Convolução

O que já vimos?

Dados funções $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ e $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, definimos $f * g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ por

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$$

Vimos que $f*g$ está sempre bem definida para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Convolução é muito útil para aproximações! Como definir para distribuições? Imitando funções

Note que $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy = T_f(g(x-\cdot))$

Logo é razoável definir convolução da seguinte maneira

Definição: Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definimos $u*\phi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ por

$$u*\phi(x) = u(\phi(x-\cdot)) = u(T_x \circ S(\phi)),$$

em que $S(\phi)(y) = \phi(-y)$ e $T_x(\phi)(y) = \phi(y-x)$. Logo $T_x \circ S(\phi)(y) = S(\phi)(y-x) = \phi(x-y)$

Conclusão: Se $u = T_f$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então $u*\phi(x) = T_f * \phi(x) = f*\phi(x)$.

Exemplo: $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Quanto vale $\delta_0 * \phi$?

Resposta: $\delta_0 * \phi(x) = \delta_0(\phi(x-\cdot)) = \phi(x-0) = \phi(x)$. Logo $\delta_0 * \phi = \phi$.

Historicamente, até onde eu saiba, a primeira vez que Schwartz pensou na definição da Delta de Dirac foi como a identidade da convolução.

Outro exemplo: $\delta_a * \phi$. $\delta_a * \phi(x) = \delta_a(\phi(x-\cdot)) = \phi(x-a) = T_a\phi(x)$

Teorema: Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (ou $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$). Logo

1) $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2) $T_a(u*\phi) = (T_a u) * \phi = u * (T_a \phi)$

3) $\partial^\alpha(u*\phi) = (\partial^\alpha u) * \phi = u * (\partial^\alpha \phi)$

4) $\operatorname{supp}(u*\phi) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp}\phi$ $\quad (A+B := \{a+b \in \mathbb{R}^n : a \in A \text{ e } b \in B\})$.

Demonstração: Faremos a demonstração apenas para o caso $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. (Para o caso $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, os argumentos são similares)

1 e 3)

Vamos começar observando que se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(T^*_{te_j}\phi - \phi\right) = \partial_j \phi$, em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. (Lembremos que $T^*_{te_j}\phi = \phi \circ T_{te_j}$. Logo $T^*_{te_j}\phi(x) = \phi(x+te_j)$). De fato, se $\operatorname{supp}\phi := K \subset\subset \mathbb{R}^n$, $|t| \leq 1$, então $\operatorname{supp}(T^*_{te_j}\phi) = K - te_j \subset K + [-1,1]e_j \subset\subset \mathbb{R}^n$. Usamos que a soma de conjuntos compactos é um compacto. Isto vale pois se $s: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dado por $s(x,y) = x+y$, então se K e L são compactos, então $K \times L$ é compacto. Logo $s(K\times L) = K+L$ é compacto.

Por fim, se $|t| \leq 1$, então

$$\left|\partial^\alpha\left(\tfrac{1}{t}(T^*_{te_j}\phi - \phi)\right) - \partial^\alpha\partial_j\phi\right| = \left|\tfrac{1}{t}\left(\partial^\alpha\phi(x+te_j) - \partial^\alpha\phi(x)\right) - \partial_j\partial^\alpha\phi(x)\right| =$$

$$\left|\int_0^1 \partial_j\partial^\alpha\phi(x+t\theta e_j)\,d\theta - \partial_j\partial^\alpha\phi(x)\right| = \int_0^1 \left|\partial_{x_j}\partial_x^\alpha\phi(x+t\theta e_j) - \partial_{x_j}\partial_x^\alpha\phi(x)\right| d\theta \leq$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sup_{\theta\in[0,t]} \left|\partial_{x_j}\partial^\alpha\phi(x+\theta e_j) - \partial_{x_j}\partial^\alpha\phi(x)\right| \xrightarrow{t\to 0} 0,$$ pois $\partial^\alpha\phi$ é uniformemente contínua.

Observemos que

$$\frac{1}{t}\left(u*\phi(x+te_j) - u*\phi(x)\right) = \frac{1}{t}\left(u(\phi(x+te_j-y)) - u(\phi(x-y))\right) = u\left(\frac{1}{t}\left(\phi(x-y+te_j) - \phi(x-y)\right)\right)$$

Seja $\psi_x(y) = \phi(x-y)$. Logo $\frac{1}{t}\left(\psi_x(y-te_j) - \psi(y)\right) \longrightarrow -(\partial_j\psi_x)(y)$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo

$$\frac{1}{t}\left(\phi(x-y+te_j) - \phi(x-y)\right) \longrightarrow -\partial_{y_j}(\phi(x-y)) = (\partial_j\phi)(x-y).$$

Concluímos que

$$\partial_{x_j}(u*\phi)(x) = u\left((\partial_{x_j}\phi)(x-y)\right) = u*\partial_{x_j}\phi.$$

Observemos que $u*\partial_{x_j}\phi = u\left((\partial_j\phi)(x-y)\right) = u\left(-\partial_{y_j}(\phi(x-y))\right) = (\partial_j u)(\phi(x-y)) = (\partial_j u)*\phi.$

Logo obtemos $\partial_j(u*\phi) = (\partial_j u)*\phi = u*(\partial_j\phi)$. Por indução, isto implica que para todo $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$, temos

$$\partial^\alpha(u*\phi) = (\partial^\alpha u)*\phi = u*(\partial^\alpha\phi).$$

Observemos que $u*\phi$ é contínua. Assim $\partial^\alpha(u*\phi) = (\partial^\alpha u)*\phi$ é contínua $\forall\alpha$. Portanto $u*\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Para provar esta observação basta observar que se $x_n\to x$, então $(y\mapsto\phi(x_n-y))\xrightarrow{n\to\infty}(y\mapsto\phi(x-y))$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

pois

$$\operatorname{supp}(\phi(x_n-y)) = x_n - \operatorname{supp}\phi \subset \underbrace{\overline{B_R(0)} - \operatorname{supp}\phi}_{\subset\subset\mathbb{R}^n}$$, em que $R>0$ é tal que $x_n\in\overline{B_R(0)}$, $\forall n$.

e $\sup_{y\in\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha\phi(x_n-y)-\partial^\alpha\phi(x-y)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, pois $\partial^\alpha\phi$ é uniformemente contínua.

Logo $\lim_{n\to\infty} u*\phi(x_n) = \lim_{n\to\infty} u(\phi(x_n-y)) = u(\phi(x-y)) = u*\phi(x).$

2) Basta observar que

$$T_a(u*\phi)(x) = u*\phi(x-a) = u(\phi(x-a-y)) = u((T_a\phi)(x-y)) = u*(T_a\phi)(x)$$

$$u(\phi(x-a-y)) = u((y\mapsto\phi(x-y))\circ T_a) = u(T_{-a}(y\mapsto\phi(x-y))) = (T_a u)(\phi(x-y)) = (T_a u)*\phi(x).$$

Logo $T_a(u*\phi) = (T_a u)*\phi = u*(T_a\phi)$.

(Usamos: $T_h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ é dado por $T_h(x) = x+h$.
Definimos $T_h: C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\to C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ por $T_h\phi(x) = \phi(x-h)$
$T_h:\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ por $T_h u(\phi) = u(T_{-h}(\phi))$. Logo, se $u=f$, então $T_h(f)(\phi) = (T_h f)(\phi)$).

4) Seja $x\notin\operatorname{supp}u+\operatorname{supp}\phi$. Como $\operatorname{supp}(y\mapsto\phi(x-y)) = x-\operatorname{supp}\phi$, concluímos que se $z\in\operatorname{supp}u\cap\operatorname{supp}(\phi(x-y))$, então $z = x-w$, $w\in\operatorname{supp}\phi$ e $z\in\operatorname{supp}u$. Logo $x = z+w\in\operatorname{supp}u+\operatorname{supp}\phi$. ABSURDO. Assim, $\operatorname{supp}(u)\cap\operatorname{supp}(y\mapsto\phi(x-y)) = \emptyset$. Portanto $u*\phi(x) = u(\phi(x-y)) = 0$.

Logo $u * \phi$ se anula em $(\mathrm{supp}(u) + \mathrm{supp}(\phi))^c$. Se este conjunto for aberto, isto implica que $(\mathrm{supp}(u*\phi))^c \supset (\mathrm{supp}(u) + \mathrm{supp}(\phi))^c \Rightarrow \mathrm{supp}(u*\phi) \subset \mathrm{supp}(u) + \mathrm{supp}(\phi)$.

Assim, basta provar que $\mathrm{supp}(u) + \mathrm{supp}\,\phi$ é fechado. Isto é verdadeiro devido ao seguinte resultado

__Lema:__ Seja $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, e $L \subset \mathbb{R}^n$ um compacto e um fechado, respectivamente. Logo $K + L$ é fechado.

__Demonstração:__ Seja $(x_n)_n \subset K$ e $(y_n) \subset L$ tal que $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = z$.

Como K é compacto, $\exists\, (x_{n_j})_j \subset K$ tal que $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = \tilde{x} \in K$. Assim, $\lim_{j\to\infty} y_{n_j} = \lim_{j\to\infty} [(x_{n_j} + y_{n_j}) - x_{n_j}] = z - \tilde{x}$. Logo $z - \tilde{x} \in L \Rightarrow z \in \tilde{x} + L \subset K + L$ ▨

__Teorema (Caracterização de convoluções):__ Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Logo a função $u * : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por $u*(\phi) = u * \phi$ satisfaz as seguintes propriedades:

1) É contínua e linear

2) Comuta com translações, isto é, $T_a(u*\phi) = u*(T_a\phi)$, $\forall a \in \mathbb{R}^n$

Por outro lado, seja $U : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função que satisfaz

1) É contínua e linear

2) Comuta com translações, isto é, $T_a U = U T_a$, $\forall a \in \mathbb{R}^n$

Logo $\exists!\, u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $U = u*$. Esta distribuição é dada por $u = \delta \circ U \circ S$.

__Demo:__ __1º Parte:__

1) $u * (\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha u * \phi + \beta u * \psi$. (É linear).

Sejam A e B compactos de $\mathbb{R}^n$. Logo $K := A + (-B)$ é um compacto de $\mathbb{R}^n$. Logo $\exists\, c > 0$ e $k \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$|u(\phi)| \leq c \|\phi\|_{C^k}, \ \forall \phi \in C_c^\infty(K).$$

Seja $x \in A$ e $\phi \in C_c^\infty(B)$. Logo $\mathrm{supp}(y \mapsto \phi(x-y)) = x - \mathrm{supp}\,\phi \subset A + (-B) = K$. Assim,

$$|u * \phi(x)| = |u(\phi(x-y))| \leq c \|\phi\|_{C^k}.$$

Da mesma forma, $|\partial^\alpha(u*\phi)(x)| = |u((\partial^\alpha\phi)(x-y))| \leq c\|\partial^\alpha\phi\|_{C^k} = c\|\phi\|_{C^{k+|\alpha|}}$.

$$\text{Logo } \|u*\phi\|_{A,m} = \max_{|\alpha|\leq m}\left(\sup_{x\in A}|\partial^\alpha(u*\phi)(x)|\right) \leq c\|\phi\|_{C^{k+m}}, \ \forall \phi \in C_c^\infty(A).$$

Assim, se $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ converge a 0, então $\exists A \subset\subset \mathbb{R}^n$ tal que supp $\phi_n \subset A, \forall n$.

Seja $B \subset\subset \mathbb{R}^n$. Logo $\exists c > 0, k \in \mathbb{N}_0$ tal que $\|u*\phi\|_{A,m} \leq c\|\phi\|_{C^{k+m}}, \forall \phi \in C_c^\infty(A)$.

Portanto, $\lim_{n\to\infty}\|u*\phi_n\|_{A,m} = 0$, já que $\lim_{n\to\infty}\|\phi_n\|_{C^{k+m}} = 0$. Logo $u* : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é contínua. (É contínua)

2) Já vimos (OK)

<u>2ª Parte</u>: Seja $u := \delta \circ U \circ S$. Logo $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Pois se $(\phi_n)_n \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então

$\phi_n \to 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow S(\phi_n) \to 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow U(S(\phi_n)) \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \delta \circ U \circ S(\phi_n) \to 0$ em $\mathbb{C}$.

Logo u é contínua. A linearidade é trivial. Agora observemos que

$$u*\phi(x) = u(\phi(x-y)) = \delta\circ U\circ S(\phi(x-y)) = \delta\circ U(\phi(x+y)) = \delta\circ U(T_{-x}\phi) =$$

$$\delta\circ T_{-x}\circ U(\phi) = \delta(U(\phi)(y+x)) = U(\phi)(x). \text{ Logo } u* = U.$$

Se existisse outro $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $v* = U$, então teríamos

$$\left.\begin{array}{l} u*(S\phi)(0) = u((S\phi)(0-y)) = u(\phi) \\ \quad \| \\ U(S\phi)(0) \\ \quad \| \\ v*(S\phi)(0) = v((S\phi)(0-y)) = v(\phi) \end{array}\right\} \underline{\underline{u = v}}.$$

$\blacksquare$

Vamos agora ver $u*\phi$ como uma distribuição. Para tal distribuição, o seguinte resultado é válido.

<u>Teorema</u>: Para $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$(u*\phi)(\psi) = u(S\phi * \psi).$$

Para tanto, vamos demonstrar inicialmente um lema.

Lema: Seja $\Omega \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n$, $A: \mathbb{R}^m \to C_c^\infty(\Omega)$ uma função com as seguinte propriedades:

(a) $\exists\ T \subset\subset \mathbb{R}^m$ tal que $A(t) = 0$ se $t \notin T$.

(b) $\exists\ K \subset\subset \Omega$ tal que $\operatorname{supp} A(t) \subset K$, $\forall t \in \mathbb{R}^m$.

(c) Para todo $k \in \mathbb{N}_0$ e $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $\|s - t\| < \delta \Rightarrow \|A(t) - A(s)\|_{C^k} < \varepsilon$.

Logo $\int A(t)dt : \Omega \to \mathbb{C}$ definido como $\left(\int A(t)dt\right)(x) = \int A(t)(x)dt$ pertence a $C_c^\infty(\Omega)$. Além disso, para todo $\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\mu \circ A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ pertence a $C_c(\mathbb{R}^m)$ e

$$\mu\left(\int A(t)dt\right) = \int (\mu \circ A)(t)dt.$$

Demo: Primeiro observamos que para todo $x \in \Omega$, a função $t \in \mathbb{R}^m \mapsto A(t)(x) \in \mathbb{C}$ é contínua. De fato, dado $\varepsilon > 0$

$$|A(t)(x) - A(s)(x)| \leq \|A(t) - A(s)\|_{C^k} < \varepsilon \text{ se } \underset{(\text{por } (c))}{|t - s| < \delta}.$$ Como esta função tem suporte compacto, vemos $\underset{(\text{por } (a))}{}$ que $t \mapsto A(t)(x) \in C_c(\mathbb{R}^m)$. Logo é integrável.

Seja $S_h := h^m \sum_{t \in \mathbb{Z}^m} A(ht)$, $h > 0$. Por (a), esta soma é finita. Note que

$$h^m \sum_{t \in \mathbb{Z}^m} \min\{\operatorname{Re} A(y)(x) : y \in \prod_{j=1}^m [ht_j - \tfrac{h}{2}, ht_j + \tfrac{h}{2}]\} \leq \operatorname{Re}(S_h(x)) \leq h^m \sum_{t \in \mathbb{Z}^m} \max\{\operatorname{Re} A(y)(x) : y \in \prod_{j=1}^m [ht_j - \tfrac{h}{2}, ht_j + \tfrac{h}{2}]\}$$

Como $h^m \sum_{t \in \mathbb{Z}^m} (\max - \min) \leq h^m \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z}^m \\ A \neq 0}} \varepsilon \leq \varepsilon \operatorname{vol}(\tilde{T})$, $T \subset \tilde{T} = [-R, R]^m$.

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists\ \delta > 0 \ldots$, escolho $h < \delta$

$h^m \# = \operatorname{vol}$; $\# = \frac{\operatorname{vol}}{h^m}$

Logo $\exists\ \tilde{\delta} > 0$ tal que se $|h| < \tilde{\delta}$, então $\left|S_h(x) - \int A(t)(x)dt\right| < \varepsilon$, $\forall x$

Concluímos que $S_h \to \int A(t)dt$ uniformemente. Como $\operatorname{supp}(S_h) \subset K$, $\forall h$, concluímos que $S_h \to \int A(t)dt$ em $C_c(\Omega)$. O mesmo argumento implica que $\partial^\alpha S_h \to \int \partial^\alpha A(t)\, dt$ em $C_c(\Omega)$.

Logo $S_h \to \int A(t)dt$ em $C_c^\infty(\Omega)$ e $\int A(t)dt \in C_c^\infty(\Omega)$.

Seja $\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Logo se $t_n \to t$, então $A(t_n) \to A(t)$ em $C_c^\infty(\Omega)$ (Por b) e c)). Assim

$$\mu(A(t_n)) \to \mu(A(t)).$$

Logo $t \mapsto \mu \circ A(t)$ é contínua. Por a), temos que $\mu \circ A \in C_c(\mathbb{R}^m)$.

Logo
$$\mu\left(\int A(t)\,dt\right) = \mu\left(\lim_{h\to 0^+} S_h\right) = \lim_{h\to 0^+} \mu(S_h) = \lim_{h\to 0^+} h^m \sum_{t\in\mathbb{Z}^m} (\mu\circ A)(ht) = \int (\mu\circ A)(t)\,dt \quad \blacksquare$$

Observação: Maneira simples de entender o teorema: Se $A \in C_c(\mathbb{R}^m, C_c^\infty(K))$, então podemos definir
$$\int A(t)\,dt \in C_c^\infty(\Omega) \quad e \quad \mu\left(\int A(t)\,dt\right) = \int \mu\circ A(t)\,dt.$$

Demonstração do Teorema: Seja $A : \mathbb{R}^n \to C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por
$$A(x) = \left(y \mapsto \psi(x)\phi(x-y)\right)$$

Logo a) Se $x \notin \operatorname{supp}\psi$, então $A(x) = 0$

b) $\operatorname{supp}(A(x)) \subset \bigcup_{x\in\operatorname{supp}\psi}(x - \operatorname{supp}\phi) \subset \operatorname{supp}\psi - \operatorname{supp}\phi \subset\subset \mathbb{R}^n$.

c) $\left|\partial_y^\alpha(\psi(x)\phi(x-y)) - \partial_y^\alpha(\psi(\tilde{x})\phi(\tilde{x}-y))\right| = \left|\psi(x)(\partial_y^\alpha\phi)(x-y) - \psi(\tilde{x})\partial_y^\alpha\phi(\tilde{x}-y)\right| < \varepsilon$, se $|x-\tilde{x}|<\delta$.

Basta usar que $(x,y)\mapsto \psi(x)\partial^\alpha\phi(x-y)$ tem suporte compacto. Logo é uniformemente contínua.

Assim,
$$(\mu*\phi)(\psi) = \int (\mu*\phi)(x)\psi(x)\,dx = \int \mu(\phi(x-y))\psi(x)\,dx = \int \mu(\underbrace{\psi(x)\phi(x-y)}_{A(x)})\,dx = \mu\Big(\overbrace{y\mapsto \int \psi(x)\phi(x-y)\,dx}^{\int A(x)dx}\Big) =$$
$$\mu\left(y\mapsto \int \psi(x)(S\phi)(y-x)\,dx\right) = \mu\left(y\mapsto (S\phi*\psi)(y)\right) = \mu(S\phi*\psi) \quad \blacksquare$$

Corolário: Sejam $\mu\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi,\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo $(\mu*\varphi)*\psi = \mu*(\varphi*\psi)$. Analogamente, podemos provar que se $\mu\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $(\mu*\varphi)*\psi = \mu*(\varphi*\psi)$.

Obs: $\underbrace{(\mu*\varphi)}_{\in C^\infty} * \underbrace{\psi}_{C_c^\infty} = \underbrace{\mu}_{\in\mathcal{D}'} * \underbrace{(\varphi*\psi)}_{\in C_c^\infty}$

Demo: $\mu*(\varphi*\psi)(x) = \mu\left(y\mapsto(\varphi*\psi)(x-y)\right)$

$(\mu*\varphi)*\psi(x) = \mu*\varphi(\underbrace{y\mapsto\psi(x-y)}_{:=\, y\mapsto\sigma(y)}) = \mu(S\varphi*\sigma) = \mu\left(y\mapsto(\varphi*\psi)(x-y)\right)$

Concluímos que $\mu*(\varphi*\psi)(x) = (\mu*\varphi)*\psi(x)$.

Observemos que
$$S\varphi*\sigma(y) = \int S\varphi(y-z)\sigma(z)\,dz = \int \varphi(z-y)\psi(x-z)\,dz \underset{\tilde{z}=x-z \Leftrightarrow z = x-\tilde{z}}{=} \int \varphi(x-z-y)\psi(z)\,dz = \varphi*\psi(x-y)$$

$\blacksquare$

Algumas consequências da convolução:

Lema: Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \phi(x)dx = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, definimos $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$. Para todo $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $u * \phi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\lim_{\varepsilon \to 0^+} u * \phi_\varepsilon = u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Demo: Observemos que $S\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int (S\phi)(x)dx = \int \phi(-x)dx = \int \phi(x)dx = 1$. Além disso, $(S\phi)_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}(S\phi)(\frac{x}{\varepsilon}) = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi(\frac{-x}{\varepsilon}) = S(\phi_\varepsilon)(x)$. Logo $S(\phi_\varepsilon) * \psi = (S\phi)_\varepsilon * \psi \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} \psi$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Concluímos que para $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$(u * \phi_\varepsilon)(\psi) = u(S(\phi_\varepsilon) * \psi) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} u(\psi).$$

∎

Proposição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Logo $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$, isto é:

Para todo $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\exists (u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\lim_{j \to \infty} u_j = u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Demo: Seja $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma exaustão de Ω por compactos: $\cdot\, \Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ $\cdot\, K_j \subset \operatorname{int}(K_{j+1})$. Sejam $\chi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ funções tais que $0 \leq \chi_j \leq 1$, $\chi_j \equiv 1$ numa vizinhança de K_j, $\forall j$. Por fim, seja $\phi \in C_c^\infty(B_1(0))$ tal que $\phi \geq 0$ e $\int \phi\, dx = 1$. Definimos $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$. Vamos escolher ε_j tal que $\lim_{j \to \infty} \varepsilon_j = 0$ e $\operatorname{supp} \chi_j + \operatorname{supp}(\phi_{\varepsilon_j}) \subset \operatorname{supp} \chi_j + \overline{B_{\varepsilon_j}(0)} \subset \Omega$.

Assim podemos definir $u_j := (\chi_j u) * \phi_{\varepsilon_j}$, já que $\chi_j u \in \mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Observemos que $u_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\operatorname{supp} u_j \subset \underbrace{\operatorname{supp}(\chi_j u) + \operatorname{supp} \phi_{\varepsilon_j}}_{\text{soma de compactos. Logo é compacto}} \subset \Omega$. Logo $u_j \in C_c^\infty(\Omega)$.

Vamos terminar mostrando que $\lim_{j \to \infty} u_j = u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Seja $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo

$$u_j(\psi) = ((\chi_j u) * \phi_{\varepsilon_j})(\psi) = (\chi_j u)(S(\phi_{\varepsilon_j}) * \psi) = u(\chi_j(S(\phi_{\varepsilon_j}) * \psi))$$

Como $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp} \psi \subset\subset \Omega$. Logo $\operatorname{supp} \psi \subset K_j$, $\forall j \geq j_0$, em que $j_0 \in \mathbb{N}$. Assim, para $j \geq j_0$,

$$S(\phi_{\varepsilon_j}) * \psi \subset \operatorname{supp} \psi + \overline{B_{\varepsilon_j}(0)} \subset K_{j_0} + \overline{B_{\varepsilon_{j_0}}(0)} \subset\subset \Omega.$$

Novamente como $K_{j_0} + \overline{B_{\varepsilon_{j_0}}(0)} \subset\subset \Omega$, $\exists j_1 \in \mathbb{N}$ t.q. se $j \geq j_1$, então $K_{j_0} + \overline{B_{\varepsilon_{j_0}}(0)} \subset K_j$.

Concluímos que $\chi_j(S(\phi_{\varepsilon_j}) * \psi) = S(\phi_{\varepsilon_j}) * \psi$ para $j \geq j_1$, pois $\chi_j \equiv 1$ em K_j.

Assim,

$$\lim_{j\to\infty} u_j(\psi) = \lim_{j\to\infty} u(\chi_j(S(\phi_{\varepsilon_j})*\psi)) = \lim_{j\to\infty} u(S(\phi_{\varepsilon_j})*\psi) = u(\psi).$$ ▨

Corolário 1 Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto convexo e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é tal que $\nabla u = 0$ $(\partial_j u = 0, \forall j = 1,\dots,n)$, então $u = c$, em que $c \in \mathbb{C}$ é uma constante.

Demo: Seja $u_j := \chi_j u * \phi_{\varepsilon_j}$ tal que $u_j \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Logo

$$\partial_{x_k}(u_j) = (\partial_{x_k}(\chi_j u)) * \phi_{\varepsilon_j} = ((\partial_{x_k}\chi_j)u) * \phi_{\varepsilon_j}$$

Seja $U \overset{\text{ab convexo}}{\subset} \Omega$ tal que $\bar{U} \subset\subset \Omega$. Sabemos que $\operatorname{supp}(\partial_{x_k} u_j) \subset \operatorname{supp}(\partial_{x_k}\chi_j) + \operatorname{supp}(\phi_{\varepsilon_j})$. Como $\bar{U}$ é compacto, $\exists\, j_0$ t.q. $\bar{U} \subset \operatorname{int}(K_j)$, $\forall j > j_0$. Seja $d := d(\bar{U}, \operatorname{int}(K_{j_0+1})^c) > 0$. Se j for grande $(j \geq \tilde{j}_0 \geq j_0)$, então $\varepsilon_j < d$. Logo $\operatorname{supp}(\partial_{x_k} u_j) \subset \operatorname{supp}(\partial_{x_k}\chi_j) + \operatorname{supp}(\phi_{\varepsilon_j}) \subset (\operatorname{int}(K_j))^c + \overline{B_{\varepsilon_j}(0)} \subset (\operatorname{int} K_{\tilde{j}_0})^c + \overline{B_d(0)}$,
$j \geq \tilde{j}_0$

ou seja $\operatorname{supp}(\partial_{x_k} u_j) \cap U = \phi$. Assim $\partial_{x_k} u_j|_U = 0$ para $j \geq \tilde{j}_0$, $\forall k$. Concluímos que, como u_j é C^∞ e U é aberto convexo, $u_j|_U$ é uma constante. Assim $u|_U = \lim_{j\to\infty} u_j|_U$ é uma constante. Concluímos que u é C^∞ e para todo $x \in \Omega$, $\exists$ um aberto $U_x \ni x$ tal que $u|_{U_x}$ é uma constante. Seja $x_0 \in \Omega$ e

$$C_{x_0} := \{x \in \Omega : u(x) = u(x_0)\}.$$

Como C_{x_0} é aberto, fechado (e não vazio), $\Omega = C_{x_0}$. Logo $u = $ cte. ▨

Corolário: Seja $A, B : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ aplicações lineares e sequencialmente contínuas: $((u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ é tal que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, então $\lim_{j\to\infty} A(u_j) = A(u)$ e $\lim_{j\to\infty} B(u_j) = B(u)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$). Logo se $A|_{C_c^\infty(\Omega)} = B|_{C_c^\infty(\Omega)}$, então $A = B$.

Demo: Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $(u_j)_j \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Assim,

$$A(u) = \lim_{j\to\infty} A(u_j) = \lim_{j\to\infty} B(u_j) = B(u).$$

Concluímos, assim, que $\exists!$ operadores $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, $\psi : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ (multiplicação por ψ) 11.10

e etc... que sejam sequencialmente contínuos.

Frase histórica (Peano): "Eu tenho certeza que alguma coisa deve ser encontrada. Deve existir uma noção de função generalizada que são para as funções o que os números reais são para os racionais". (G. Peano, 1912)

Convolução entre duas Distribuições:

Nosso objetivo agora é definir $u * v$, quando u e $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Vamos sempre assumir que uma delas tem suporte compacto. Basearemo-nos no Rudin.

Proposição: Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. (ou $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$). Vamos definir $U : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por $U(\phi) = u * (v * \phi)$. Logo

1) U é contínuo e linear
2) U comuta com translações: $U \circ T_h = T_h \circ U$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

Demo: Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

1) U é linear pois $u*$ e $v*$ são lineares.
U é contínuo, pois se $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\phi_j \to \phi$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $v*\phi_j \to v*\phi$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como $\operatorname{supp}\phi_j \subset K \subset\subset \mathbb{R}^n$, $\forall j$, então $\operatorname{supp} v*\phi_j \subset K + \operatorname{supp}(v) \subset\subset \mathbb{R}^n$, $\forall j$. Logo $v*\phi_j \to v*\phi$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Assim $u*(v*\phi_j) \to u*(v*\phi)$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2) $U \circ T_h(\phi) = u*(v*(T_h\phi)) = u*(T_h(v*\phi)) = T_h(u*(v*\phi)) = T_h \circ U(\phi)$.

O caso $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é análogo. Basta usar que $u* : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é contínuo. ■

(Não provamos, mas é análogo ao que já fizemos).

Corolário: $\exists!$ distribuição $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $U(\phi) = w*\phi$, $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ela é dada por

$$w(\phi) = \delta \circ U \circ S(\phi) = u*(v*(S(\phi)))(0) = u(S(v*S(\phi)))$$

Definição: Sejam $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ distribuições tais que ao menos uma tem suporte compacto.

Definimos $u * v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ como a única distribuição tal que $(u*v)*\phi = u*(v*\phi)$, $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ela é dada por $(u*v)(\phi) = u*(v*(S(\phi)))(0)$.

Proposição: (Propriedades de convolução): Sejam $u, v, w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

(a) Se u ou v pertence a $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $u*v = v*u$

(b) Se ou u ou v pertence a $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $\operatorname{supp}(u*v) \subset \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(v)$

(c) Se duas das distribuições u, v e w têm suporte compacto, então $(u*v)*w = u*(v*w)$.

(d) Para todo $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, temos $D^\alpha u = (D^\alpha \delta)*u$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Em particular, $\delta * u = u$

(e) Se ou u ou v pertence a $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $D^\alpha(u*v) = (D^\alpha u)*v = u*(D^\alpha v)$.

Demonstração:

(a) Sejam ϕ e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo

$$(u*v)*(\phi*\psi) = u*(v*(\phi*\psi)) = u*((v*\phi)*\psi) = u*(\psi*(v*\phi)) = (u*\psi)*(v*\phi)$$

$$(v*u)*(\phi*\psi) = (v*u)*(\psi*\phi) = v*(u*(\psi*\phi)) = v*((u*\psi)*\phi) = v*(\phi*(u*\psi)) = (v*\phi)*(u*\psi)$$
$$= (u*\psi)*(v*\phi).$$

Usamos definição de $u*v$ e que $\tilde{\phi}*\tilde{\psi} = \tilde{\psi}*\tilde{\phi}$, se ambas são funções C^∞ e uma delas tem suporte compacto.

Notemos que $(u*v)*(\phi*\psi) = ((u*v)*\phi)*\psi$ e $(v*u)*(\phi*\psi) = ((v*u)*\phi)*\psi$. Assim, concluímos que

$$\boxed{((u*v)*\phi)*\psi = ((v*u)*\phi)*\psi}$$

Já vimos que se u_1 e $u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ são tais que $u_1 * \phi = u_2 * \phi$, $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $u_1 = u_2$.

Desta maneira,

$$((u*v)*\phi)*\psi = ((v*u)*\phi)*\psi,\ \forall \phi, \forall \psi \Rightarrow (u*v)*\phi = (v*u)*\phi,\ \forall \phi$$

$$\Rightarrow u*v = v*u.$$

b) Suponha que $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Logo

$(u * v)(\phi) = u(S(v * (S\phi)))$

Mas $\operatorname{supp}(S(v * S\phi)) = -\operatorname{supp}(v * S\phi) \subset -(\operatorname{supp} v - \operatorname{supp} \phi) = \operatorname{supp} \phi - \operatorname{supp} v$.

Logo, se $\underbrace{(\operatorname{supp}(\phi) - \operatorname{supp} v) \cap \operatorname{supp} u = \emptyset}$, então $(u * v)(\phi) = 0$.

É verdade $\Leftrightarrow$ $x - y \neq z$, $\forall y \in \operatorname{supp}(v)$, $x \in \operatorname{supp} \phi$, $z \in \operatorname{supp} u \Leftrightarrow x \neq y + z \Leftrightarrow \operatorname{supp} \phi \cap (\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v) = \emptyset$

Assim, $u * v \big|_{\underbrace{(\operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(v))^c}_{\text{aberto, pois } \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(v) \text{ é fechado}}} = 0 \Rightarrow \operatorname{supp}(u * v) \subset \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(v)$.

Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, o mesmo resultado vale, pois $\operatorname{supp}(u * v) = \operatorname{supp}(v * u)$.

c) Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo

$(u * (v * w)) * \phi = u * ((v * w) * \phi) = u * (v * (w * \phi))$ $\quad ((\tilde{u} * \tilde{v}) * \phi = \tilde{u} * (\tilde{v} * \phi);\ \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n))$.

Se $w \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $w * \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo

$((u * v) * w) * \phi = (u * v) * \underbrace{(w * \phi)}_{\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} = u * (v * (w * \phi))$.

<u>Conclusão</u>: $(u * (v * w)) * \phi = ((u * v) * w) * \phi;\ \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u * (v * w) = (u * v) * w$.

Se $w \notin \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Logo

$u * (v * w) \underset{\text{com}}{=} u * (w * v) \underset{\text{com}}{=} (w * v) * u \underset{\substack{\text{anterior} \\ (u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))}}{=} w * (v * u) \underset{\text{com}}{=} w * (u * v) \underset{\text{com}}{=} (u * v) * w$.

d) Observemos que $D^\alpha \phi = D^\alpha(\delta * \phi) = (D^\alpha \delta) * \phi$. Assim,

$(D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi) = u * D^\alpha(\delta * \phi) = u * ((D^\alpha \delta) * \phi) = (u * D^\alpha \delta) * \phi$.

Logo $(D^\alpha u) * \phi = (u * D^\alpha \delta) * \phi$, $\forall \phi \Rightarrow D^\alpha u = u * D^\alpha \delta \underset{\text{com}}{=} D^\alpha \delta * u$.

e) $D^\alpha(u * v) \underset{D^\alpha \tilde{u} = (D^\alpha \delta) * \tilde{u}}{=} (D^\alpha \delta) * (u * v) = (D^\alpha \delta * u) * v = (D^\alpha u) * v$.

$D^\alpha(u * v) = ((D^\alpha \delta) * u) * v = (u * D^\alpha \delta) * v = u * (D^\alpha \delta * v) = u * D^\alpha v$.

$\blacksquare$

Por fim, vamos provar um último resultado que será útil adiante.

Proposição: Seja $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sendo que u ou v tem suporte compacto. Logo

$$\text{sing supp}(u * v) \subset \text{sing supp}(u) + \text{sing supp}(v)$$

Demonstração: Seja $A := \text{sing supp}(u)$ $\quad A_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < \delta\}$

$B := \text{sing supp}(v)$ $\quad B_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, B) < \delta\}$

Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que, $\int \phi(x)\,dx = 1$ e $\text{supp}\,\phi \subset B_{\delta/4}(0)$. Sejam

$\alpha := \chi_{A_{\delta/2}} * \phi$ e $\beta := \chi_{B_{\delta/2}} * \phi$, em que χ_A e χ_B são as funções características de A e B.

Logo α e $\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(\mathcal{D}' * C_c^\infty \mapsto C^\infty)$. Além disso,

Se $x \in A_{\delta/4}$, então $\alpha(x) = \int \chi_{A_{\delta/4}}(y)\phi(x-y)\,dy = \int_{A_{\delta/4}} \phi(x-y)\,dy = \int_{B_{\delta/4}(x)} \phi(z)\,dz = 1$.

Se $x \notin A_{\frac{3\delta}{4}}$, então $\alpha(x) = \int_{A_{\delta/4}} \phi(x-y)\,dy = 0$, pois $|x-y| > \frac{\delta}{2}$

Da mesma forma, se $x \in B_{\delta/4}$, então $\beta(x) = 1$. Se $x \notin B_{\frac{3\delta}{4}}$, então $\beta(x) = 0$.

Vemos que $u = \alpha u + \underbrace{(1-\alpha)u}_{\in C^\infty}$ e $v = \beta v + \underbrace{(1-\beta)v}_{C^\infty}$.

Vamos assumir que $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. (O caso $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ segue de $u*v = v*u$) Logo

$$u * v = (\alpha u) * (\beta v) + \underbrace{(\alpha u) * (1-\beta)v}_{\in C^\infty} + \underbrace{(1-\alpha)u * \beta v}_{\in C^\infty} + \underbrace{(1-\alpha)u * (1-\beta)v}_{\in C^\infty}$$

Logo $\text{sing supp}(u * v) = \text{sing supp}(\alpha u) * (\beta v) \subset \text{supp}(\alpha u) * (\beta v) \subset \text{supp}(\alpha u) + \text{supp}(\beta v)$

$\subset A_\delta + B_\delta$, $\forall \delta > 0$.

Se $x \notin A + B$, então $d := d(x, A+B) > 0$. Se $x \in A_{d/2} + B_{d/2}$, então $x = a + r_1 + b + r_2$, $\|r_1\| < \frac{d}{2}$, $\|r_2\| < \frac{d}{2}$, $a \in A$ e $b \in B$. Logo $\|x - (a+b)\| < d$. ABSURDO. Logo $x \notin A_{d/2} + B_{d/2}$

Concluímos que $\text{sing supp}(u * v) \subset \bigcap_{\delta > 0} (A_\delta + B_\delta) = A + B = \text{sing supp}\, u + \text{sing supp}\, v$ $\boxed{\text{B}}$

Solução Fundamental

Definição: Seja $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial linear com coeficientes constantes ($a_\alpha \in \mathbb{C}$). Uma solução fundamental de $P(x, D)$ é uma distribuição $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz $PE = \delta$. $\left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha E = \delta \right)$.

Exemplos: 1) $E = H(x)$ é uma solução fundamental para o operador $P = \frac{d}{dx}$, pois $PE = \frac{d}{dx} H = \delta$.

2) $E = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ é uma solução fundamental para o operador $P = \frac{d^2}{dx^2}$, pois

$PE = \frac{d^2}{dx^2} E(x)$. Mas $\frac{dE}{dx}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2 E}{dx^2}(x) = \delta_0$.

2') $E(x) = \frac{|x|}{2}$ também é uma solução fundamental para o operador $P = \frac{d^2}{dx^2}$, pois

$PE = \frac{d^2}{dx^2} \frac{|x|}{2}$. Mas $\frac{d}{dx} \frac{|x|}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{|x|}{2}\right) = \delta_0$.

Vemos acima que a solução fundamental nem sempre é única. De fato, se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é tal que $Pu = 0$ e E é uma solução fundamental de P, então $P(E+u) = PE + Pu = \delta$, ou seja, $E+u$ também é solução fundamental de P.

A solução fundamental sempre existe, $\forall P$. (Teorema de Ehrenpreis - Malgrange)

Para que servem as soluções fundamentais?

Aplicação 1: Resultados de Existência e Unicidade de EDP's.

Teorema: Seja $P(D)$ um operador linear com coeficientes constantes e $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ uma solução fundamental de P. Logo

1) $P(E*f) = f, \quad \forall f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$
2) $u = E*Pu \quad , \quad \forall u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

Demonstração: 1) $$P(E*f) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha (E*f) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha (D^\alpha E)*f = \Big(\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha E\Big)*f =$$
$$= (PE)*f = \delta * f.$$

2) $u = E*Pu = P(E*u) = (PE)*u = \delta * u = u.$ $\blacksquare$

Corolário: 1) (Existência) Seja $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Logo $\exists\, u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ solução de $Pu = f$.
2) (Unicidade) Seja $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Se $u, v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ são soluções de $Pu = Pv = f$, então $u = v$

Demo: 1) Seja $u = E*f$. Logo u é solução de $Pu = f$, pois $P(E*f) = f$. $\blacksquare$
2) Como $u, v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, temos $u = E*Pu = E*f = E*Pv = v$.

Observação: Não garantimos unicidade de $Pu = f$ se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$
Não garantimos existência de $Pu = f$ se $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

Aplicação 2: Resultado de Regularidade de EDP's

Definição: Seja P um operador diferencial com coeficientes constantes. Dizemos que uma distribuição $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é uma parametriz de P se existir $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $PE = \delta + \psi$.

Observação: Toda solução fundamental de P é uma parametriz de P.

Teorema: Seja P um operador diferencial com coeficientes constantes. Se P possui uma parametriz E tal que $\operatorname{singsupp} E = \{0\}$ $\left(E|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \right)$, então para todo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, temos

$$\operatorname{sing\,supp} u = \operatorname{sing\,supp}(Pu), \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

Corolário: Se P é um operador diferencial com coeficiente constante e P possui uma parametriz C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, então se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$ são tais que $Pu = f$, então $u \in C^\infty(\Omega)$.

Demo: Sabemos que sing supp (u) = sing supp (Pu) = sing supp $(f) = \emptyset$. Logo $u \in C^\infty(\Omega)$ $\square$

Observação:
Mais geralmente, se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $f|_V \in C^\infty(V)$, então $u|_V \in C^\infty(V)$.

Em geral, podemos definir a seguinte importante classe de operadores.

Definição: Seja $P(x,D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha$, $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ para todo $|\alpha| \le m$. Dizemos que $P(x,D)$ é um operador hipoelíptico se a seguinte propriedade é válida:

Para todo aberto $V \subset \Omega$, temos que sing supp (u) = sing supp (Pu), $\forall u \in \mathcal{D}'(V)$.

Proposição: Seja $P(D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, um operador linear com coeficientes constantes e $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ uma solução fundamental de $P(D)$. Se $P(D)$ é um operador hipoelíptico, então $E|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Demonstração: Sabemos que, por definição de solução fundamental, que $P(D)E = \delta$. Logo

$$\text{sing supp } E = \text{sing supp } (P(D)E) = \text{sing supp } (\delta) = \{0\}.$$

$\square$

Logo $E|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ é C^∞

Vamos agora provar nosso Teorema.

Demonstração do Teorema: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto.

1) sing supp $(Pu) \subset$ sing supp (u).

Se $x \notin$ sing supp (u), então $\exists$ um aberto V tal que $x \in V \subset \Omega$ e $u|_V$ é $C^\infty(V)$. Logo $(Pu)|_V = P(u|_V)$ é $C^\infty(V)$. Assim, $x \notin$ sing supp (Pu). Concluímos que

$$\text{sing supp}(u)^c \subset \text{sing supp}(Pu)^c \Rightarrow \boxed{\text{sing supp}(Pu) \subset \text{sing supp}(u)}$$

2) sing supp $(u) \subset$ sing supp (Pu)

Caso 1 u tem suporte compacto.

Como $u \in \mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então temos

$$E * (Pu) = P(E * u) = (PE) * u = \delta * u + \psi * u = u + \overbrace{\psi * u}^{\in C^\infty}.$$

Logo sing supp $(u) =$ sing supp $(E * (Pu) - \psi * u) \subset$ sing supp $(E * P(u)) \subset$ sing supp $E +$ sing supp $(P(u))$
$= \{0\} +$ sing supp $(Pu) =$ sing supp (Pu).

Caso 2 u não necessariamente com suporte

Seja $x \in \Omega \setminus$ sing supp (Pu) e $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\chi(x) = 1$ para x numa vizinhança aberta de x. Logo $P(\chi u) = P(u)$ numa vizinhança de x. Portanto $P(\chi u)$ é C^∞ numa vizinhança aberta de x.

Como $\chi u \in \mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, concluímos que sing supp $(\chi u) =$ sing supp $(P(\chi u))$ pelo caso 1. Assim, χu é C^∞ numa vizinhança de x. Isto implica que u é C^∞ numa vizinhança de x. Logo $x \notin$ sing supp (u).

Conclusão: $\Omega \setminus$ sing supp $(Pu) \subset \Omega \setminus$ sing supp $(u) \Rightarrow$ sing supp $(u) \subset$ sing supp (Pu). ▨

Exemplos: 1) Laplaciano: Δ

Exemplo de solução fundamental $E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-n)c_n \|x\|^{n-2}}, & \text{se } n \neq 2. \\ \dfrac{1}{2\pi} \log \|x\|, & \text{se } n = 2 \end{cases}$

c_n é o volume da esfera unitária $(n-1)$-dimensional, $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Esta constante é dada por $c_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

Se $n = 1$, temos $\dfrac{1}{(2-1)\left(\frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(1/2)}\right)\|x\|^{-1}} = \dfrac{\|x\|}{1 \times \frac{2\pi^{1/2}}{\pi^{1/2}}} = \frac{1}{2}|x|$. Ou seja, reobtemos o resultado da aula passada.

Como $E|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, concluímos que o Laplaciano é hipoelítico.

Em particular, $\Delta u = f$, $f \in C^\infty(\Omega)$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ implica que $u \in C^\infty(\Omega)$.

(Generaliza o lema de Weyl: $u \in L^2(\Omega)$, $\Delta u = \phi \in C_c^2(\Omega)$ implica $u \in C^\infty(\Omega)$.)

(Usamos exercício 4.7 e 4.6 para determinar as soluções fundamentais).
D.K.

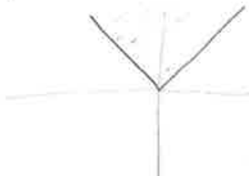
Exemplo 2: Equação do Calor: $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$

Exemplo de solução fundamental: $E(t,x) = H(t)\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$. Novamente vemos que $E|_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})$. Logo $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ é hypoelíptico, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$, $f \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, implica que $u \in C^\infty(\Omega)$.

(Usamos exercício 5.5, 8.5).

Exemplo 3: Equação da Onda Unidimensional: $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Exemplo de solução fundamental: $E(t,x) = \chi_V(t,x)$, em que $V := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : |x| < t\}$



Logo $E|_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}$ não é contínuo. Logo $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ <u>não é</u> hypoelíptico.

De fato, $\forall f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, temos $u(t,x) = f(t-x) + g(t+x)$ é solução de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. (Exercício).

Exemplo 4: A solução fundamental de $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$. Consideremos $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$.

Seja $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ e $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto, limitado, com bordo de classe C^1 que aponta para um dos lados de Ω. Logo $\varphi, \psi \in C^1(\overline{\Omega})$, temos

$$\int_\Omega \partial_x \varphi(z)\psi(z)\,dV = \int_\Omega \left[\partial_x(\varphi(z)\psi(z)) - \varphi(z)(\partial_x\psi(z))\right] dV = \int_{\partial\Omega} \varphi(z)\psi(z)\, n_x\, d\sigma - \int_\Omega \varphi(z)(\partial_x\psi(z))\,dV$$

$$\int_\Omega (\partial_y\varphi(z))\psi(z)\,dV = \int_{\partial\Omega} \varphi(z)\psi(z)\, n_y\, d\sigma - \int_\Omega \varphi(z)(\partial_y\psi(z))\,dV$$

Logo $$\int_\Omega (\partial_{\bar z}\varphi(z))\psi(z)\,dV = -\int_\Omega \varphi(z)(\partial_{\bar z}\psi(z))\,dV + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \varphi(z)\psi(z)(n_x(z) + i n_y(z))\,d\sigma(z)$$

Note que:

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(z)\psi(z)\,(n_x(z)+i\,n_y(z))\,d\sigma(z) = \int_{\partial\Omega}\varphi(\gamma(t))\psi(\gamma(t))(\gamma_2'(t)-i\gamma_1'(t))\,dt = -i\int_{\partial\Omega}\varphi(\gamma(t))\psi(\gamma(t))(\gamma_1'(t)+i\gamma_2'(t))\,dt$$

$$\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$$
$$n(\gamma(t))=(\gamma_2'(t),-\gamma_1'(t))$$
$$\gamma(t)=\gamma_1(t)+i\gamma_2(t)$$

$$= -i\int_{\partial\Omega}\varphi(\gamma(t))\psi(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Logo
$$\boxed{\int_{\Omega}\partial_{\bar z} f(z)\, g(z)\, dV = -\int_{\Omega} f(z)\,\partial_{\bar z} g(z)\, dV - \frac{i}{2}\int_{\partial\Omega} f(z) g(z)\, dz}$$

Corolário 1: (Teorema Integral de Cauchy). Se $f \in C^1(\bar\Omega)\cap \underset{\text{analíticas}}{A(\Omega)}$, então $\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0$.

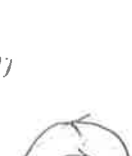
Demo: Basta escolher $g(z)\equiv 1$ e usar que $\partial_{\bar z} f = 0$. Logo

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = -i\int_{\Omega}(\partial_{\bar z} f(z) g(z) - f(z)\partial_{\bar z} g(z))\,dV = 0 .$$ ∎

Corolário 2: Uma solução fundamental de $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ é $\frac{1}{\pi z}$.

Demo: $\frac{1}{z}\in L^1(\mathbb{C})$, pois $\int_{B_R(0)}\frac{1}{|z|}\,dV = \int_{B_R(0)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^R dr\,d\theta = 2\pi R < \infty$.

Seja $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{C})\cong C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Logo $\operatorname{supp}\varphi\subset B_R(0)$. Seja $\Omega := B_R(0)\setminus B_\varepsilon(0)$. Assim,



$$\int_{\Omega}(\partial_{\bar z}\varphi(z))\frac{1}{z}\,dV = -\int_{\Omega}\varphi(z)\,\partial_{\bar z}\left(\frac{1}{z}\right)dV - \frac{i}{2}\int_{\partial\Omega}\varphi(z)\frac{1}{z}\,dz = -\frac{i}{2}\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\varphi(z)\frac{1}{z}\,dz$$

Seja $z = \varepsilon e^{i\theta}$
$dz = i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta$.
Logo
$$\int_{\Omega}(\partial_{\bar z}\varphi(z))\frac{1}{z}\,dV = +\frac{i}{2}\int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon e^{i\theta})\frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}}\,i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta = \frac{-1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta .$$

Logo
$$\partial_{\bar z}\left(\frac{1}{\pi z}\right)(\varphi) = \frac{-1}{\pi z}(\partial_{\bar z}\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{\pi}\int_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{\partial_{\bar z}\varphi(z)}{z}\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{+1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta = \varphi(0)$$
$$= \delta_0(\varphi)$$

Concluímos que $\partial_{\bar z}\left(\frac{1}{\pi z}\right) = \delta_0$.

Corolário 3: Seja $f \in C^\infty(\mathbb{C})$, e $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto limitado, com bordo C^1, tal que Ω está num lado de $\partial\Omega$. Logo a seguinte fórmula (Fórmula Integral de Pompeiu) é válida

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz - \frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \frac{\partial_{\bar z} f(z)}{z-\zeta}\,dz, \quad \forall\, \zeta \in \Omega.$$

Em particular, se f é analítica, então $\partial_{\bar z} f = 0$ e $f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz$.

Demo: Seja χ_Ω a função característica de Ω. Logo

$$\partial_x(f\chi_\Omega) = (\partial_x f)\chi_\Omega - f n_x \delta_{\partial\Omega} \quad \text{e} \quad \partial_y(f\chi_\Omega) = (\partial_y f)\chi_\Omega - f n_y \delta_{\partial\Omega}$$

Assim, $\partial_{\bar z}(f\chi_\Omega) = (\partial_{\bar z} f)\chi_\Omega - f\,\frac{1}{2}(n_x + i n_y)\,\delta_{\partial\Omega}$.

Logo se $E(z) = \frac{1}{\pi z}$, então

$$E * \partial_{\bar z}(f\chi_\Omega) = E * (\partial_{\bar z} f)\chi_\Omega - E * \left(f\,\tfrac{1}{2}(n_x + i n_y)\,\delta_{\partial\Omega}\right).$$

Assim,

$$E * \partial_{\bar z}(f\chi_\Omega) = (\partial_{\bar z} E) * (f\chi_\Omega) = \delta * f\chi_\Omega = f\chi_\Omega$$

$$E * (\partial_{\bar z} f)\chi_\Omega = \int E(\zeta - z)\,\partial_{\bar z} f(z)\,\chi_\Omega(z)\,dz = \int_\Omega \frac{1}{\pi(\zeta - z)}\partial_{\bar z} f(z)\,dz = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{\partial_{\bar z} f(z)}{z-\zeta}\,dz$$

$$E * \left(f\,\tfrac{1}{2}(n_x + i n_y)\,\delta_{\partial\Omega}\right) = \int_{\partial\Omega} E(\zeta - z)\,f(z)\,\tfrac{1}{2}\left(n_x(z) + i n_y(z)\right)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{1}{(\zeta - z)}\,f(z)\,dz \qquad \blacksquare$$

Obs: Se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, então

$$E * \left(\tfrac{1}{2}(n_x + i n_y) f\delta_{\partial\Omega}\right)(\varphi) = E\left(S\left(\left(\tfrac{1}{2}(n_x + i n_y) f\delta_{\partial\Omega}\right) * (S\varphi)\right)\right) = \frac{-i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\zeta} f(z)\,\varphi(z+\zeta)\,dz\,d\zeta$$

$$\tfrac{1}{2}(n_x + i n_y) f\delta_{\partial\Omega}\left(S\varphi(\zeta - z)\right) = \frac{-i}{2}\int_{\partial\Omega} f(z)\,\varphi(z-\zeta)\,dz \qquad = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{w-z}\,dz\right)\varphi(w)\,dw$$

Ok.

14. Transformada de Fourier

Idéia: Seja $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ uma transformação linear diagonalizável. Logo $\exists\, \mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)\subset\mathbb{R}^n$ base de $\mathbb{R}^n$ tal que $Ae_j=\lambda_j e_j$, $\lambda_j\in\mathbb{C}$. Assim, se $u\in\mathbb{R}^n$, então $u=\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n$, $\alpha_j\in\mathbb{C}$.

Seja $\partial_{x_j}: C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\to C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo uma "base" seriam funções $e^{x_j\xi_j}$, já que $\partial_{x_j}(e^{x_j\xi_j})=\xi_j e^{x_j\xi_j}$. Uma base para todos ∂_{x_j} seriam funções $e^{x_1\xi_1+\dots+x_n\xi_n}$. Logo se $u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $u(x)=$ "$\sum_{\xi}\alpha_\xi e^{x.\xi}$" $\cong \int_{\mathbb{R}^n}\alpha(\xi)e^{x.\xi}\,d\xi$. Como $e^{x\xi}$ cresce muito rapidamente se $\mathrm{Im}\,\xi\neq 0$, tomamos apenas funções $e^{ix.\xi}$, obtendo $u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\alpha(\xi)e^{ix.\xi}\,d\xi$.

Definição: Seja $u\in L^1(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier de u é a função $\mathcal{F}u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ definida como

$$\mathcal{F}u(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\xi}u(x)\,dx. \qquad (x.\xi:=x_1\xi_1+\dots+x_n\xi_n)$$

Exemplo: Seja $u=\chi_{[a,b]}$. Logo $\mathcal{F}(\chi_{[a,b]})=i\,\dfrac{e^{-ib\xi}-e^{-ia\xi}}{\xi}$, $\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]})=2\,\dfrac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}$.

Demo: $$\mathcal{F}u(\xi)=\int_{\mathbb{R}}e^{-ix\xi}\chi_{[a,b]}(x)\,dx=\int_a^b e^{-ix\xi}\,dx=\left.\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right|_a^b=\frac{e^{-ib\xi}-e^{-ia\xi}}{-i\xi}=\frac{i}{\xi}\left(e^{-ib\xi}-e^{-ia\xi}\right)$$

Se $a=-1$ e $b=1$, então $\mathcal{F}u(\xi)=\frac{i}{\xi}\left(e^{-i\xi}-e^{i\xi}\right)=\dfrac{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}{2i}\dfrac{2}{\xi}=2\,\dfrac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}$ ∎

Obs: $\mathcal{F}(\chi_{[a,b]})=$

Teorema: Seja $u\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Logo $\mathcal{F}u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ satisfaz as propriedades

3) $\mathcal{F}u$ é uniformemente contínua

2) $\lim_{|\xi|\to\infty}\mathcal{F}u(\xi)=0$: Dado $\varepsilon>0$, $\exists R>0$ tal que se $|\xi|\geq R$, então $|\mathcal{F}u(\xi)|<\varepsilon$.

1) $|\mathcal{F}u(\xi)|\leq\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, $\forall\,\xi\in\mathbb{R}^n$.

Demo: 1) $$|\mathcal{F}u(\xi)|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\xi}u(x)\,dx\right|\leq\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|\,dx=\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}^n.$$

2) Seja $u(x)=\underbrace{\chi_{[a_1,b_1]}(x_1)\cdots\chi_{[a_n,b_n]}(x_n)}_{\chi_R(x),\ R=\prod_{j=1}^n[a_j,b_j]}$. Logo $$\mathcal{F}u(\xi)=\left(\frac{e^{-ib_1\xi_1}-e^{-ia_1\xi_1}}{-i\xi_1}\right)\cdots\left(\frac{e^{-ib_n\xi_n}-e^{-ia_n\xi_n}}{-i\xi_n}\right)\xrightarrow[|\xi|\to\infty]{}0.$$

Sabemos que, dado $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, e $\varepsilon > 0$, $\exists\ v = \sum_{j=1}^{M} c_j \chi_{R_j}$ tal que $\|u - v\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Assim

$$|\mathcal{F}u(\xi)| \leq |\mathcal{F}(u-v)(\xi)| + |\mathcal{F}v(\xi)| \leq \|u-v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + |\mathcal{F}v(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\mathcal{F}v(\xi)|.$$

Seja $R > 0$ tal que se $|\xi| \geq R$, então $|\mathcal{F}v(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Logo para $|\xi| \geq R$, temos

$$|\mathcal{F}u(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

3) Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ R > 0$ t.q. se $|\xi| \geq R$, então $\int_{|x| \geq R} |u(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{4}$. Logo

$$|\mathcal{F}u(\xi) - \mathcal{F}u(\eta)| = \left|\int (e^{-ix\xi} - e^{-ix\eta})\, u(x)\,dx\right| = \left|\int e^{-ix\xi}(1 - e^{-ix(\eta-\xi)})\, u(x)\,dx\right| \leq$$

$$\int |1 - e^{-ix(\eta-\xi)}|\,|u(x)|\,dx = \int_{|x| \geq R} |1 - e^{-ix(\eta-\xi)}|\,|u(x)|\,dx + \int_{|x| \leq R} |1 - e^{-i(\eta-\xi)x}|\,|u(x)|\,dx \leq$$

$$2\int_{|x| \geq R} |u(x)|\,dx + \int_{|x| \leq R} |1 - e^{-i(\eta-\xi)x}|\,|u(x)|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{|x| \leq R} \left|ixz \int_0^1 e^{iz\theta x}\,d\theta\right| |u(x)|\,dx \leq$$

$$e^{izx} = 1 + x\int_0^1 iz e^{iz\theta x}\,d\theta = 1 + ixz\int_0^1 e^{iz\theta x}\,d\theta$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + R\,|\eta - \xi|\,\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon, \text{ se } |\eta - \xi| \leq \frac{\varepsilon}{2R\,\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}$$

Queremos agora escrever f como função de $\mathcal{F}(f)$.

Problema: Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\mathcal{F}(f)$ não pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$ necessariamente.

Solução: Vamos trabalhar com uma classe de funções bem comportada.

Definição: (Espaço de Schwartz). O conjunto $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ consiste nas funções $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $x \mapsto x^\alpha \partial_x^\beta u(x)$ é limitada, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Observação: Se $P(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\sum_{|\beta| \leq m} d_{\alpha\beta} x^\alpha\right) D^\beta$ um operador diferencial com coeficientes polinomiais. Logo se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $P(x,D)u$ é limitada. Por outro lado, se $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $P(x,D)u$ é limitada para todo $P(x,D)$ com coeficientes polinomiais, então $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definição (Convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). Seja $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ uma sequência de funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \| x^\alpha \partial_x^\beta \phi_n - x^\alpha \partial_x^\beta \phi \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Ou seja, $x^\alpha \partial_x^\beta \phi_n$ converge uniformemente a $x^\alpha \partial_x^\beta \phi$.

Proposição: As seguintes inclusões abaixo são válidas e contínuas:

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\exists R > 0$ tal que $\operatorname{supp} \phi \subset B_R(0)$. Logo

$$|x^\alpha \partial_x^\beta \phi(x)| \leq R^{|\alpha|} |\partial_x^\beta \phi(x)| \leq C R^{|\alpha|} < \infty, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Logo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então, por definição, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Devemos agora provar continuidade

$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ continuamente.

Seja $(\phi_n)_n \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo $\exists R > 0$ tal que $\operatorname{supp} \phi_n \subset B_R(0)$, $\lim_{n\to\infty} \| \partial^\alpha \phi_n - \partial^\alpha \phi \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \| x^\alpha \partial^\beta \phi_n - x^\alpha \partial^\beta \phi \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \lim_{n\to\infty} \| x^\alpha (\partial^\beta \phi_n - \partial^\beta \phi) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$R^{|\alpha|} \lim_{n\to\infty} \| \partial^\beta \phi_n - \partial^\beta \phi \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ continuamente

Seja $(\phi_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tais que $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Seja $K \subset\subset \mathbb{R}^n$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} \| \partial^\alpha \phi_n - \partial^\alpha \phi \|_{L^\infty(K)} \leq \lim_{n\to\infty} \| \partial^\alpha \phi_n - \partial^\alpha \phi \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

$\blacksquare$

Assim, $\lim_{n\to\infty} \partial^\alpha \phi_n = \partial^\alpha \phi$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposição: O conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: Dado $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\exists (\phi_n)_n \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi(x) = 1$ para todo $x \in B_1(0)$ e $0 \leq \chi \leq 1$

Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\phi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida como

$$\phi_n(x) = \chi\left(\frac{x}{n}\right)\phi(x).$$

Logo $\partial^\beta \phi_n(x) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial_x^\gamma \left(\chi\left(\frac{x}{n}\right)\right) \partial_x^{\beta-\gamma}\phi(x) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \left(\frac{1}{n}\right)^{|\gamma|} (\partial^\gamma \chi)\left(\frac{x}{n}\right) \partial_x^{\beta-\gamma}\phi(x) =$

$$\chi\left(\frac{x}{n}\right)\partial^\beta\phi(x) + \sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ \gamma \neq \beta}} \binom{\beta}{\gamma} n^{-|\gamma|} (\partial_x^\gamma \chi)\left(\frac{x}{n}\right)(\partial_x^{\beta-\gamma}\phi)(x)$$

Logo $\left|x^\alpha \partial^\beta \phi_n(x) - x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| = \left|\chi\left(\frac{x}{n}\right) x^\alpha \partial^\beta \phi(x) - x^\alpha \partial^\beta \phi(x) + \sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ \gamma \neq \beta}} \binom{\beta}{\gamma} n^{-|\gamma|} (\partial^\gamma\chi)\left(\frac{x}{n}\right)(\partial^{\beta-\gamma}\phi)(x)\right| \leq$

$$\left|\left(1-\chi\left(\tfrac{x}{n}\right)\right) x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| + \sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ \gamma \neq \beta}} \binom{\beta}{\gamma} n^{-|\gamma|} \left|(\partial^\gamma\chi)\left(\tfrac{x}{n}\right)\right| \left|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\phi(x)\right| \leq \left|\left(1-\chi\left(\tfrac{x}{n}\right)\right) x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| + \sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ \gamma \neq \beta}} \binom{\beta}{\gamma} n^{-|\gamma|} \|\partial^\gamma \chi\|_{L^\infty} \|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\phi\|_{L^\infty}$$

Mas $\left|\left(1-\chi\left(\frac{x}{n}\right)\right) x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| \leq \|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\|_{L^\infty(B_n(0)^c)} \leq \|(1+|x|^2)^{-1}(1+|x|^2) x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\|_{L^\infty(B_n(0)^c)} \leq$

$$\left.\begin{aligned} &(1+n^2)^{-1} \|(1+|x|^2) x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ &\sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ \gamma \neq \beta}} \binom{\beta}{\gamma} n^{-|\gamma|} \|\partial^\gamma \chi\|_{L^\infty} \|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\phi(x)\|_{L^\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}\right\} \|x^\alpha \partial^\beta \phi_n(x) - x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

<u>Proposição</u>: O conjunto $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$: Dado $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\exists (\phi_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

<u>Demonstração</u>: Já vimos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo dado $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\exists (\phi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\blacksquare$

<u>Conclusão</u>: As seguintes inclusões são contínuas e densas $\boxed{C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Por fim, observemos que um operador diferencial com coeficientes polinomiais, $P(x,D)$, é tal que $P(x,D): \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínuo. Em particular, $\varphi \in \mathcal{S} \mapsto x\varphi$, $\varphi \in \mathcal{S} \mapsto \partial_j \varphi \in \mathcal{S}$ é contínuo.

<u>Proposição</u>: Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo $x \mapsto x_j\varphi(x)$ e $x \mapsto \partial_j\varphi(x)$ também pertencem a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall\, 1 \leq j \leq n$.

Além disso, $M_{x_j}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \longmapsto x_j\varphi$ e $\partial_j: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \longmapsto \partial_j\varphi$ são contínuas.

Por indução, concluímos que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua. Portanto, se $P(x,D) = \sum_{|\alpha| \le m} \left(\sum_\beta d_{\alpha\beta} x^\beta \right) D^\alpha$, então $P(x,D): \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ continuamente.

Demonstração: $\varphi \mapsto x_j\varphi$

Basta ver que $x^\alpha \partial^\beta (x_j \varphi(x)) = \sum_{\sigma \le \beta} x^\alpha \partial^\sigma (x_j) \partial^{\beta-\sigma} \varphi(x)$. Logo

$$|x^\alpha \partial^\beta (x_j \varphi(x))| \le \sum_{\sigma \le \beta} \delta_{j,\sigma} \|x^\alpha \partial^{\beta-\sigma} \varphi\|_{L^\infty} < \infty. \Rightarrow \boxed{x_j \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$$

Além disso, se $\varphi_k \to \varphi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\|x^\alpha \partial^{\beta-\sigma}(\varphi_k - \varphi)\|_{L^\infty} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $\forall \alpha, \beta, \sigma$. Assim,

$\|x^\alpha \partial^\beta (x_j \varphi_k - x_j \varphi)\|_{L^\infty} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow x_j \varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_j \varphi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$\varphi \mapsto \partial_j \varphi$

Basta ver que $|x^\alpha \partial^\beta (\partial^j \varphi(x))| = |x^\alpha \partial^{\beta+\delta_j} \varphi(x)| \le C$, $\forall x$. $\Rightarrow \boxed{\partial_j \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$

Além disso, se $\varphi_k \to \varphi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\|x^\alpha \partial^\beta (\varphi_k - \varphi)\|_{L^\infty} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $\forall \alpha, \beta$. Assim,

$\|x^\alpha \partial^{\beta+\delta_j} (\varphi_k - \varphi)\|_{L^\infty} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $\forall \alpha, \beta \Rightarrow \partial_j \varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \partial_j \varphi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Como composição de aplicações lineares contínuas é contínua $\Rightarrow \varphi \longmapsto x^\alpha \partial^\beta \varphi$ é contínua.

Como soma de aplicações lineares contínuas é contínua $\Rightarrow \varphi \longmapsto P(x,D)\varphi$ é contínua. ∎

Proposição: (Propriedades Elementares da Transformada de Fourier). A transformada de Fourier define uma aplicação linear contínua de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua e linear. Para todo $1 \le j \le n$, temos

P1) $\mathcal{F}(D_j \phi)(\xi) = \xi_j (\mathcal{F}\phi)(\xi)$

P2) $\mathcal{F}(x_j \phi)(\xi) = -D_j (\mathcal{F}\phi)(\xi)$

P3) $\mathcal{F}(T_a \phi)(\xi) = e^{-i\xi a} (\mathcal{F}\phi)(\xi)$

P4) $\mathcal{F}(e^{iax} \phi)(\xi) = T_a (\mathcal{F}\phi)(\xi)$

Demonstração:

1) $\mathcal{F}(D_1\phi)(\xi) = \int e^{-ix\xi} D_1\phi(x)\,dx = \int e^{-ix_2\xi_2-\dots-ix_n\xi_n}\left(\int e^{-ix_1\xi_1} D_1\phi(x)\,dx_1\right)dx_2\dots dx_n$

Note que $\int e^{-ix_1\xi_1} D_1\phi(x)\,dx_1 = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} e^{-ix_1\xi_1}\frac{1}{i}(\partial_{x_1}\phi)(x)\,dx_1\right) = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{i}e^{-ix_1\xi_1}\phi(x)\Big|_{-R}^{R} - \frac{1}{i}\int_{-R}^{R}(-i\xi_1)e^{-ix_1\xi_1}\phi(x)\,dx_1\right) =$

$\frac{1}{i}\lim_{R\to\infty}\left(e^{-iR\xi_1}\phi(R) - e^{+iR\xi_1}\phi(-R)\right) + \xi_1\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1\xi_1}\phi(x)\,dx_1 = \xi_1\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1\xi_1}\phi(x)\,dx_1.$

Logo $\mathcal{F}(D_1\phi)(\xi) = \xi_1\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\phi(x)\,dx = \xi_1\mathcal{F}(\phi)(\xi)$. Para $j\neq 1$, é análogo

2) $\mathcal{F}(x_j\phi)(\xi) = \int e^{-ix\xi}x_j\phi(x)\,dx = \int(-D_j)(e^{-ix\xi}\phi(x))\,dx = -D_j\int e^{-ix\xi}\phi(x)\,dx = -D_j(\mathcal{F}\phi)(\xi)$

3) $\mathcal{F}(T_a\phi)(\xi) = \int e^{-ix\xi}\phi(x-a)\,dx \underset{y=x-a}{=} \int e^{-i(y+a)\xi}\phi(y)\,dy = e^{-ia\xi}\int e^{-iy\xi}\phi(y)\,dy = e^{-ia\xi}(\mathcal{F}\phi)(\xi)$

4) $\mathcal{F}(e^{iax}\phi(x))(\xi) = \int e^{-ix\xi}e^{iax}\phi(x)\,dx = \int e^{-ix(\xi-a)}\phi(x)\,dx = (\mathcal{F}\phi)(\xi-a) = T_a(\mathcal{F}\phi)(\xi)$

Por fim, devemos mostrar a continuidade:

Seja $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ suponha que $\phi_k\xrightarrow{k\to\infty}\phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Observemos que

$$|\xi^\alpha\partial^\beta\mathcal{F}(\phi)| = |\xi^\alpha\partial^\beta\mathcal{F}(\phi)| = |\xi^\alpha\mathcal{F}(x^\beta\phi)| = |\mathcal{F}(D^\alpha(x^\beta\phi))| \leq$$

$\int_{-\infty}^{\infty}|D^\alpha(x^\beta\phi(x))|\,dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|^2)^{-n}(1+|x|^2)^n|D^\alpha(x^\beta\phi(x))|\,dx \leq$

$\left(\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|^2)^{-n}\,dx\right)\|(1+|x|^2)^n D^\alpha(x^\beta\phi(x))\|_{L^\infty} \leq \int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|^2)^{-n}dx\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\||x|^{2j}D^\alpha(x^\beta\phi(x))\|_{L^\infty}$

Se $\phi_k\xrightarrow{k\to\infty}\phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\|x^\sigma D^\alpha(x^\beta(\phi_k-\phi))\|_{L^\infty}\xrightarrow{k\to\infty}0$

$\|\xi^\alpha\partial^\beta\mathcal{F}(\phi_k)-\xi^\alpha\partial^\beta\mathcal{F}(\phi)\|_{L^\infty} \leq \int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|^2)^{-n}dx\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\||x|^{2j}D^\alpha(x^\beta(\phi_k(x)-\phi(x)))\|_{L^\infty}\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$

Logo $\mathcal{F}(\phi_k)\xrightarrow[k\to\infty]{}\mathcal{F}(\phi)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $\blacksquare$

Vamos agora provar que $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma bijeção com inversa contínua

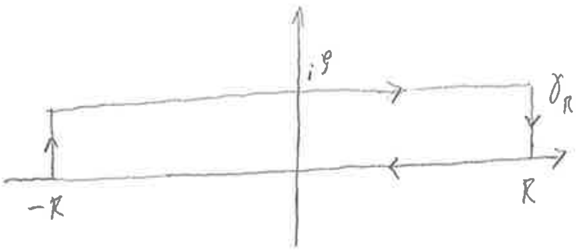
Para tanto, vamos começar com um exemplo

Transformada de Fourier da Gaussiana.

Seja $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$. Logo

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\, e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2/2 + ix\xi)}\,dx \underset{\downarrow}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2 - \frac{1}{2}\xi^2}\,dx = e^{-\xi^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2}\,dx$$

$$\frac{x^2}{2} + ix\xi = \frac{1}{2}(x^2 + 2ix\xi) = \frac{1}{2}\left[(x+i\xi)^2 + \xi^2\right]$$



Sabemos que $\int_{\gamma_R} e^{-z^2/2}\,dz = 0$.

Se $\gamma(t) = R + it$, $0 < t < \xi$, então $\left|\int_0^\xi e^{-\frac{(R+it)^2}{2}}\, i\,dt\right| \leq \int_0^\xi \left|e^{-\frac{1}{2}(R^2 - t^2 + 2itR)}\right| dt \leq \xi\, e^{-\frac{1}{2}(R^2 - \xi^2)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

$\gamma(t) = -R + it$, $0 < t < \xi$, então $\left|\int_0^\xi e^{-\frac{(-R+it)^2}{2}}\, i\,dt\right| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$.

Logo $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx \underset{y = \frac{x}{\sqrt{2}}}{=} \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{2\pi}$

Assim, $\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\xi^2/2}$.

Outra maneira: $\displaystyle\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(-ix\varphi)(\xi) \underset{\downarrow}{=} \mathcal{F}\left(i\frac{d\varphi}{dx}\right)(\xi) = -\xi\, \mathcal{F}(\varphi)(\xi)$.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}\right) = -x\,e^{-x^2/2}$$

Logo $\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = C\,e^{-\xi^2/2}$, e $C = \mathcal{F}(\varphi)(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

Assim, $\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\xi^2/2}$.

No caso n-dimensional, temos

$$\varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+\dots+x_n^2)}$$

Logo $\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \int e^{-ix\xi} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx = \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_j\xi_j} e^{-\frac{1}{2}x_j^2} dx_j = (2\pi)^{n/2} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}$ //

Teorema: A transformada de Fourier $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma bijeção. Sua inversa é dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} \varphi(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} S \circ \mathcal{F}.$$

Como $S: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são contínuas, então $\mathcal{F}^{-1}$ também é.

Demonstração: Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo

$$\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} \mathcal{F}(\varphi)(\xi) d\xi = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} \mathcal{F}(\varphi)(\xi) d\xi =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} \left(\int e^{-iy\xi} \varphi(y) dy \right) d\xi = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^n} \int \left(\int e^{-i(x-y)\xi} e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} d\xi \right) \varphi(y) dy \quad \circledast$$

Observemos que $\int e^{-i(x-y)\xi} e^{-\frac{(\varepsilon\xi)^2}{2}} d\xi \underset{\substack{\eta = \varepsilon\xi \\ d\eta = \varepsilon^n d\xi}}{=} \int e^{-i(x-y)\frac{\eta}{\varepsilon}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \varepsilon^{-n} d\eta = \varepsilon^{-n} \int e^{-i\frac{(x-y)}{\varepsilon}\eta} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta =$

$$\varepsilon^{-n} (2\pi)^{n/2} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon^2}}$$

Logo $\circledast = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int \frac{1}{(2\pi\varepsilon^2)^{n/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon^2}} \varphi(y) dy \underset{\substack{z = \frac{x-y}{\varepsilon} \\ dz = \frac{dy}{\varepsilon^n}}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-\frac{z^2}{2}} \varphi(x-\varepsilon z) dz = \varphi(x) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-z^2/2} dz = \varphi(x).$

$$e^{-z^2/2} \varphi(x-\varepsilon z) \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} e^{-z^2/2} \varphi(x)$$

$$|e^{-z^2/2} \varphi(x-\varepsilon z)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty} e^{-z^2/2}$$

Obtemos, assim, $\left(\frac{1}{(2\pi)^n} S \circ \mathcal{F} \right) \circ \mathcal{F} = I$. Da mesma forma

$$\mathcal{F} \circ \left(\frac{1}{(2\pi)^n} S \circ \mathcal{F} \right) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F} = \frac{1}{(2\pi)^n} S \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} = I, \text{ pois}$$

$$\mathcal{F} \circ S(\varphi)(x) = \int e^{-ix\xi} \varphi(-x) dx = \int e^{ix\xi} \varphi(x) dx = \int e^{-i(-x)\xi} \varphi(x) dx = \mathcal{F}\varphi(-x) =$$

$$S \circ \mathcal{F}(\varphi)(x) \Rightarrow \mathcal{F} \circ S = S \circ \mathcal{F}$$

$\boxtimes$

Vamos estudar agora expressões do tipo $\int (\mathcal{F}\varphi)\psi\, dx$ e $\mathcal{F}(\varphi * \psi)$.

<u>Proposição</u>: Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo as seguintes propriedades são válidas:

P1) $\int (\mathcal{F}\phi(x))\psi(x)\, dx = \int \phi(x)\, \mathcal{F}\psi(x)\, dx$

P2) $(\mathcal{F}\phi, \mathcal{F}\psi)_{L^2} = (2\pi)^n (\phi, \psi)_{L^2}$ (Fórmula de Parseval)

P3) $\phi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{F}(\phi * \psi) = (\mathcal{F}\phi)(\mathcal{F}\psi)$

P4) $\mathcal{F}(\phi\psi) = (2\pi)^{-n} (\mathcal{F}\phi) * (\mathcal{F}\psi)$

Estamos usando $(\phi, \psi)_{L^2} = \int \phi(x)\overline{\psi(x)}\, dx$.

<u>Demonstração</u>:

P1) $$\int \mathcal{F}\phi(x)\,\psi(x)\, dx = \int \left(\int e^{-ixy}\phi(y)\, dy\right)\psi(x)\, dx \underset{\text{Fubini}}{=} \int\left(\int e^{-ixy}\psi(x)\, dx\right)\phi(y)\, dy = \int \mathcal{F}\psi(y)\,\phi(y)\, dy.$$

P2) $$(\mathcal{F}\phi, \mathcal{F}\psi)_{L^2} = \int \mathcal{F}\phi(x)\,\overline{\mathcal{F}\psi(x)}\, dx = \int \phi(x)\,\mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{F}\psi(x)}\right) dx = \int \phi(x)\,\mathcal{F}(S\mathcal{F}(\overline{\psi})) = \int \phi(x)\, S\circ\mathcal{F}\circ\mathcal{F}(\overline{\psi})(x)\, dx =$$

$$\overline{\mathcal{F}\psi(x)} = \overline{\int e^{-ixy}\psi(y)\, dy} = \int e^{ixy}\,\overline{\psi(y)}\, dy = S\mathcal{F}(\overline{\psi})(x)$$

$$= (2\pi)^n \int \phi(x)\,\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(\overline{\psi})(x)\, dx = (2\pi)^n \int \phi(x)\overline{\psi(x)}\, dx = (2\pi)^n (\phi, \psi)_{L^2}.$$

P3) $\phi * \psi(x) = \int \phi(x-y)\psi(y)\, dy$

Como $|\partial^\alpha \phi(x-y)\psi(y)| \leq \|\partial^\alpha\phi\|_{L^\infty} |\psi(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, vemos que $\phi * \psi$ é C^∞, $\partial^\alpha(\phi * \psi) = (\partial^\alpha\phi) * \psi$

Por fim, $x^\alpha = (x-y+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta}(x-y)^\beta y^{\alpha-\beta}$. Logo

$$x^\alpha \partial^\beta \phi * \psi(x) = x^\alpha \partial^\beta \int \phi(x-y)\psi(y)\, dy = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int (x-y)^\gamma \partial^\beta \phi(x-y)\, y^{\alpha-\gamma}\psi(y)\, dy.$$

Assim, $$|x^\alpha \partial^\beta(\phi * \psi)(x)| \leq \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int |(x-y)^\gamma \partial^\beta\phi(x-y)|\,|(1+|y|^2)^n y^{\alpha-\gamma}\psi(y)|\,(1+|y|^2)^{-n}\, dy \leq$$

$$\sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma}\left(\int (1+|y|^2)^{-n}\, dy\right) \|x^\gamma \partial^\beta\phi\|_{L^\infty} \|(1+|y|^2)^n y^{\alpha-\gamma}\psi(y)\|_{L^\infty} < \infty.$$

Logo $\phi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

P4) $\mathcal{F}(\phi * \psi)(\xi) = \int e^{-ix\xi}\, \phi * \psi(x)\,dx = \int e^{-ix\xi}\left(\int \phi(x-y)\psi(y)\,dy\right)dx$

$$e^{-ix\xi} = e^{-i(x-y+y)\xi} = e^{-i(x-y)\xi}e^{-iy\xi} \quad \Big| \underset{\text{Fubini}}{=} \int e^{-iy\xi}\left(\int e^{-i(x-y)\xi}\phi(x-y)\,dy\right)\psi(y)\,dy =$$

$$= \int e^{-iy\xi}\psi(y)\left(\int e^{-iz\xi}\phi(z)\,dz\right)dy = \left(\int e^{-iy\xi}\psi(y)\,dy\right)\left(\int e^{-iz\xi}\phi(z)\,dz\right) = \mathcal{F}\psi(\xi)\,\mathcal{F}\phi(\xi) \qquad \boxed{\xi}$$

__Definição:__ Uma função $u: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ é chamada de distribuição temperada se

1) u é linear: $u(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha u(\phi) + \beta u(\psi)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

2) u é contínua: Seja $(\phi_j)_j \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty}\phi_j = \phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo $\lim_{j\to\infty} u(\phi_j) = u(\phi)$.

O conjunto de todas as distribuições temperadas é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

__Definição:__ Dizemos que uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ converge a $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se para todo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\lim_{j\to\infty} u_j(\phi) = u(\phi).$$

Dizemos, neste caso, que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Proposição: Seja $u: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ um funcional linear. Logo as seguintes afirmações são equivalentes:

1) $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

2) Se $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma sequência tal que $\lim_{j\to\infty}\phi_j = 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\lim_{j\to\infty} u(\phi_j) = 0$.

3) $\exists\, C > 0$ e $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $|u(\phi)| \leq C\|\phi\|_{\mathcal{S},N}$, $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Como usamos $\|\phi\|_{\mathcal{S},N} := \max_{|\alpha|+|\beta|\leq N} \|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

__Demonstração:__ 1) $\Rightarrow$ 2) Imediato

2) $\Rightarrow$ 1) Por linearidade: $\phi_j \to \phi \Rightarrow \phi_j - \phi \to 0 \Rightarrow u(\phi_j - \phi) \to 0 \Rightarrow u(\phi_j) \to u(\phi)$

3) $\Rightarrow$ 2) Se $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\|x^\alpha\partial^\beta\phi_j\|_{L^\infty} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, $\forall \alpha, \beta$. Logo $\|\phi_j\|_{\mathcal{S},N} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$.

Assim, $\lim_{j\to\infty}|u(\phi_j)| = 0$, já que $|u(\phi_j)| \leq C\|\phi_j\|_{\mathcal{S},N} \Rightarrow \lim_{j\to\infty} u(\phi_j) = 0$

$2) \Rightarrow 3)$ Suponho que uma desigualdade desta nunca seja satisfeita

Logo para todo $j \in \mathbb{N}_0$, $\exists\ \phi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal $|u(\phi_j)| > j \|\phi_j\|_{\mathcal{S},j}$

Seja $\psi_j = \dfrac{\phi_j}{u(\phi_j)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo $u(\psi_j) = 1$, $\forall j$. Mas $|u(\psi_j)| > j \|\psi_j\|_{\mathcal{S},j}$. Logo

$\|\psi_j\|_{\mathcal{S},j} < \frac{1}{j}$. Assim $\|x^\alpha \partial^\beta \psi_j\|_{L^\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{para } j \geq |\alpha|+|\beta|}}{\leq} \|\psi_j\|_{\mathcal{S},j} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Logo $\psi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Assim,

$\psi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $u(\psi_j) \to 1$. ABSURDO. Logo $\exists\ C > 0$, $N \in \mathbb{N}_0$ tq $|u(\phi)| \leq C\|\phi\|_{\mathcal{S},N}$, $\forall \phi$ $\blacksquare$

<u>Proposição</u>: As seguintes inclusões são contínuas:

1) $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $\mathcal{E}'$ é denso em $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}'$ é denso em $\mathcal{D}'$.

2) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

<u>Demonstração</u>:

1) Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$, podemos definir $u|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. Seja $(\phi_j)_j \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty} \phi_j = \phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo $\lim_{j\to\infty} \phi_j = \phi$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, pois $\mathcal{S} \hookrightarrow C^\infty$ é contínua. Logo

$u|_{\mathcal{S}}(\phi_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} u|_{\mathcal{S}}(\phi)$.

Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua, podemos definir $u|_{C_c^\infty} : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$.

Seja $(\phi_j)_j \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty} \phi_j = \phi$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo $\lim_{j\to\infty} \phi_j = \phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pois $C_c^\infty \hookrightarrow \mathcal{S}$ é contínua.

Logo $u|_{C_c^\infty}(\phi_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} u|_{C_c^\infty}(\phi)$.

Seja agora $u \in \mathcal{S}'$ e $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tq $\chi \equiv 1$ numa vizinhança de 0. Seja $\chi_j(x) = \chi(\frac{x}{j})$. Logo

$(\chi_j u)_j \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$(\chi_j u)(\phi) = u(\chi_j \phi) \xrightarrow[j\to\infty]{} u(\phi) \Rightarrow \lim_{j\to\infty} \chi_j u = u \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Sabemos que $\exists\ (u_j)_j \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Logo $\mathcal{E}'$ é denso em $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}'$ é denso em $\mathcal{D}'$.

2) Falta provar que $L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo

Cinta

$$|u(\phi)| = \left|\int u(x)\phi(x)\,dx\right| \leq \|u\|_{L^1}\|\phi\|_{L^\infty}, \ \forall \phi \in \mathcal{S} \Rightarrow u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \blacksquare$$

Cinta

Podemos estender o seguinte resultado de $\mathcal{S}$ para $\mathcal{S}'$.

Proposição: As operações $u \in \mathcal{S}' \mapsto x_j u \in \mathcal{S}'$ e $u \in \mathcal{S}' \mapsto \partial_j u \in \mathcal{S}'$ são contínuos. Assim, $u \in \mathcal{S}' \mapsto x^\alpha \partial^\beta u \in \mathcal{S}'$ e $u \in \mathcal{S}' \mapsto P(x,D)u \in \mathcal{S}'$ também o são, em que $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m}\left(\sum_\beta a_{\alpha\beta} x^\beta\right)D^\alpha$

Demonstração: Se $(u_k)_k \subset \mathcal{S}'$ e $u \in \mathcal{S}'$ são tais que $\lim_{k\to\infty} u_k = u$, então para todo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\lim_{k\to\infty} x_j u_k(\phi) = \lim_{k\to\infty} u_k(x_j\phi) = u(x_j\phi) = (x_j u)(\phi)$$
$$\lim_{k\to\infty} \partial_j u_k(\phi) = \lim_{k\to\infty} -u_k(\partial_j\phi) = -u(\partial_j\phi) = (\partial_j u)(\phi).$$

$\blacksquare$

Logo $\lim_{k\to\infty} x_j u_k = x_j u$, $\lim_{k\to\infty} \partial_j u_k = \partial_j u$

Observação: Estamos usando as seguintes definições:

1) Se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $(D^\alpha u)(\phi) := (-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha\phi)$. Logo $D^\alpha u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2) Se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \psi\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínuo, então $(\psi u)(\phi) := u(\psi\phi)$. Logo $\psi u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo: Se $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é tal que $|\partial^\alpha \psi(x)| \leq C(1+|x|)^{m_0}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $m_0 \in \mathbb{R}$, então $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \psi\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínuo

Observação: Os resultados acima têm o seguinte importante implicação: Se $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $u|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} = v|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}$, então $u = v$.

Demo: Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Escolhemos $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi \equiv 1$ numa vizinhança de 0. Seja $\chi_j(x) = \chi\left(\frac{x}{j}\right)$. Logo $(\chi_j\phi)_j \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\chi_j\phi \to \phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Assim,

$$u(\phi) = \lim_{j\to\infty} u(\chi_j\phi) = \lim_{j\to\infty} v(\chi_j\phi) = v(\phi) \quad \blacksquare$$

Vamos agora definir a transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

<u>Definição</u>: Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Definimos $\mathcal{F}u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ como a função dada por

$$(\mathcal{F}u)(\phi) = u(\mathcal{F}(\phi)) \quad , \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dizemos que $\mathcal{F}u$ é a transformada de Fourier de u.

<u>Obs</u>: Como $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é linear e contínua, então $\mathcal{F}u = u \circ \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ também é linear e contínua por ser composição de funções lineares e contínuas. Logo $\mathcal{F}u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

<u>Proposição</u>: A transformada de Fourier $\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tem as seguintes propriedades:

1) $\mathcal{F}$ é linear e contínua

2) $\mathcal{F}$ é bijetora e $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é definida como $(\mathcal{F}^{-1}u)(\phi) = u(\mathcal{F}^{-1}(\phi))$

3) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Neste caso, $\mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}(f)}$, ou seja, a definição de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ estende a definição de $\mathcal{F}$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$

4) Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Logo $\mathcal{F}(D_j u) = x_j \mathcal{F}(u)$ e $\mathcal{F}(x_j u) = -D_j \mathcal{F}(u)$

5) Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Logo $\mathcal{F}(T_a u) = e^{-i\xi a}\mathcal{F}u$ e $\mathcal{F}(e^{iax}u) = T_a \mathcal{F}u$.

<u>Demonstração</u>: 1) $\mathcal{F}(\alpha u + \beta v)(\phi) = (\alpha u + \beta v)(\mathcal{F}(\phi)) = \alpha u(\mathcal{F}\phi) + \beta v(\mathcal{F}\phi) = \alpha(\mathcal{F}u)(\phi) + \beta(\mathcal{F}v)(\phi)$.

Logo $\mathcal{F}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{F}(u) + \beta \mathcal{F}(v)$. <u>É linear</u>

Seja $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$. Logo se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\lim_{j\to\infty} \mathcal{F}u_j(\phi) = \lim_{j\to\infty} u_j(\mathcal{F}\phi) = u(\mathcal{F}\phi) = (\mathcal{F}u)(\phi)$, ou seja, $\lim_{j\to\infty} \mathcal{F}u_j = \mathcal{F}u$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. <u>É contínua</u>

2) Seja $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dado por $(\mathcal{F}^{-1}u)(\phi) = u(\mathcal{F}^{-1}(\phi))$. Vemos que $\mathcal{F}^{-1}u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, já que $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua e linear. Além disso, se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(u)))(\phi) = \mathcal{F}(u)(\mathcal{F}^{-1}\phi) = u(\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\phi))) = u(\phi)$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(u))(\phi) = \mathcal{F}^{-1}(u)(\mathcal{F}\phi) = u(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\phi))) = u(\phi)$$

Logo $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(u)) = u$ e $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(u)) = u$. Assim, $\mathcal{F}^{-1}$ é a inversa de $\mathcal{F}$.

3) Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo

$$\mathcal{F}(T_f)(\phi) = T_f(\mathcal{F}(\phi)) = \int f(x)\,\mathcal{F}(\phi)(x)\,dx = \int f(x)\left(\int e^{-ixy}\phi(y)\,dy\right)dx \underset{\text{Fubini}}{=}$$

$$\int \phi(y)\left(\int f(x)e^{-ixy}\,dx\right)dy = \int \phi(y)(\mathcal{F}f)(y)\,dy = T_{\mathcal{F}(f)}(\phi).$$

Desta maneira, $\mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}(f)}$.

4) Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo

$$\mathcal{F}(D_j u)(\phi) = (D_j u)(\mathcal{F}\phi) = -u(D_j(\mathcal{F}\phi)) = +u(\mathcal{F}(x_j\phi)) = (\mathcal{F}u)(x_j\phi) = x_j(\mathcal{F}u)(\phi).$$

$$\mathcal{F}(x_j u)(\phi) = x_j u(\mathcal{F}\phi) = u(x_j\mathcal{F}(\phi)) = u(\mathcal{F}(D_j\phi)) = (\mathcal{F}u)(D_j\phi) = -D_j(\mathcal{F}u)(\phi).$$

Assim, $\mathcal{F}(D_j u) = x_j(\mathcal{F}u)$ e $\mathcal{F}(x_j u) = -D_j(\mathcal{F}u)$

5) Mesma coisa. Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo

$$\mathcal{F}(T_a u)(\phi) = (T_a u)(\mathcal{F}\phi) = u(T_{-a}\mathcal{F}\phi) = u(\mathcal{F}(e^{-iax}\phi)) = (\mathcal{F}u)(e^{-iax}\phi) = e^{-ia(\cdot)}(\mathcal{F}u)(\phi)$$

$$\mathcal{F}(e^{ixa}u)(\phi) = e^{ixa}u(\mathcal{F}\phi) = u(e^{ixa}\mathcal{F}\phi) = u(\mathcal{F}(T_{-a}\phi)) = (\mathcal{F}u)(T_{-a}\phi) = T_a(\mathcal{F}u)(\phi) \quad \boxed{\Sigma}$$

A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$

Observemos inicialmente que $L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. De fato, se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$T_f(\phi) = \int f(x)\phi(x)\,dx \leq \|f\|_{L^2}\left(\int |\phi(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = \|f\|_{L^2}\left(\int (1+|x|^2)^{-n}(1+|x|^2)^n|\phi(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\|f\|_{L^2}\,\|(1+|x|^2)^{-n/2}\|_{L^2}\,\|(1+|x|^2)^{n/2}|\phi(x)|\|_{L^\infty}.$$ Note que se $f_n \to f$ em L^2, então $T_{f_n} \to T_f$ em $\mathcal{S}'$.

<u>Teorema:</u> A transformada de Fourier leva funções L^2 em funções L^2. Sua restrição $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ define um isomorfismo unitário.

<u>Demo:</u> Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo $\exists\, (\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty}\phi_j = f$ em L^2. Portanto $\lim_{j\to\infty}\phi_j = f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Assim $\lim_{j\to\infty}\mathcal{F}(\phi_j) = \mathcal{F}(f)$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Como $(\tilde{\mathcal{F}}\phi, \tilde{\mathcal{F}}\psi) = (\phi, \psi)$, concluímos que $\|\tilde{\mathcal{F}}\phi_j - \tilde{\mathcal{F}}\phi_k\| = \|\phi_j - \phi_k\| \xrightarrow{j,k\to\infty} 0$. Assim, $(\mathcal{F}\phi_j)_j$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo converge. Seja $g = \lim \mathcal{F}(\phi_j)$ em L^2. Logo $g = \lim \mathcal{F}(\phi_j)$ em $\mathcal{S}'$. Logo $g = \mathcal{F}(f)$. Como $g \in L^2$, então $\mathcal{F}(f) \in L^2 \Rightarrow \mathcal{F}(L^2) \subset L^2$.

Observemos que $\|\tilde{\mathcal{F}}(f)\| = \lim \|\mathcal{F}(\phi_j)\| = \lim \|\phi_j\| = \|f\|$. Logo $\tilde{\mathcal{F}}: L^2 \to L^2$ é isometria.

Por fim, $\tilde{\mathcal{F}} f = 0 \Rightarrow \|\tilde{\mathcal{F}}(f)\| = 0 \Rightarrow \|f\| = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ é injetora

Seja $g \in L^2$. Logo $S \circ \tilde{\mathcal{F}}(g) \in L^2 \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}} \circ S \circ \tilde{\mathcal{F}}(g) = S \circ \tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mathcal{F}}(g) = g \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ é sobrejetora $\square$

Exemplos de Transformadas de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

1) Delta de Dirac $\quad \mathcal{F}(\delta) = 1 \quad$ e $\quad \mathcal{F}(1) = (2\pi)^n \delta$

Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo $\mathcal{F}(\delta)(\phi) = \delta(\mathcal{F}\phi) = \delta\left(\int e^{-ix\xi}\phi(x)dx\right) = \int \phi(x)dx = 1(\phi)$.

$$\mathcal{F}(1)(\phi) = 1(\mathcal{F}\phi) = \int \mathcal{F}\phi(\xi)d\xi = (2\pi)^n \frac{1}{(2\pi)^n}\int \mathcal{F}\phi(\xi)d\xi = (2\pi)^n \phi(0) = (2\pi)^n \delta(\phi).$$

2) Valor Principal $\quad \mathcal{F}(PV(\frac{1}{x})) = -i\pi \operatorname{sgn} \xi$.

Seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que χ é igual a 1 numa vizinhança de 0. Logo

$$PV(\tfrac{1}{x}) = \chi P(\tfrac{1}{x}) + (1-\chi)\tfrac{1}{x} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

Seja $v = \mathcal{F}(PV(\frac{1}{x}))$. Logo $-D_\xi v = -D_\xi \mathcal{F}(PV(\frac{1}{x})) = \mathcal{F}(x PV(\frac{1}{x})) = \mathcal{F}(1) = 2\pi\delta$.

Logo $i v(\xi) = 2\pi H(\xi) + c \Rightarrow v(\xi) = -2\pi i H(\xi) + c$

Note que $PV(\frac{1}{x})(S\phi) = PV\int \frac{1}{x}\phi(-x)dx = -PV\int \frac{1}{x}\phi(x)dx = -PV(\frac{1}{x})(\phi). \Rightarrow S(PV(\frac{1}{x})) = -PV(\frac{1}{x})$.

Logo $\quad S\mathcal{F}(PV(\frac{1}{x}))(\phi) = \mathcal{F}(PV(\frac{1}{x}))(S\phi) = PV(\frac{1}{x})(\mathcal{F}S\phi) = PV(\frac{1}{x})(S\mathcal{F}\phi) = SPV(\frac{1}{x})(\mathcal{F}\phi) =$

$$= -PV(\tfrac{1}{x})(\mathcal{F}\phi) = -\mathcal{F}(PV(\tfrac{1}{x}))(\phi) \Rightarrow S\mathcal{F}(PV(\tfrac{1}{x})) = -\mathcal{F}(PV(\tfrac{1}{x})).$$

Assim, $v(-\xi) = Sv(\xi) = -v(\xi) \Rightarrow 2\pi i H(\xi) - c = -2\pi i H(-\xi) + c \Rightarrow 2c = 2\pi i (H(\xi) + H(-\xi))$

$$\Rightarrow c = i\pi.$$

Portanto, $\quad -2\pi i H(\xi) + i\pi = -i\pi \operatorname{sgn}(\xi) \Rightarrow \mathcal{F}(PV(\frac{1}{x})) = -i\pi \operatorname{sgn}(\xi)$

3) Função Heaviside $\quad \mathcal{F}(H) = -iPV(\frac{1}{\xi}) + \pi\delta = \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{a+i\xi} = -i\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{\xi - ia} = -i\frac{1}{\xi - i0}$.

Vimos $\mathcal{F}(PV(\frac{1}{x})) = -2\pi i H(\xi) + i\pi \Rightarrow \mathcal{F}(H) = \frac{i}{2\pi}\mathcal{F}\mathcal{F}(PV(\frac{1}{x})) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(1)$

$$= i\frac{1}{2\pi}SS\mathcal{F}\mathcal{F}(PV(\tfrac{1}{x})) + \tfrac{1}{2}2\pi\delta$$

$$= -iPV(\tfrac{1}{x}) + \pi\delta =$$