) = k(\varphi\otimes\psi)$.

Teorema do Kernel de Schwartz: Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\tilde\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Um operador linear $K: C_c^\infty(\tilde\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ é sequencialmente contínuo $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathcal{D}'(\Omega\times\tilde\Omega)$ tal que $K\psi(\phi) = k(\phi\otimes\psi)$, $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\forall \psi \in C_c^\infty(\tilde\Omega)$

Além disso, o núcleo / kernel k é unicamente determinado pelo operador K.

Observação: Já provamos $(\Leftarrow)$. A parte difícil é $\Rightarrow$, ou seja provar a existência e unicidade de k.

Observação: Se E é um espaço de funções / distribuições tais que $C_c^\infty(\tilde\Omega) \hookrightarrow E$ continuamente e F é um espaço de funções / distribuições tais que $F \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ continuamente, então um operador sequencialmente contínuo $K: E \to F$ e restringe o $K|_{C_c^\infty(\tilde\Omega)}: C_c^\infty(\tilde\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ continuamente.

Logo $K(\psi)(\varphi) = k(\varphi\otimes\psi)$, $\forall\, \begin{matrix}\varphi \in C_c^\infty(\Omega)\\ \psi \in C_c^\infty(\tilde\Omega)\end{matrix}$.

Exemplos: $K: L^p(\tilde\Omega) \to L^q(\Omega)$, $K: C(\tilde\Omega) \to L^p(\Omega)$, $K: \mathcal{E}'(\tilde\Omega) \to C^\infty(\Omega)$, ...

Esta é uma das razões do Teorema do Núcleo de Schwartz ser tão forte:

O domínio $C_c^\infty(\tilde{\Omega})$ é muito pequeno, e a imagem $\mathcal{D}'(\Omega)$ é muito grande. Além disso, a continuidade é geralmente fácil de verificar. Concluímos que uma enorme quantidade de operadores entre espaços de funções é da forma $K(\psi)(\varphi) = k(\varphi \otimes \psi)$. Isto generaliza e justifica a expressão

$$K(\psi)(x) = \int_{\tilde{\Omega}} k(x,y)\, \psi(y)\, dy,$$

que tantas vezes aparece em aplicações, e onde nem sempre k é uma função.

<u>Demonstração</u>: Vamos mostrar que se $K : C_c^\infty(\tilde{\Omega}) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ é sequencialmente contínuo então $\exists!\ k \in \mathcal{D}'(\Omega \times \tilde{\Omega})$ t.q. $K(\psi)(\varphi) = k(\varphi \otimes \psi)$

<u>Unicidade de k</u>: Se $\exists\ k \in \mathcal{D}'(\Omega \times \tilde{\Omega})$ t.q. $K(\psi)(\varphi) = k(\varphi \otimes \psi)$, então k é unicamente determinado por K.

<u>Demo</u>: Seja $K \subset\subset \Omega \times \tilde{\Omega}$. Consideremos $\pi_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ as projeções e $K_1 := \pi_1(K) \subset\subset \Omega$, $K_2 := \pi_2(K) \subset\subset \tilde{\Omega}$. Logo $K \subset K_1 \times K_2 \subset\subset \Omega \times \tilde{\Omega}$. Seja $\rho \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que ρ é igual a 1 numa vizinhança de K_1 e $\sigma \in C_c^\infty(\tilde{\Omega})$ tal que σ é igual a 1 numa vizinhança de K_2. Logo $\rho \otimes \sigma \in C_c^\infty(\Omega \times \tilde{\Omega})$ é igual a 1 numa vizinhança de $K_1 \times K_2$ e, portanto, de K. Seja $l := (\rho \otimes \sigma) k$. Logo $l \in \mathcal{E}'(\Omega \times \tilde{\Omega}) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$. Além disso,

$$l(e^{ix\xi} e^{iy\eta}) = k(\rho(x) e^{ix\xi} \sigma(y) e^{iy\eta}) = K(\sigma(y) e^{iy\eta})(\rho(x) e^{ix\xi}).$$

Consideremos agora $\chi \in C_c^\infty(K) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$. Logo

$$k(\chi) = k((\rho \otimes \sigma)\chi) = l(\chi) = l\left(\frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \int \mathcal{F}\chi(\xi,\eta)\, e^{ix\xi} e^{iy\eta}\, d\xi\, d\eta\right) =$$

$$k\Bigg(\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \int \mathcal{F}\chi(\xi,\eta)\, \rho(x)\sigma(y) e^{ix\xi} e^{iy\eta}\, d\xi\, d\eta}_{\substack{A(\xi,\eta) = (x,y) \mapsto \rho(x)\sigma(y) e^{ix\xi} e^{iy\eta} \\ A : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to C_c^\infty(\Omega \times \tilde{\Omega})}}\Bigg) = \frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \int \mathcal{F}\chi(\xi,\eta)\, k(\rho(x) e^{ix\xi} \sigma(y) e^{iy\eta})\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \int_{\mathbb{R}^{m+n}} \mathcal{F}\chi(\xi,\eta)\, K(\sigma e^{i\eta})(\rho(x) e^{ix\xi})\, d\xi d\eta.$$

Logo k é determinado por K. Portanto é único.

Existência de k: Definimos $B: C_c^\infty(\Omega) \times C_c^\infty(\tilde{\Omega}) \to \mathbb{C}$ por $B(\phi,\psi) = (K\psi)(\phi)$.

- Usaremos a seguinte afirmação: Para todo compacto $K \subset\subset \Omega$ e $\tilde{K} \subset\subset \tilde{\Omega}$, $\exists\, C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|B(\phi,\psi)| \leq C \|\phi\|_{C^N} \|\psi\|_{C^N}, \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(K),\ \psi \in C_c^\infty(\tilde{K}).$$

Desta maneira, concluímos que para todas as funções $\rho \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\sigma \in C_c^\infty(\tilde{\Omega})$, $\exists\, C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$|B(\rho(x) e^{ix\xi}, \sigma(y) e^{iy\eta})| \leq C(1 + \|\xi\|)^N (1 + \|\eta\|)^N.$$

De fato, se $|\alpha| \leq N$, então $|\partial^\alpha(\rho(x) e^{ix\xi})| = \left|\sum_{\delta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\delta} \partial^\delta \rho(x) e^{ix\xi} (i\xi)^{\alpha-\delta}\right| \leq \left(\sum_{\delta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\delta} \|\partial^\delta \rho\|_{L^\infty}\right)(1 + \|\xi\|)^N$ pois $|\alpha - \delta| \leq N$

Dado $U \subset \Omega$ e $V \subset \tilde{\Omega}$ abertos relativamente compactos, definimos $k^{U,V} \in \mathcal{D}'(U \times V)$ por

$$k^{U,V}(\chi) = \frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \mathcal{F}\chi(\xi,\eta)\, B(\rho(x) e^{ix\xi}, \sigma(y) e^{iy\eta})\, d\eta d\xi, \quad \forall\, \chi \in C^\infty(U \times V).$$

Logo $|k^{U,V}(\chi)| \leq C \int |\mathcal{F}\chi(\xi,\eta)| (1 + \|\xi\|)^N (1 + \|\eta\|)^N d\xi d\eta \leq$

$$C \left(\iint (1 + \|\xi\|)^{-m-1} (1 + \|\eta\|)^{-n-1} d\xi d\eta \right) \| (1 + \|\xi\|)^{N+m+1} (1 + \|\eta\|)^{N+n+1} (\mathcal{F}\chi)(\xi,\eta) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{m+n})} \quad (*)$$

Vemos assim que se $(\chi_n) \subset C_c^\infty(U \times V)$ é tal que $\chi_n \to 0$ em $C_c^\infty(U \times V)$, então $\chi_n \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$

Logo $\mathcal{F}\chi_n \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Assim, $k^{U,V}(\chi_n) \to 0$ devido a $(*)$

Agora, notemos que se $\varphi \in C_c^\infty(U)$ e $\psi \in C_c^\infty(V)$, então

$$k^{U,V}(\varphi \otimes \psi) = \frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \mathcal{F}\varphi(\xi)\, \mathcal{F}\psi(\eta)\, B(\rho(x) e^{ix\xi}, \sigma(y) e^{iy\eta})\, d\eta d\xi =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \mathcal{F}\varphi(\xi) \mathcal{F}\psi(\eta)\, K(\rho e^{ix\xi})(\sigma(y) e^{iy\eta})\, d\eta d\xi = K\left(\rho(x) \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} \mathcal{F}\varphi(\xi) d\xi\right)\left(\sigma(y) \frac{1}{(2\pi)^m} \int e^{iy\eta} \mathcal{F}\psi(\eta) d\eta\right)$$

$$= K(\rho\varphi)(\sigma\psi) = K(\varphi)(\psi).$$

Se tivéssemos escolhido outras funções σ e ρ, teríamos obtido que $k(\varphi\otimes\psi)$ continuaria sendo igual a $K(\psi)(\varphi)$. Logo definiria o mesmo operador $K: C_c^\infty(V)\to\mathcal{D}'(U)$. Pela unicidade que provamos, obteríamos a mesma distribuição $k^{U,V}$. Ou seja, $k^{U,V}$ independe de σ e η.

Note que se $\varphi\in C_c^\infty(U\cap U')$ e $\psi\in C_c^\infty(V\cap V')$, então

$$\left.\begin{aligned} k^{U,V}(\varphi\otimes\psi) &= K(\psi)(\varphi)\\ k^{U',V'}(\varphi\otimes\psi) &= K(\psi)(\varphi)\end{aligned}\right\}\ \text{Ambas definem } K: C_c^\infty(V\cap V')\to\mathcal{D}'(U\cap U').$$

Novamente por unicidade, vemos que $k^{U,V}|_{U\cap U'\times V\cap V'} = k^{U',V'}|_{U\cap U'\times V\cap V'}$. Usando partição da unidade, concluímos que $\exists!\ k\in\mathcal{D}'(\Omega\times\tilde\Omega)$ tal que $k|_{U\times V} = k^{U,V}$.

Seja $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ e $\psi\in C_c^\infty(\tilde\Omega)$. Logo $\exists\ U\subset\Omega$ e $V\subset\tilde\Omega$ abertos relativamente compactos tais que $\varphi\in C_c^\infty(U)$ e $\psi\in C_c^\infty(V)$. Assim,

$$k(\varphi\otimes\psi) = k^{U,V}(\varphi\otimes\psi) = K(\psi)(\varphi)$$ $\boxtimes$

Agora basta provarmos a afirmação feita na demonstração do Teorema.

Lema: Seja $K: C_c^\infty(\tilde\Omega)\to\mathcal{D}'(\Omega)$ sequencialmente contínua, $K\subset\subset\Omega$ e $\tilde K\subset\subset\tilde\Omega$. Definamos $B: C_c^\infty(\Omega)\times C_c^\infty(\tilde\Omega)\to\mathbb{C}$ por $B(\varphi,\psi) = K(\psi)(\varphi)$. Logo para todos compactos $K\subset\subset\Omega$, $\tilde K\subset\subset\tilde\Omega$, $\exists\ C>0$ e $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$|B(\varphi,\psi)| \le c\,\|\varphi\|_{C^N}\|\psi\|_{C^N}. \quad \odot$$

Demo: Sejam $(\varphi_j)_j\subset C_c^\infty(\Omega)$ e $(\psi_j)_j\subset C_c^\infty(\tilde\Omega)$ tais que $\varphi_j\to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ e $\psi_j\to 0$ em $C_c^\infty(\tilde\Omega)$. Vamos mostrar que $B(\varphi_j,\psi_j)\to 0$, $j\to\infty$. De fato, se $u_j(\phi) = B(\phi,\psi_j) = K(\psi_j)(\phi)$, então $u_j = K(\psi_j)\in\mathcal{D}'(\Omega)$. Como $\psi_j\to 0$ em $C_c^\infty(\tilde\Omega)$, então $K(\psi_j)\to 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Logo $u_j\to 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Como $\phi_j\to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, concluímos que $\lim_{j\to\infty} B(\phi_j,\psi_j) = \lim_{j\to\infty} u_j(\phi_j) = 0$.

Suponha que $\exists\ K \subset\subset \Omega$, $\tilde{K} \subset\subset \tilde{\Omega}$ no qual uma desigualdade do tipo ⊙ nunca seja válida. Logo $\exists\ \varphi_j \in C_c^\infty(K)$, $\psi_j \in C_c^\infty(\tilde{K})$ tal que $|B(\varphi_j, \psi_j)| > j\, \|\varphi_j\|_{C^j} \|\psi_j\|_{C^j}$, $\forall j$. Sejam $\tilde{\varphi}_j := \dfrac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|_{C^j}\sqrt{j}}$, $\tilde{\psi}_j := \dfrac{\psi_j}{\|\psi_j\|_{C^j}\sqrt{j}}$. Logo

1) $|B(\tilde{\varphi}_j, \tilde{\psi}_j)| = \left| \dfrac{B(\varphi_j, \psi_j)}{\|\varphi_j\|_{C^j}\|\psi_j\|_{C^j}} \dfrac{1}{j} \right| > 1.$

2) $\|\tilde{\varphi}_j\|_{C^k} = \dfrac{\|\varphi_j\|_{C^k}}{\|\varphi_j\|_{C^j}\sqrt{j}} \underset{j \geq k}{\leq} \dfrac{1}{\sqrt{j}} \xrightarrow{j\to\infty} 0.$ usei $\|\phi\|_{C^k} \leq \|\phi\|_{C^j}$, $j \geq k$.

$\|\tilde{\psi}_j\|_{C^k} = \dfrac{\|\psi_j\|_{C^k}}{\|\varphi_j\|_{C^j}\sqrt{j}} \underset{j \geq k}{\leq} \dfrac{1}{\sqrt{j}} \xrightarrow{j\to\infty} 0.$

Assim, $B(\tilde{\varphi}_j, \tilde{\psi}_j)$ deveria ir a 0. Absurdo pois $|B(\tilde{\varphi}_j, \tilde{\psi}_j)| > 1$. $\blacksquare$

17. Parametriz de Operadores Elípticos

Vamos ver mais uma aplicação. Vimos que $\Delta u = f$, $f \in C^\infty(\Omega)$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ implica $u \in C^\infty(\Omega)$.

Veremos agora um resultado geral que engloba este.

<u>Definição</u>: Dizemos que $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ um operador com coeficientes constantes. Dizemos que $P(D)$ é elíptico se $P_m(\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha \xi^\alpha \neq 0$, se $\xi \neq 0$.

<u>Teorema</u>: Se $P(D)$ é elíptico, então $P(D)$ é hypoelíptico.

<u>Demo</u>: Para mostrar que $P(D)$ é hypoelíptico, basta mostrar que $\exists$ uma parametriz $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que sing supp $E = \{0\}$.

<u>Lema</u>: Se $P(D)$ é elíptico de ordem m, então $\exists\ C > 0$ e $R > 0$ tal que se $\|\xi\| \geq R$, então

$$|P(\xi)| \geq C \|\xi\|^m, \quad \|\xi\| \geq R.$$

<u>Demo</u>: Sabemos que $P_m(\xi) \neq 0$, se $\xi \neq 0$. Seja $C := \sup_{\xi \in S^{n-1}} |P_m(\xi)|$. Logo

$$|P_m(\xi)| = \left| P_m\left(\|\xi\| \tfrac{\xi}{\|\xi\|}\right) \right| = \|\xi\|^m \left| P_m\left(\tfrac{\xi}{\|\xi\|}\right) \right| \geq C \|\xi\|^m.$$

Assim, $|P(\xi)| = |P_m(\xi) + \sum_{|\alpha| < m} a_\alpha \xi^\alpha| \geq |P_m(\xi)| - |\sum_{|\alpha| < m} a_\alpha \xi^\alpha| \geq C\|\xi\|^m - D(1 + \|\xi\|)^{m-1}$,

pois $|\sum_{|\alpha| < m} a_\alpha \xi^\alpha| \leq D(1 + \|\xi\|)^{m-1}$, para algum $D > 0$. Logo

$$|P(\xi)| \geq C \|\xi\|^m \left(1 - \frac{(1 + \|\xi\|)^{m-1}}{\|\xi\|^m} \right) \geq \frac{C}{2} \|\xi\|^m, \text{ para } \|\xi\| > R,$$

em que $R > 0$ é tal que $\frac{(1 + \|\xi\|)^{m-1}}{\|\xi\|^m} < \frac{1}{2}$.

Escolhamos agora $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi(x) = 1$ para x numa vizinhança de $\overline{B_R(0)}$.

Logo seja $\tilde{E}(\xi) = \frac{1 - \chi(\xi)}{P(\xi)}$. Como $|\tilde{E}(\xi)| \leq C(1 + \|\xi\|)^{-m}$, concluímos que $\tilde{E} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Seja $E = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{E})$. Logo

$$P(D)E = P(D)\mathcal{F}^{-1}(\tilde{E}) = \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{E}(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}(1) - \mathcal{F}^{-1}(\chi) = \delta + \mathcal{F}^{-1}(\chi).$$

Como $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\mathcal{F}^{-1}(\chi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo E é uma parametriz.

Basta agora provar que sing supp $E = \{0\}$.

Sabemos que $D^\alpha\left(\frac{1}{P(\xi)}\right) = \sum_{\alpha^{(1)}+\dots+\alpha^{(k)}=\alpha} c_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(k)}} \frac{D^{\alpha^{(1)}}P(\xi)\dots D^{\alpha^{(k)}}P(\xi)}{P(\xi)^{k+1}}$. Logo $\left|D^\alpha\left(\frac{1}{P(\xi)}\right)\right| \leq C\frac{(1+\|\xi\|)^{mk-|\alpha|}}{(1+\|\xi\|)^{mk+m}}$

$$\Rightarrow \left|D^\alpha\left(\tfrac{1}{P(\xi)}\right)\right| \leq C(1+\|\xi\|)^{-m-|\alpha|}.$$

Assim,

$$(-x_j)^l E(x) = (-x_j)^l \mathcal{F}^{-1}\tilde{E} = \mathcal{F}^{-1}(D_j^l \tilde{E}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi} D_j^l \tilde{E}(x)\,dx$$

Como $|D_j^l E(x)| \leq C(1+\|\xi\|)^{-m-l} = C(1+\|\xi\|)^{-n-1}(1+\|\xi\|)^{n+1-m-l}$, concluímos que $(-x_j)^l E(x)$ é de classe C^k se $n+1-m-l+k \leq 0 \Leftrightarrow k \leq m+l-n-1$.

Concluímos, tomando l grande, que $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x\in\mathbb{R}^n;\, x_j = 0\})$, $\forall j$. Logo $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. ∎

18 Suporte e Transformada de Fourier

<u>Definição</u>: Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier-Laplace de u é definida como a função holomorfa $\hat{u}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ dada por $\hat{u}(z) = u(e^{-izx})$.

<u>Observação</u>: Vimos anteriormente que $\hat{u}(z) = \mathcal{F}u(z)$

<u>Objetivo</u>: Caracterizar as funções holomorfas da forma $\mathcal{F}(u)$, em que $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Antes vamos definir alguma notação: Seja $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ um compacto. Definimos $S_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$S_K(\eta) = \sup_{x \in K} \langle x, \eta \rangle.$$

<u>Teorema</u>: Seja $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ um compacto e $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ com $\operatorname{supp} u \subset K$. Seja $k \in \mathbb{N}_0$ a ordem de u (como u tem suporte compacto, sua ordem é finita). Logo $\exists\, c > 0$ tal que

$$|\mathcal{F}u(\zeta)| \leqslant c\,(1 + \|\zeta\|)^k e^{S_K(\operatorname{Im}\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Se $u \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}_0$, então $\exists\, c_k > 0$ tal que

$$|\mathcal{F}u(\zeta)| \leqslant c_k\,(1 + \|\zeta\|)^{-k} e^{S_K(\operatorname{Im}\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

<u>Demo</u>: Como $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\exists\, C > 0$, $m \in \mathbb{N}_0$ e $\tilde{\tilde{K}} \subset\subset \mathbb{R}^n$ tal que $|u(\phi)| \leqslant C \|\phi\|_{k,\tilde{K}}$, $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi(x) \equiv 1$ para x numa vizinhança de K. Logo

$$|u(\phi)| = |\chi u(\phi)| = |u(\chi\phi)| \leqslant C \|\chi\phi\|_{k,\tilde{K}} \leqslant C \|\chi\phi\|_{C^k}.$$

Seja $\varepsilon > 0$ e $1_{K_{\varepsilon/2}}(x) = \begin{cases} 1, & d(x,K) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ 0, & d(x,K) > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$. Seja $\phi \in C_c^\infty(B_1(0))$ tal que $\int \phi\, dx = 1$. Definimos

$\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{(\frac{\varepsilon}{4})^n} \int \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon/4}\right) 1_{K_{\varepsilon/2}}(y)\, dy$. Logo $\chi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi_\varepsilon(x) = 1$, se $d(x,K) < \frac{\varepsilon}{4}$ e $\chi_\varepsilon(x) = 0$, se $d(x,K) > \frac{3\varepsilon}{4}$. Além disso,

$$|\partial^\beta \chi_\varepsilon(x)| = \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^n \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{|\beta|} \int \left|(\partial^\beta \phi)\left(\frac{x-y}{\varepsilon/4}\right)\right| 1_{K_{\varepsilon/2}}(y)\, dy \leqslant 4^{|\beta|} \varepsilon^{-|\beta|} \int \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^n \left|(\partial^\beta \phi)\left(\frac{x-y}{\varepsilon/4}\right)\right| dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(4^{|\beta|} \int |\partial^\beta \phi(z)|\, dz\right) \varepsilon^{-|\beta|} \leqslant c_\beta\, \varepsilon^{-|\beta|}.$$

Agora observemos que $|\partial_x^\gamma(e^{-i\langle x,\zeta\rangle})| = |\zeta^\gamma||e^{-i\langle x,\mathrm{Re}\,\zeta\rangle - i\langle x, i\,\mathrm{Im}\,\zeta\rangle}| = |\zeta^\gamma|\, e^{\langle x, \mathrm{Im}\,\zeta\rangle}$

Seja $\eta \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $d(x,K) < \varepsilon$. Logo $x = \tilde{x} + y$, $\tilde{x} \in K$ e $\|y\| < \varepsilon$. Assim,

$$\langle x,\eta\rangle = \langle \tilde{x},\eta\rangle + \langle y,\eta\rangle \leq \sup_{\tilde{x}\in K} \langle \tilde{x},\eta\rangle + \|y\|\|\eta\| \leq s_K(\eta) + \varepsilon\|\eta\|.$$

Portanto, $e^{\langle x,\eta\rangle} \leq e^{s_K(\eta)+\varepsilon\|\eta\|}$, $\forall\, x \in K_\varepsilon$.

Juntando o que vimos temos

$$|\mathcal{F}u(\zeta)| = |u(e^{-ix\zeta})| \leq C\,\|\chi_\varepsilon e^{-ix\zeta}\|_{C^k}$$

Mas $|\partial^\beta(\chi_\varepsilon e^{-ix\zeta})| = \left|\sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}\partial^\gamma\chi_\varepsilon\,\partial^{\beta-\gamma}e^{-ix\zeta}\right| \leq C\sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}\varepsilon^{-|\gamma|}|\zeta^{\beta-\gamma}||e^{-ix\zeta}| \leq C\left(\sup_{|\beta|+|\gamma|\leq k}\varepsilon^{-|\beta|}|\zeta^\gamma|\right)|e^{-ix\zeta}|$

Logo $|\mathcal{F}u(\zeta)| \leq C\left(\sup_{|\beta|+|\gamma|\leq k}\varepsilon^{-|\beta|}|\zeta^\gamma|\right)e^{s_K(\mathrm{Im}\,\zeta)+\varepsilon\|\mathrm{Im}\,\zeta\|}$

Seja $\varepsilon = \frac{1}{\|\mathrm{Im}\,\zeta\|}$. Logo $|\mathcal{F}u(\zeta)| \leq Ce\left(\sup_{|\beta|+|\gamma|\leq k}\|\mathrm{Im}\,\zeta\|^{|\beta|}|\zeta^\gamma|\right)e^{s_K(\mathrm{Im}\,\zeta)} \leq \tilde{C}\,(1+\|\zeta\|)^k e^{s_K(\mathrm{Im}\,\zeta)}$

Agora seja $u \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$. Se $|\alpha| \leq k$, então

$$|\zeta^\alpha\mathcal{F}u(\zeta)| = |\mathcal{F}(D^\alpha u)| = \left|\int e^{-ix\zeta}D^\alpha u(x)\,dx\right| \leq \int_{\mathrm{supp}(u)} e^{\langle x,\mathrm{Im}\,\zeta\rangle}|D^\alpha u(x)|\,dx \leq e^{s_K(\mathrm{Im}\,\zeta)}\|D^\alpha u\|_{L^1}.$$

Logo $(1+\|\zeta\|)^k|\mathcal{F}u(\zeta)| \leq C\left(\sum_{|\gamma|\leq k}|\zeta^\gamma|\right)|\mathcal{F}u(\zeta)| \leq C\,e^{s_K(\mathrm{Im}\,\zeta)}$. Portanto

$$|\mathcal{F}u(\zeta)| \leq C\,(1+\|\zeta\|)^{-k}e^{s_K(\mathrm{Im}\,\zeta)}.$$

$\boxtimes$

Vamos agora ver duas aplicações deste resultado.

Aplicação 1: Toda distribuição é localmente igual a soma finita de derivadas de funções contínuas.

Localmente distribuição é soma de $D^\alpha f$, f contínua!

Proposição: Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Logo $\exists\, N \in \mathbb{N}_0$ tal que $u = (I-\Delta)^N f$, $f \in C(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Vimos que $\exists\, C > 0$ e $k \in \mathbb{N}_0$ (k a ordem de u) tal que

$$|\mathcal{F}u(\xi)| \leq C(1+\|\xi\|)^k, \; \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Seja $g(\xi) := (1+\|\xi\|^2)^{-N}\mathcal{F}u(\xi)$, para um certo $N > \frac{n+k}{2}$. Logo $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Assim,

$f := \mathcal{F}^{-1}(g)$ é contínua e $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = 0$. Além disso,

$$(I-\Delta)^N f = (I-\Delta)^N \mathcal{F}^{-1}(g) = \mathcal{F}^{-1}\left((1+\|\xi\|^2)^N g(\xi)\right) =$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left((1+\|\xi\|^2)^N(1+\|\xi\|^2)^{-N}\mathcal{F}u(\xi)\right) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}u(\xi)) = u \Rightarrow \boxed{u = (I-\Delta)^N f}$$

$\blacksquare$

Corolário: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $K \subset\subset \Omega$. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então $\exists\, f \in C(\Omega)$ tal

que $(I-\Delta)^N f = u$ numa vizinhança de K.

Demo: Seja $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\chi(x) \equiv 1$ para $x \in U$, U vizinhança aberta de K. Logo

$\chi u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Assim, $\exists\, \tilde{f} \in C(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi u = (I-\Delta)^N \tilde{f}$. Portanto

$$u|_U = (\chi u)|_U = ((I-\Delta)^N \tilde{f})|_U = (I-\Delta)^N(\tilde{f}|_U).$$

$\blacksquare$

Assim a função procurada é $f := \tilde{f}|_\Omega$.

Aplicação 2: Todo operador diferencial com coeficientes constantes tem solução fundamental.

Proposição: Seja $c \neq 0$ e $P(D) = cD_n^m + \sum\limits_{j=0}^{m-1} P_j(D')D_n^j$, $D' = (D_1, \dots, D_{n-1})$, um operador diferencial linear de ordem $m \in \mathbb{N}$ com coeficientes constantes. Logo $P(D)$ tem uma solução fundamental em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Demonstração: O símbolo de $P(D)$ é

$$P(\xi) = c\,\xi_n^m + \sum_{j=0}^{m-1} P_j(\xi')\,\xi_n^j, \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Consideremos para cada $\eta' \in \mathbb{R}^{n-1}$ fixo, o polinômio $\xi_n \in \mathbb{C} \mapsto P(\eta', \xi_n)$. Seja $D(\eta')$ o conjunto das m raízes deste polinômio. Como $D(\eta')$ tem m-elementos (podem ser repetidos), então no intervalo $[-m-1, m+1]$, podemos encontrar $\tau(\eta') \in [-m-1, m+1]$ tal que

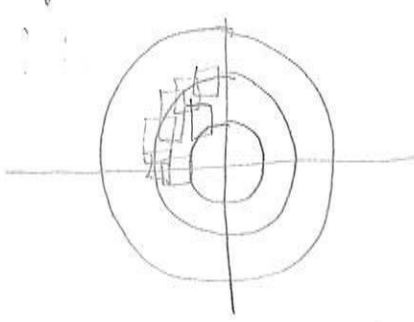
$$|\tau(\eta') - \operatorname{Im}(\lambda(\eta'))| > 1, \quad \forall\, \lambda(\eta') \in D(\eta')$$

Como as raízes de $\xi_n \mapsto P(\eta', \xi_n)$ dependem continuamente de η, podemos achar um cubo $U(\eta') \subset \mathbb{R}^{n-1}$ que contém η' tal que $|\tau(\eta') - \operatorname{Im}(\lambda(\xi'))| > 1$, $\forall\, \xi' \in U(\eta')$ e $vol(U(\eta')) \leq 1$.

Sabemos que $\mathbb{R}^{n-1} = \bigcup_{\eta' \in \mathbb{R}^{n-1}} U(\eta')$. Como $\mathbb{R}^{n-1} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \overline{B_{j+1}(0)} \setminus B_j(0)$, $\overline{B_{j+1}(0)} \setminus B_j(0)$ são compactos, então $\overline{B_{j+1}(0)} \setminus B_j(0)$ é igual a união de finitos $U(\eta')$. Assim, podemos escolher $(\eta_j')_{j \in \mathbb{N}}$ tal que

1) $\mathbb{R}^{n-1} = \bigcup_{j=1}^{\infty} U(\eta_j')$

2) Se $K \subset\subset \mathbb{R}^{n-1}$, então K intersecta finitos conjuntos $U(\eta_j')$.



Definimos $V_1 := U(\eta_1')$, $V_k := U(\eta_k') \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} V_j$. Logo

1) $\mathbb{R}^{n-1} = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$

2) Se $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, então K intersecta finitos V_j

3) $\{V_j\}$ são disjuntos

Sejam Z_k, $Z \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{C}$ definidos como $Z_k := V_k \times (\mathbb{R} + i\,\tau(\eta_k'))$, $k \in \mathbb{N}$, $Z := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_k$.

Para cada $\zeta = (\xi', \zeta_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{C}$, temos

$$|P(\zeta)| = |P(\xi', \zeta_n)| = |c| \prod_{\lambda(\xi') \in D(\xi')} |\zeta_n - \lambda(\xi')| \geq |c| \prod_{\lambda(\xi') \in D(\xi')} |\operatorname{Im} \zeta_n - \operatorname{Im} \lambda(\xi')|$$

Se $\zeta \in Z$, então $\xi' \in U_k$ e $\zeta_n = \xi_n + i\,\tau(\eta_k')$. Logo $|\operatorname{Im} \zeta_n - \operatorname{Im} \lambda(\xi')| = |\tau(\eta_k') - \operatorname{Im} \lambda(\xi')| \geq 1$.

Assim, $|P(\zeta)| \geq |c|$, $\forall \zeta \in Z$.

Vamos agora definir $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ da seguinte forma: Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então

$$E(\phi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Z \frac{\mathcal{F}\phi(\zeta)}{P(-\zeta)}\,d\zeta = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{Z_k}\frac{\mathcal{F}\phi(\zeta)}{P(-\zeta)}\,d\zeta = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{V_k}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathcal{F}\phi(\xi',\xi_n+i\tau(\eta_k'))}{P(-\xi',-\xi_n-i\tau(\eta_k'))}\,d\xi'\,d\xi_n.$$

Notemos que pelo que provamos anteriormente, existem $C^\phi>0$ e $d>0$ tais que

$$|\mathcal{F}\phi(\zeta)| \leq C^\phi\left(1+\|(\xi',\xi_n+i\tau(\eta_k'))\|\right)^{-n-1}e^{d|\tau(\eta_k')|} \leq C^\phi e^{d(m+1)}\left(1+\|(\xi',\xi_n)\|\right)^{-n-1}.$$

Note que C^ϕ pode ser escolhido como soma de $\|D^\alpha\phi\|_{L^1}$

d depende do suporte de ϕ $\left(S_K(\tau(\eta_k')) \leq \sup_{x\in \mathrm{supp}\,\phi}\|x\|\,|\tau(\eta_k')| \leq d\,|\tau(\eta_k')|\right)$.

Logo $\left|\frac{\mathcal{F}\phi(\zeta)}{P(-\zeta)}\right| \leq \tilde{C}\left(1+\|(\xi',\xi_n)\|\right)^{-n-1} \in L^1$.

Logo $|E(\phi)| \leq \tilde{C}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+\|(\xi',\xi_n)\|\right)^{-n-1}d\xi'\,d\xi_n < \infty$. Logo E está bem definido.

Vemos também que E é linear (simples de ver) e contínuo, pois se $\phi_m \to 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\mathrm{supp}\,\phi_m \subset K \subset\subset \mathbb{R}^n$, $\forall m$, para um compacto K, e $D^\alpha\phi_m \to 0$ uniformemente, $\forall \alpha$. Logo $E(\phi_n) \to 0$.

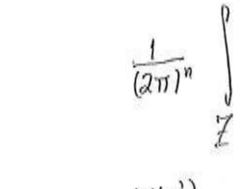
Logo $C^{\phi_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e d pode ser escolhida como uma constante.

Por fim,

$$P(D)E(\phi) = E(P(-D)\phi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Z\frac{\mathcal{F}(P(-D)\phi)}{P(-\zeta)}\,d\zeta = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Z\frac{P(-\zeta)\,\mathcal{F}\phi(\zeta)}{P(-\zeta)}\,d\zeta =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_Z\mathcal{F}\phi(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{V_k}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}\phi(\xi',\xi_n+i\tau(\eta_k'))\,d\xi_n\right)d\xi' =$$

Teorema de Cauchy na variável n



Tomando $R\to\infty$ concluímos

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{V_k}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}\phi(\xi',\xi_n)\,d\xi_n\,d\xi' = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}\phi(\xi)\,d\xi = \phi(0) = \delta(\phi).$$

$\boxtimes$

Teorema: (Teorema de Ehrenpreis-Malgrange) Todo operador diferencial com coeficiente constante tem uma solução fundamental em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Demo: Seja $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial de ordem m.

Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um isomorfismo. Definimos

$P(AD) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (AD)^\alpha$, $(AD)_j = \sum_{k=1}^n A_{jk} D^k \Rightarrow P(AD) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (AD)_1^{\alpha_1} \dots (AD)_n^{\alpha_n}$.

$P(A\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (A\xi)^\alpha$ o símbolo de $P(AD)$

Logo $P(A\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha (A_{1n}\xi_n)^{\alpha_1} \dots (A_{nn}\xi_n)^{\alpha_n}$ + termos ξ_n^j, $j < m$

$$= \underbrace{\left(\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha A_{1n}^{\alpha_1} \dots A_{nn}^{\alpha_n} \right)}\xi_n^m + \text{termos } \xi_n^j,\ j < m.$$

$$= P_m(A_{1n}, \dots, A_{nn})\,\xi_n^m = P_m(A_n)\,\xi_n^m$$

Como $P_m(\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha \xi^\alpha$ é um polinômio, podemos escolher A tal que $P_m(A_n) \neq 0$. (Basta que a n-ésima coluna não seja uma raiz de P_m)

Vimos que $\exists\, F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $P(AD)F = \delta$. Seja $B := {}^t A$.

Vimos que $\partial_j (u(Ax)) = \sum_{k=1}^n a_{kj} (\partial_k u)(Ax) = (({}^t A \partial) u)(Ax)$. Logo

$P(D)F(Bx) = (P({}^t B D) F)(Bx) = (P(AD)F)(Bx) = \delta(Bx) = |\det B|^{-1}\delta$.

$$\Big(\delta(Bx)\phi(x) = \int \underset{y}{\delta(Bx)}\phi(x)\,dx \underset{y = Bx}{=} \int \delta(y)\phi(B^{-1}y)|\det B^{-1}|\,dy = |\det B|^{-1}\phi(0)$$

Portanto $|\det B|\,F(Bx) = |\det B|\,B^* F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é a solução fundamental de $P(D)$ $\boxtimes$

Vamos agora estudar os Teoremas de Paley-Wiener. Faremos uma versão mais simples (Rudin).

<u>Vimos</u>: Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, supp $u \subset K \subset\subset \mathbb{R}^n$, e u tem ordem k, então $\mathcal{F}u$ se estende a uma função holomorfa em $\mathbb{C}^n$, $\exists\, c > 0$ tal que

$$|\mathcal{F}u(\zeta)| \leq c\,(1+\|\zeta\|)^k\, e^{S_K(\operatorname{Im}\zeta)}.$$

Em particular, se $K \subset B_R(0)$, então $|S_K(\operatorname{Im}\zeta)| = |\sup_{x\in K} \langle x, \operatorname{Im}\zeta\rangle| \leq \sup_{x\in K} \|x\|\,\|\operatorname{Im}\zeta\| \leq R\,\|\operatorname{Im}\zeta\|$. Logo

$$\odot \quad |\mathcal{F}u(\zeta)| \leq c\,(1+\|\zeta\|)^k\, e^{R\|\operatorname{Im}\zeta\|}.$$

Por outro lado, se $u \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, supp $u \subset K \subset\subset \mathbb{R}^n$, então $\mathcal{F}u$ se estende a uma função holomorfa em $\mathbb{C}^n$, $\exists\, c > 0$ tal que

$$|\mathcal{F}u(\zeta)| \leq c\,(1+\|\zeta\|)^{-k}\, e^{S_K(\operatorname{Im}\zeta)}.$$

Em particular, se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e supp $u \subset B_R(0)$, então para todo $k \in \mathbb{N}_0$, temos

$$\odot\odot \quad |\mathcal{F}u(\zeta)| \leq c_k\,(1+\|\zeta\|)^{-k}\, e^{R\|\operatorname{Im}\zeta\|}.$$

Vamos demonstrar a volta de $\odot$ e $\odot\odot$.

<u>Teorema Paley-Wiener</u>: 1) Seja $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa que satisfaz a seguinte condição:

"Para todo $N \in \mathbb{N}_0$, $\exists\, c_N > 0$ e $r > 0$ (r independe de N) tal que $|f(z)| \leq c_N (1+\|z\|)^{-N} e^{r\|\operatorname{Im} z\|}$"

Logo $\exists\, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que supp $\phi \subset B_r(0)$ e $f = \mathcal{F}\phi$.

2) Seja $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa que satisfaz a seguinte condição:

"$\exists\, C > 0$, $r > 0$ e $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $|f(z)| \leq C(1+\|z\|)^N e^{r\|\operatorname{Im} z\|}$".

Logo $\exists\, u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tal que supp $\phi \subset B_r(0)$ e $f = \mathcal{F}u$.

Para a demonstração, precisamos de um lema preparatório:

Lema: Seja $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa que se anula em $\mathbb{R}^n$. Logo $f \equiv 0$.

Demo: Seja $z_j = x_j + i y_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $z_j \in \mathbb{C}$.

Sabemos que se $\tilde{f}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa e $\tilde{f}^{-1}(0)$ tem ponto de acumulação, então $\tilde{f} \equiv 0$. Assim, se $\tilde{f}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então $\tilde{f} \equiv 0$.

Como $x_1 \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \forall x_1 \Rightarrow f(z_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \forall z_1$ ($z_1 \mapsto f(z_1, \dots)$ é holomorfa)

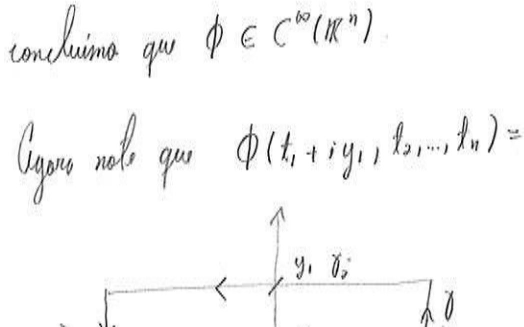
Como $x_2 \mapsto f(z_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \forall x_2 \Rightarrow f(z_1, z_2, \dots, x_n) = 0, \forall z_2$ ($z_2 \mapsto f(z_1, z_2, \dots)$ é holomorfa)

$\vdots$

Seguindo, concluímos que $f(z_1, \dots, z_n) = 0, \forall z_1, \dots, z_n$ $\blacksquare$

Demo do Teorema: 1) Seja $\phi(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it\cdot x} f(x)\,dx$. Como $(1 + \|x\|)^N f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\forall N$, concluímos que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Agora note que $\phi(t_1 + i y_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i t_1(x_1 + i y_1) + \dots + i t_n x_n} f(x_1 + i y_1, x_2, \dots, x_n)\,dx$.



Seja $z \mapsto g(z) = e^{i t_1 z + i t_2 x_2 + \dots + i t_n x_n} f(z, x_2, \dots, x_n)$. Logo g é analítica. Como $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$ e $\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_3 \text{ ou } \gamma_4} g(z)\,dz = 0$,

concluímos que $\phi(t_1 + i y_1, t_2, \dots, t_n) = \phi(t_1, t_2, \dots, t_n)$, ou seja,

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i t_1 (x_1 + i y_1) + \dots + i t_n x_n} f(x_1 + i y_1, x_2, \dots, x_n)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i t_1 x_1 + \dots + i t_n x_n} f(x_1, \dots, x_n)\,dx$$

Aplicando o mesmo argumento nas outras coordenadas, obtemos

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + iy)\, e^{it(x+iy)} \frac{dx}{(2\pi)^n}, \quad \forall y \in \mathbb{C}^n.$$

Observemos agora que se $y = \frac{\lambda \xi}{|\xi|}$, então $\xi.(x+iy) = \xi.x + i\frac{\lambda \xi}{|\xi|}.\xi = \xi.x + i\lambda|\xi|$. Logo

$$|f(x+iy)e^{i\xi(x+iy)}| \leq c_N(1+\|x+iy\|)^{-N}e^{r\|y\| - \lambda|\xi|}$$
$$\leq c_N(1+\|x\|)^{-N}e^{\lambda(r-|\xi|)}.$$

Logo $|\Phi(\xi)| \leq c_{n+1}e^{\lambda(r-|\xi|)}\int_{\mathbb{R}^n}(1+\|x\|)^{-n-1}dx$, $\forall \lambda$.

Se $|\xi| > r$, tomando $\lambda \to \infty$, obtemos $\phi(\xi) \equiv 0$. Logo $\operatorname{supp}\phi \subset B_r(0)$.

Por fim, se $\phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i\xi x}\frac{dx}{(2\pi)^n}$, então $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\phi(\xi)e^{-ix\xi}d\xi$. Como

$f(z)$ e $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(\xi)e^{-iz\xi}d\xi$ são iguais em $\mathbb{R}^n$, concluímos que $f(z) = \int_{\mathbb{R}^n}e^{-iz\xi}\phi(\xi)d\xi$.

2) Sabemos que $|f(x)| \leq C(1+\|x\|)^N$, $x \in \mathbb{R}^n$. Logo $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $f = \mathcal{F}(u)$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Seja $h \in C_c^\infty(B_1(0))$ tal que $\int h\,dx = 1$. Definimos $h_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^n}h(\frac{\xi}{\varepsilon})$, para $\varepsilon > 0$, e $f_\varepsilon(z) = f(z)\mathcal{F}(h_\varepsilon)(z)$.

Como $\operatorname{supp} h_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$, temos $|h_\varepsilon(z)| \leq C_N(1+\|z\|)^{-N}e^{\varepsilon\|\operatorname{Im} z\|}$, $\forall N \in \mathbb{N}_0$, em que c_N são constantes positivas para $z \in \mathbb{C}^n$. Logo

$$|f_\varepsilon(z)| \leq \tilde{c}_N(1+\|z\|)^{-N}e^{(r+\varepsilon)\|\operatorname{Im} z\|}.$$

Portanto, $\exists\ \Phi_\varepsilon \in C_c^\infty(B_{r+\varepsilon}(0))$ tal que $f_\varepsilon = \mathcal{F}(\Phi_\varepsilon)$.

Seja $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{supp}\mathcal{F}(\psi) \cap B_r(0) = \phi$. Logo $\mathcal{F}(\psi)\Phi_\varepsilon = 0$, para ε pequeno.

Observemos que a) $\int|f(x)\psi(x)|dx \leq c\int(1+\|x\|)^{N-N-n-1}(1+\|x\|)^{N+n+1}|\psi(x)|dx \leq$
$c\left(\int(1+\|x\|)^{-n-1}dx\right)\|(1+\|x\|)^{N+n+1}|\psi(x)|\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty \Rightarrow f\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

b) $\mathcal{F} h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \mathcal{F}(h(\frac{x}{\varepsilon}))(\xi) = \mathcal{F}(h)(\varepsilon \xi)$

c) $\| \mathcal{F} h_\varepsilon(x) \|_{L^\infty} \leq \| h_\varepsilon \|_{L^1} = 1$

d) $\mathcal{F} h_\varepsilon(\xi) = \mathcal{F}(h)(\varepsilon\xi) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \mathcal{F}(h)(0) = \int h(x)dx = 1.$

Logo

$$u(\mathcal{F}(\psi)) = (\mathcal{F}u)(\psi) = f(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(x)\psi(x)}_{\in L^1 \text{ por a)}} dx \underset{\text{uso b), c) e d)}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathcal{F}(h_\varepsilon)(x)\, \psi(x)\, dx =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\mathcal{F}(\phi_\varepsilon)(x)}_{= f_\varepsilon(x)} \psi(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x)\, \mathcal{F}\psi(x)\, dx = 0.$$ Logo $\operatorname{supp}(u) \subset B_r(0)$.

<u>Outra forma:</u> $f_\varepsilon(x) \longrightarrow f(x)$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Logo $\mathcal{F}^{-1}(f_\varepsilon) \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}(f)$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Em particular, como $\operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1}(f_\varepsilon) \subset B_{r+\varepsilon}(0)$, concluímos que $\operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1}(f) \subset B_{r+\varepsilon}(0)$, $\forall \varepsilon$.

Logo $\operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1}(f) = \operatorname{supp} u \subset B_r(0)$.

Por fim, como $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, concluímos que $z \in \mathbb{C}^n \longmapsto u(e^{-iz\cdot x})$ é holomorfa.

Como $f(\xi) = \mathcal{F}u(\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, temos $f(z) = \mathcal{F}u(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$, ou seja,

$$f(z) = u(e^{-iz\cdot x})$$ $\blacksquare$