LISTA DE EXERCÍCIOS 6 - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER (MAP 5722-4)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/DISTRIBUICOES

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do Duistermaat e Kolk (denotado por D.K.) e do Rudin, Functional Analysis, (denotado por Rudin).

Exercício 1. (Rudin cap.7 ex. 14) Seja $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ uma função inteira tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}_0$ e uma constante $c(\epsilon) > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq c(\epsilon)(1+|z|)^{N(\epsilon)} e^{\epsilon\|Im(z)\|}, \ \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Prove que f é um polinômio.

(Dica: Use o teorema de Paley-Wiener e mostre que $f = \mathcal{F}(u)$. Qual deve ser o suporte de u?)

Resposta: Pelo teorema de Paley Wiener, como f é holomorfa e f satisfaz

$$|f(z)| \leq c(\epsilon)(1+|z|)^{N(\epsilon)} e^{\epsilon\|Im(z)\|}, \ \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Então existe $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = \mathcal{F}(u)$. Como $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo, portanto injetora, e como $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, conclímos que u é único. Pela estimativa $e^{\epsilon\|Im(z)\|}$, o teorema de Paley Wiener garante que $\mathrm{supp}(u) \subset \overline{B_\epsilon(0)}$. Pelo enunciado, uma estimativa do tipo acima é válida para todo $\epsilon > 0$. Logo $\mathrm{supp}(u) \subset \cap_{\epsilon>0}\overline{B_\epsilon(0)} = \{0\}$. Sabemos que isto implica que existe $m \in \mathbb{N}_0$ e constantes $c_\alpha \in \mathbb{C}$ tais que

$$u = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha D^\alpha \delta_0.$$

Assim, para $\xi \in \mathbb{R}^n$, temos

$$f(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}\left(\sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha D^\alpha \delta_0\right)(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \mathcal{F}(D^\alpha\delta_0)(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \xi^\alpha.$$

Como a extensão holomorfa é única, concluímos que

$$f(z) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha z^\alpha.$$

Exercício 2. (Rudin cap.7 ex. 15) Seja $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, $N \in \mathbb{N}_0$ e $r \geq 0$. Suponha que

$$\begin{array}{c} |f(z)| \leq (1+|z|)^N e^{r|Im(z)|}, \ \forall z \in \mathbb{C}^n \\ |f(x)| \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \end{array}.$$

Prove que

$$|f(z)| \leq e^{r\|Im(z)\|}, \ \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Dica: Fixe $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ e $s > 0$. Defina a função holomorfa $g_s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $g_s(\lambda) = (1-is\lambda)^{-N-1} e^{ir\|y\|\lambda} f(x+\lambda y)$. Usando o princípio do máximo módulo, sabemos que no conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq R \text{ e } \mathrm{Im}(\lambda) \geq 0\}$, o máximo de g_s ocorre na fronteira deste conjunto. Logo, tomando R grande, concluímos que $|g_s(i)| < 1$. Tomando $s \to 0^+$, conclua o resultado.

Resposta: Fixemos $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ e $s > 0$. Seja $g_s(\lambda) = (1-is\lambda)^{-N-1} e^{ir\|y\|\lambda} f(x+\lambda y)$. Logo se $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$|g_s(\lambda)| = \left|(1-is\lambda)^{-N-1} e^{ir\|y\|\lambda} f(x+\lambda y)\right| \leq \left|(1-is\lambda)^{-N-1}\right| \left|e^{ir\|y\|\lambda}\right| |f(x+\lambda y)| = 1.$$

Se $\lambda = Re^{i\theta}$, para $\theta \in [0,\pi]$. Logo

$$\left|g_s\left(Re^{i\theta}\right)\right| = \left|\left(1-isRe^{i\theta}\right)^{-N-1}\right| \left|e^{ir\|y\|(R\cos(\theta)+iR\mathrm{sen}(\theta))}\right| |f(x+R\cos(\theta)y+iR\mathrm{sen}(\theta)y)|.$$

Logo

$$\left|\left(1-isRe^{i\theta}\right)^{-N-1} e^{ir\|y\|(R\cos(\theta)+iR\mathrm{sen}(\theta))} f(x+R\cos(\theta)y+iR\mathrm{sen}(\theta)y)\right| \leq$$

$$\left|\left(1-isRe^{i\theta}\right)^{-N-1}\right|\left|e^{-r\|y\|R\text{sen}(\theta)}\left(1+\|x+R\cos(\theta)\,y+iR\text{sen}(\theta)\,y\|\right)^{N}e^{rR\text{sen}(\theta)\|y\|}\right|\leq$$
$$\left|\left(1-isRe^{i\theta}\right)^{-N-1}\left(1+\|x+R\cos(\theta)\,y+iR\text{sen}(\theta)\,y\|\right)^{N}\right|\leq 1,$$

para R grande.

Assim, pelo teorema do módulo máximo, o maior valor de g em $\{\lambda\in\mathbb{C};\,|\lambda|\leq R\text{ e Im}(\lambda)\geq 0\}$ é atingido na fronteira de $\{\lambda\in\mathbb{C};\,|\lambda|\leq R\text{ e Im}(\lambda)\geq 0\}$. Para R muito grande, o número i pertence a esta região. Concluímos , assim, que $|g_s(i)|\leq 1$. Logo

$$\left|(1+s)^{-N-1}e^{-r\|y\|}f(x+iy)\right|=|g_s(i)|\leq 1\implies |f(x+iy)|\leq(1+s)^{N+1}e^{r\|y\|}.$$

Tomando $s\to 0^+$, obtemos que

$$|f(x+iy)|\leq e^{r\|y\|}\implies |f(z)|\leq e^{r\|\text{Im}(z)\|},\forall z\in\mathbb{C}^n.$$

Exercício 3. (Rudin cap.7 ex. 16) Seja $\delta_{S^2}\in\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^3\right)$ a distribuição delta sobre a superfície S^2, ou seja, para $\phi\in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$, temos:

$$\delta_{S^2}(\phi)=\int_{S^2}\phi(x)\,d\sigma(x),$$

em que $\int_{S^2}$ é igual a integral de ϕ sobre $S^2:=\left\{x\in\mathbb{R}^3:\,\|x\|=1\right\}$.

a) Mostre que

$$\mathcal{F}(\delta_{S^2})(\xi)=C\frac{sen(\|\xi\|)}{\|\xi\|},$$

em que $C>0$ é uma constante positiva.

b) Seja $u=D_{x_1}\delta_{S^2}$. Logo

$$|\mathcal{F}(u)(\xi)|=|\xi_1\mathcal{F}(\delta_{S^2})(\xi)|\leq C,\,\forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Conclua do exercício 2 acima que existe $\tilde{C}>0$ tal que

$$|\mathcal{F}(u)(z)|\leq\tilde{C}e^{\|\text{Im}(z)\|},\,\forall z\in\mathbb{C}^n.$$

Note, no entanto, que u não é uma distribuição de ordem 0 (e sim de ordem 1).

Este exercício mostra que no Teorema de Paley-Wiener, não podemos assegurar que a ordem da distribuição será $\leq k$ se sua transformada de Fourier f satisfizer

$$|f(z)|\leq C(1+|z|)^k e^{r\|\text{Im}(z)\|}.$$

Resposta:

a) Vimos que

$$\mathcal{F}(\delta_{S^2})(\xi)=\delta_{S^2}\left(e^{-ix\xi}\right)=\int_{S^2}e^{-ix\xi}d\sigma(x).$$

Vamos usar coordenadas esféricas. Vamos colocar o eixo z na direção de ξ. Assim, temos

$$\int_{S^2}e^{-ix\xi}d\sigma(x)=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}e^{-i\|\xi\|\cos(\theta)}\text{sen}(\theta)\,d\theta\right)d\phi=\int_0^{2\pi}\left(\int_{-1}^{1}e^{-i\|\xi\|u}du\right)d\phi=$$
$$\int_0^{2\pi}\left.\frac{e^{-i\|\xi\|u}}{-i\|\xi\|}\right|_{-1}^{1}d\phi=2\pi\frac{e^{-i\|\xi\|}-e^{i\|\xi\|}}{-i\|\xi\|}=\frac{4\pi}{\|\xi\|}\frac{e^{i\|\xi\|}-e^{-i\|\xi\|}}{2i}=4\pi\frac{\text{sen}(\|\xi\|)}{\|\xi\|}.$$

b) Seja $u=D_{x_1}\delta_{S^2}$

$$|\mathcal{F}(u)(\xi)|=|\xi_1\mathcal{F}(\delta_{S^2})(\xi)|\leq\left|4\pi\xi_1\frac{\text{sen}(\|\xi\|)}{\|\xi\|}\right|\leq C,\,\forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Como u tem suporte em $S^2\subset\overline{B_1(0)}$, concluímos que existe $N\in\mathbb{N}_0$ e $C>0$ tal que

$$|\mathcal{F}u(z)|\leq C(1+|z|)^N e^{\|\text{Im}(z)\|},\,\forall z\in\mathbb{C}^n.$$

Usando o item a), concluímos que

$$|\mathcal{F}u(z)|\leq Ce^{\|\text{Im}(z)\|},\,\forall z\in\mathbb{C}^n.$$

Exercício 4. (D.K. ex. 14.47) Seja $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, com $u\neq 0$, uma solução do problema $\Delta u=\lambda u$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

a) Prove que $\lambda\leq 0$. (Dica: Tome a trasformada de Fourier da equação)

b) Prove que se $\lambda=0$, então u é um polinômio.

c) Prove que $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e u tem uma extensão holomorfa em $\mathbb{C}^n$.

Resposta:

a) Suponha que $\Delta u = \lambda u$. Logo $\mathcal{F}(\Delta u) = \mathcal{F}(\lambda u)$. Assim, $-\|\xi\|^2 \mathcal{F}(u) = \lambda \mathcal{F}(u)$, ou seja, $\left(\lambda + \|\xi\|^2\right)\mathcal{F}(u) = 0$. Se λ não pertence a $]-\infty, 0]$, então $\left(\lambda + \|\xi\|^2\right) \neq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\xi \mapsto \left(\lambda + \|\xi\|^2\right)^{-1}\phi(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Assim,

$$0 = \left(\lambda + \|\xi\|^2\right)\mathcal{F}(u)\left(\left(\lambda + \|\xi\|^2\right)^{-1}\phi(\xi)\right) = \mathcal{F}(u)(\phi).$$

Logo $\mathcal{F}(u)(\phi) = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Isto implica que $\mathcal{F}(u) = 0$. Portanto $u = 0$. Absurdo. Concluímos que $\lambda \in]-\infty, 0]$.

Para os itens b) e c), mostraremos que $\mathrm{supp}\mathcal{F}(u) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| = -\lambda\}$, em que $\lambda \in]-\infty, 0]$. Suponha que $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que $\mathrm{supp}(\phi) \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| = -\lambda\} = \emptyset$. Logo $\xi \mapsto \left(\lambda + \|\xi\|^2\right)^{-1}\phi(\xi) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, já que $\left(\lambda + \|\xi\|^2\right)$ não se anula no suporte de ϕ. Assim, repetindo o argumento anterior, temos

$$0 = \left(\lambda + \|\xi\|^2\right)\mathcal{F}(u)\left(\left(\lambda + \|\xi\|^2\right)^{-1}\phi(\xi)\right) = \mathcal{F}(u)(\phi),$$

ou seja, $\mathcal{F}(u)(\phi) = 0$. Logo $\mathcal{F}(u)|_{\{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\|^2 = -\lambda\}} = 0$. Portanto, $\mathrm{supp}\mathcal{F}(u) \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\|^2 = -\lambda\right\}$.

b) Se $\lambda = 0$, então concluímos que $\mathrm{supp}\mathcal{F}(u) = \{0\}$. Sabemos que isto implica que existe $m \in \mathbb{N}_0$ e constantes $c_\alpha \in \mathbb{C}$ tais que

$$\mathcal{F}(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta_0.$$

Assim, para $\xi \in \mathbb{R}^n$, temos

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(u)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta_0\right)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \mathcal{F}^{-1}(D^\alpha \delta_0)(x) = (2\pi)^n \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha (-x)^\alpha.$$

Portanto u é um polinômio.

c) Como $\mathcal{F}u$ tem suporte compacto, contido em $\left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\|^2 = -\lambda\right\}$, concluímos que $\mathcal{F}(\mathcal{F}u)$ tem uma extensão holomorfa. Como $u = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(u) = \frac{1}{(2\pi)^n} S \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(u)$, concluímos que u tem extensão holomorfa.

Exercício 5. (D.K. ex. 18.2) Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, com $u \neq 0$, uma solução do problema $\Delta u = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{C}$, tal qual no exercício 4. Mostre que u tem uma extensão holomorfa em $\mathbb{C}^n$ e que existem constantes $c > 0$ e $k \in \mathbb{N}_0$ tais que

$$|u(z)| \leq c(1 + |z|)^k e^{\sqrt{-\lambda}\|\mathrm{Im}(z)\|}, \ \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Resposta: Sabemos que se $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $\mathcal{F}(v)$ tem extensão holomorfa e é tal que

$$|\mathcal{F}(v)(z)| \leq c(1 + |z|)^k e^{r\|\mathrm{Im}(z)\|}, \ \forall z \in \mathbb{C}^n,$$

em que k é a ordem de v e $r > 0$ é tal que $\mathrm{supp}(v) \subset \overline{B_r(0)}$.

Vimos no exercício anterior que $\mathcal{F}(u)$ tem suporte contido em $\left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\|^2 = -\lambda\right\}$. Logo em $\overline{B_{\sqrt{-\lambda}}(0)}$. Assim, seja k a ordem de $\mathcal{F}(u)$. Temos então que

$$|\mathcal{F}(\mathcal{F}(u))(z)| \leq c(1 + |z|)^k e^{\sqrt{-\lambda}\|\mathrm{Im}(z)\|}, \ \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Desta maneira,

$$\left|\frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}(\mathcal{F}(u))(-z)\right| \leq \frac{c}{(2\pi)^n}(1 + |z|)^k e^{\sqrt{-\lambda}\|\mathrm{Im}(z)\|}, \ \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Como $u(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} S \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}(\mathcal{F}(u))(-x)$, concluímos o resultado.

Exercício 6. (D.K. ex. 15.1 e 15.5 (Parcialmente))

a) Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\mathcal{K} : C_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ dado por $\mathcal{K}(\phi) = \phi u$. Mostre que o núcleo de $\mathcal{K}$ é a distribuição $k \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$ dada por

$$k(\chi) = u(\chi(x, x)), \ \forall \chi \in C_c^\infty(\Omega \times \Omega).$$

b) Seja $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier. Mostre que $\mathcal{F} : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é contínua e seu núcleo $k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ é dado por

$$k(x, y) = e^{-ix.y}.$$

Resposta:
a) Seja k a distribuição definida como

$$k(\chi) = u(\chi(x,x)), \forall \chi \in C_c^\infty(\Omega \times \Omega).$$

Logo se ϕ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, então

$$k(\phi \otimes \psi) = u(\phi(x)\psi(x)) = (\psi u)(\phi(x)).$$

Seja $\mathcal{K}$ o operador associado a k. Logo $\mathcal{K}(\psi)$ é a distribuição que aplicada a ϕ é igual a $k(\phi \otimes \psi)$. Logo $\mathcal{K}(\psi)(\phi) = (\psi u)(\phi)$, ou seja, $\mathcal{K}(\psi) = \psi u$.

b) Como $C_c(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua, $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é contínua, concluímos que $\mathcal{F} : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é contínua. Por fim,

$$\mathcal{F}(\psi)(\phi) = \int \mathcal{F}(\psi)(x)\phi(x)\,dx = \int \left(\int e^{-ixy}\psi(y)\,dy\right)\phi(x)\,dx = \int\int e^{-ixy}\phi(x)\psi(y)\,dxdy = k(\phi \otimes \psi),$$

em que $k(x,y) = e^{-ixy}$.

Exercício 7. (D.K. ex. 17.2) (Solução Fundamental da Equação do Calor) Seja $a \in \mathbb{R}$.

a) Prove que uma solução fundamental do operador diferencial $\partial + aI$ é dada por $e^{-ax}H(x)$, em que H é a função de Heaviside.

b) Considere o operador diferencial da equação do calor $P(D) = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$. Uma forma de achar a solução fundamental é aplicando a transformada de Fourier nas coordenadas espaciais. Assim, se

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \delta_0,$$

mostre que aplicando a Transformada de Fourier apenas na variável x, e denotando esta transformada por $\hat{u}$, obtemos

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi) + |\xi|^2\,\hat{u}(t,\xi) = \delta(t).$$

Ache uma solução de $\hat{u}(t,\xi)$ usando item $a)$ e, aplicando a transformada de Fourier inversa em ξ, mostre que (uma das) soluções fundamentais é

$$u(t,x) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}.$$

(Para detalhes sobre transformada parcial de Fourier, consulte o livo de J. Hounie)

Resposta:
a) Basta usarmos a regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-ax}H(x)\right) = -ae^{-ax}H(x) + e^{-ax}\frac{d}{dx}H(x) = -ae^{-ax}H(x) + e^{-ax}\delta_0 = -ae^{-ax}H(x) + \delta_0.$$

Assim,

$$\left(\frac{d}{dx} + aI\right)\left(e^{-ax}H(x)\right) = -ae^{-ax}H(x) + \delta_0 + ae^{-ax}H(x) = \delta_0.$$

b) Seja $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \delta_0 = \delta(t)\delta(x)$. Logo

$$\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\right) = \mathcal{F}_x(\delta_0) \implies \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi) + \|\xi\|^2\,\hat{u}(t,\xi) = \delta(t).$$

Logo pelo item a), usando $a := \|\xi\|^2$, concluímos que

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t\|\xi\|^2}H(t).$$

Logo

$$u(t,x) = \frac{H(t)}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}e^{-t\|\xi\|^2}d\xi = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}.$$

Exercício 8. (D.K. ex. 14.59) (Solução Fundamental do Operador de Cauchy-Riemann)

a) Considere a equação de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x,y) - \frac{1}{i}\frac{\partial E}{\partial y}(x,y) = 2\delta(x)\,\delta(y).$$

Aplicando a transformada de Fourier na variável y, obtenha a seguinte equação:

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial x}(x,\eta) - \eta \frac{\partial \hat{E}}{\partial y}(x,\eta) = 2\delta(x).$$

b) Mostre que, para toda função $c(\eta)$, a seguinte expressão é solução da equação acima:

$$\hat{E}(x,\eta) = 2\left(c(\eta) + H(x)\right) e^{x\eta}.$$

c) Escolhendo $c(\eta) = -H(\eta)$, obtenha que

$$\hat{E}(x,\eta) = -\mathrm{sign}(\eta) H(-x\mathrm{sign}(\eta)) e^{x\eta}$$

é uma distribuição temperada que resolve a equação.

d) Usando a expressão obtida em c), podemos calcular a transformada de Fourier parcial inversa. Obtenha que

$$E(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{\pi z}.$$

é uma solução fundamental do operador de Cauchy-Riemann.

Exercício 9. (Inspirado no livro do Folland: Fourier Analysis and Applications, capítulo 7) Podemos usar a transformada parcial de Fourier para resolver as equações de Poisson, Onda e Calor no semiplano. O objetivo a seguir é fazer as contas formalmente, ou seja, não justificaremos quais espaços de funções e distribuições estamos trabalhando (embora isto seja possível)

a) Seja $u :]0,\infty[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ uma solução de

$$\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = 0,\ (t,x) \in]0,\infty[\times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}.$$

Aplicando a transformada de Fourier em x (e denotando-a por $\hat{u}$ e $\hat{f}$), obtenha

$$\begin{array}{c} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t,\xi) = 0,\ (t,\xi) \in]0,\infty[\times \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{f}(\xi),\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}.$$

Resolvendo a equação em t, conclua que

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-t|\xi|^2}.$$

Calculando a transformada de Fourier inversa em x (e usando que $\mathcal{F}^{-1}$ leva produto em convolução), conclua que

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} f(y)\, dy.$$

b) Seja $u :]0,\infty[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ uma solução de

$$\begin{array}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \Delta u(t,x) = 0,\ (t,x) \in]0,\infty[\times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x),\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}.$$

Aplicando a transformada de Fourier em x (e denotando-a por $\hat{u}$ e $\hat{f}$), obtenha

$$\begin{array}{c} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(t,\xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t,\xi) = 0,\ (t,x) \in]0,\infty[\times \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{f}(\xi),\ x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0,\xi) = \hat{g}(\xi),\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}.$$

Resolvendo a equação em t, conclua que

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(\xi)\, cos(t\|\xi\|) + \hat{g}(\xi) \frac{sen(t\|\xi\|)}{\|\xi\|}.$$

Observação: Em uma dimensão, podemos calcular a transformada inversa da expressão acima e obter a fórmula de D'Alambert. (Ver Folland)

c) Seja $u : \mathbb{R} \times]0,\infty[\to \mathbb{C}$ uma solução de

$$\begin{array}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0,\ (x,y) \in \mathbb{R} \times]0,\infty[\\ u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R} \end{array}.$$

Aplicando a transformada de Fourier em x (e denotando-a por $\hat{u}$ e $\hat{f}$), obtenha

$$\begin{array}{c} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\xi, y) - |\xi|^2 \hat{u}(\xi, y) = 0, \ (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[\\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi), \ \xi \in \mathbb{R} \end{array}.$$

Resolvendo a equação em y, conclua que

$$\hat{u}(\xi, y) = A(\xi) e^{-y|\xi|} + B(\xi) e^{y|\xi|}.$$

Como $e^{x|\xi|}$ cresce muito rapidamente, esta função não define uma distribuição temperada. Logo, eliminamos este termos e obtemos

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-y|\xi|}.$$

Calculando a transformada de Fourier inversa em ξ (e usando que $\mathcal{F}^{-1}$ leva produto em convolução), conclua que

$$u(x, y) = \int \frac{y f(x-t)}{\pi (t^2 + y^2)} dt.$$

Resposta: