LISTA DE EXERCÍCIOS 5 - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER (MAP 5722-4)

PROF: PEDRO T. P. LOPES   WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/DISTRIBUICOES

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do Duistermaat e Kolk (denotado por D.K.), do G. Folland, Fourier Analysis and Applications, (denotado por Folland).

Exercício 1. (D.K. ex. 14.4) Usando integração por partes, mostre que

$$(D_j\phi,\psi)_{L^2(\mathbb{R})} = (\phi, D_j\psi)_{L^2(\mathbb{R})}, \ \ \forall\phi,\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Acima usamos a notação $(\phi,\psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\overline{\psi(x)}dx$ e $D_j := \frac{1}{i}\partial_{x_j}$.

Resposta: Basta fazer integração por partes. Seja $j=1$ (para $j\neq 1$, o argumento é o mesmo). Logo

$$(D_1\phi,\psi)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{i}\partial_{x_1}\phi(x)\overline{\psi(x)}dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i}\partial_{x_1}\phi(x)\overline{\psi(x)}dx_1\right)dx_2...dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{i}\partial_{x_1}\phi(x)\overline{\psi(x)}dx_1\right)dx_2...dx_n =$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\lim_{R\to\infty}\frac{1}{i}\phi(x)\overline{\psi(x)}\Big|_{-R}^{R} - \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{i}\phi(x)\partial_{x_1}\overline{\psi(x)}dx_1\right)dx_2...dx_n =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\overline{\frac{1}{i}\partial_{x_1}\psi(x)}dx = (\phi, D_1\psi)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Exercício 2. (Folland cap.9.4 ex.1) Seja $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição temperada homogênea de grau a, ou seja, $u(\phi(\lambda x)) = \frac{1}{\lambda^{n+a}}u(\phi(x))$. Mostre que $\mathcal{F}(u)$ é uma distribuição homogênea de grau $-n-a$.

Resposta: Vamos lembrar a noção de distribuição homogênea. Lembremos que, pela mudança de coordenadas de distribuição, definimos

$$u(\lambda x)(\phi) := \lambda^{-n}u\left(\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right).$$

Como u é homogênea de grau a, temos que $u(\lambda x) = \lambda^a u(x)$. Logo, dizer que uma distribuição é homogênea de grau a é o mesmo que dizer que para todo $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$u\left(\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) = \lambda^{n+a}u(\phi).$$

Agora observemos que

$$\mathcal{F}\left(\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)(\xi) = \int e^{ix\xi}\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx = \lambda^n\int e^{i\frac{x}{\lambda}\lambda\xi}\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\lambda^{-n}dx =$$

$$\lambda^n\int e^{iy(\lambda\xi)}\phi(y)\,dy = \lambda^n\mathcal{F}(\phi)(\lambda\xi).$$

Logo, obtemos que

$$(\mathcal{F}u)\left(\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) = u\left(\mathcal{F}\left(\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)\right) = u(\lambda^n\mathcal{F}(\phi)(\lambda\xi)) =$$

$$\lambda^n u(\mathcal{F}(\phi)(\lambda\xi)) = \lambda^n\lambda^{-n-a}u(\mathcal{F}(\phi)(\xi)) = \lambda^{-a}u(\mathcal{F}(\phi)(\xi)) = \lambda^{-a}(\mathcal{F}u)(\phi).$$

Logo

$$(\mathcal{F}u)\left(\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) = \lambda^{n+(-n-a)}(\mathcal{F}u)(\phi),$$

ou seja, $\mathcal{F}u$ é homogênea de grau $-n-a$.

Exercício 3. (Folland cap.9.4 ex.3) Suponha que $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ seja uma função tal que para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, exista $N_\alpha \in \mathbb{N}_0$ tal que $|\partial_x^\alpha g(x)| \le C_\alpha (1+|x|)^{N_\alpha}$.

a) Mostre que $g\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mostre também que se $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\lim_{n\to\infty} g\phi_n = g\phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

b) Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Mostre que gu definido como $(gu)(\phi) = u(g\phi)$ para todo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ também é uma distribuição temperada.

Resposta:

a) Observemos que

$$|x^\sigma \partial^\alpha (g\phi)(x)| \le \sum_{\beta\le\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \left|\partial^\beta g(x)\right| \left|x^\sigma \partial^{\alpha-\beta}\phi(x)\right| \le$$

$$\sum_{\beta\le\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} C_\beta (1+|x|)^{N_\beta} \left|x^\sigma \partial^{\alpha-\beta}\phi(x)\right| \le \sum_{\beta\le\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} C_\beta \left\|(1+|x|)^{N_\beta} x^\sigma \partial^{\alpha-\beta}\phi(x)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Logo $g\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $x \mapsto x^\sigma \partial^\alpha (g\phi)$ são funções limitadas para todos σ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Assim, $g\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

b) Observemos que se $\lim_{n\to\infty}\phi_n = \phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\lim_{n\to\infty} \left\|x^\alpha \partial^\beta \phi_n - x^\alpha \partial^\beta \phi\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$, para todo α e β em $\mathbb{N}_0^n$. Assim $\lim_{n\to\infty} \left\|(1+|x|)^N x^\sigma \partial^\alpha (\phi_n(x) - \phi(x))\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$, para todo σ, α em $\mathbb{N}_0^n$ e $N \in \mathbb{N}_0$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} \|x^\sigma \partial^\alpha (g\phi_n - g\phi)(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \sum_{\beta\le\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} C_\beta \lim_{n\to\infty} \left\|(1+|x|)^{N_\beta} x^\sigma \partial^{\alpha-\beta} (\phi_n(x) - \phi(x))\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Ou seja, $\lim_{n\to\infty} g\phi_n = g\phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 4. (Folland cap.9.4 ex.4) Suponha que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição temperada e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Vamos definir $u*\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ por $u*\phi(x) = u(y \mapsto \phi(x-y))$. Pode-se mostrar que (não é o objetivo do exercício. Apenas assuma este fato)

1) $u*\phi$ é uma função C^∞

2) $\partial^\alpha (u*\phi) = (\partial^\alpha u)*\phi = u*(\partial^\alpha\phi)$.

Nosso objetivo é mostrar que existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, temos $|\partial^\alpha (u*\phi)(x)| \le C_\alpha (1+|x|)^N$, em que $C_\alpha > 0$ é uma constante que depende de α. Para tanto, siga os seguintes passos:

a) Mostre que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, e para todo $K \ge 0$, a seguinte desigualdade é válida $|y|^K \le (1+|x-y|)^K (1+|x|)^K$.

b) Usando o item a), mostre que $\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left|y^\beta \partial^\alpha \phi(x-y)\right| \le C_K (1+|x|)^{|\beta|}$.

c) Conclua, usando a continuidade de u e o resultado do item b, que $|(u*\phi)(x)| \le C(1+|x|)^N$.

d) Repita o argumento acima com $\partial^\alpha\phi$ no lugar de ϕ para concluir que $|\partial^\alpha (u*\phi)(x)| \le C_\alpha (1+|x|)^N$.

Resposta:

a) Basta observar que

$$|y| = |(y-x)+x| \le |x-y| + |x| \le 1 + |x-y| + |x| + |x|\,|x-y| = (1+|x-y|)(1+|x|).$$

Logo

$$|y|^K \le (1+|x-y|)^K (1+|x|)^K.$$

b) Usando o resultado anterior, vemos que

$$\left|y^\beta \partial^\alpha \phi(x-y)\right| \le |y|^{|\beta|} |\partial^\alpha\phi(x-y)| \le$$

$$(1+|x-y|)^{|\beta|} |\partial^\alpha \phi(x-y)| (1+|x|)^{|\beta|} \le \left(\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|y|)^{|\beta|} \partial^\alpha\phi(y)\right|\right) (1+|x|)^{|\beta|}.$$

c) Como $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, concluímos que existe $N \in \mathbb{N}_0$ e $C > 0$ tal que

$$|u(\phi)| \le C\|\phi\|_{\mathcal{S},N} := C \max_{|\alpha|+|\beta|\le N} \left\|y^\alpha \partial_y^\beta \phi\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Logo

$$|u*\phi(x)| = |u(y\mapsto \phi(x-y))| \le C \max_{|\alpha|+|\beta|\le N} \left\|y^\alpha \partial_y^\beta \phi(x-y)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$C \max_{|\alpha|+|\beta|\le N} \left(\left\|(1+|y|)^{|\alpha|} \partial_y^\beta \phi(y)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} (1+|x|)^{|\alpha|}\right) \le$$

$$C \max_{|\alpha|+|\beta|\le N} \left(\left\|(1+|y|)^{|\alpha|} \partial_y^\beta \phi(y)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right) (1+|x|)^N.$$

d) Pelo mesmo argumento, temos que

$$|\partial^{\alpha}(u*\phi(x))| = |u*(\partial^{\alpha}\phi)(x)| \leq$$
$$C \max_{|\sigma|+|\beta|\leq N}\left(\left\|(1+|y|)^{|\sigma|}\partial_y^{\alpha+\beta}\phi(y)\right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}\right)(1+|x|)^N.$$

Exercício 5. (Folland cap. 7.2 ex. 2) Seja $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ dada por $\phi(x)=e^{-a|x|}$. Mostre que $\mathcal{F}(\phi)(\xi)=\frac{2a}{\xi^2+a^2}$. Usando a fórmula da inversão e este resultado, mostre que $\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}$.

Resposta: Vemos que

$$\int e^{-ix\xi}e^{-a|x|}dx = \int_0^{\infty}e^{-ix\xi-ax}dx+\int_{-\infty}^0 e^{-ix\xi+ax}dx =$$
$$\left.\frac{e^{-ix\xi-ax}}{-i\xi-a}\right|_0^{\infty}+\left.\frac{e^{-ix\xi+ax}}{-i\xi+a}\right|_{-\infty}^0=\frac{1}{i\xi+a}+\frac{1}{-i\xi+a}=\frac{-i\xi+a+i\xi+a}{a^2+\xi^2}=\frac{2a}{a^2+\xi^2}.$$

Logo $\mathcal{F}(\phi)(\xi)=\frac{2a}{\xi^2+a^2}$. Assim, temos que

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2a}{\xi^2+a^2}\right)=e^{-a|x|} \iff \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\xi^2+a^2}\right)=\frac{1}{2a}e^{-a|x|}.$$

Porém sabemos que $\mathcal{F}^{-1}=\frac{1}{2\pi}S\circ\mathcal{F}$, ou seja, $\mathcal{F}=2\pi S\circ\mathcal{F}^{-1}$ (Lembrando que $S\phi(x)=\phi(-x)$. Desta maneira, vemos que

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\xi^2+a^2}\right)=2\pi S\circ\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\xi^2+a^2}\right)=2\pi S\left(\frac{1}{2a}e^{-a|x|}\right)=2\pi\frac{1}{2a}e^{-a|x|}=\frac{\pi}{a}e^{-a|x|}.$$

Exercício 6. (Folland cap. 7.2 ex. 12) Para $a>0$, definamos $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ e $g_a:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ por $f_a(x)=\frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$ e $g_a(x)=\frac{\mathrm{sen}(ax)}{\pi x}$. Use a transformada de Fourier para mostrar que

a) $f_a*f_b=f_{a+b}$.

b) $g_a*g_b=g_{min(a,b)}$.

Dica: Calcule a transformada de Fourier da função característica do conjunto $[-a,a]$ para fazer o item b).

Resposta:

a) Sabemos que $\mathcal{F}\left(\frac{a}{\pi(x^2+a^2)}\right)=\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\frac{a}{\pi}\frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}=e^{-a|\xi|}$.

Assim, $f_a*f_b=\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_a*f_b))=\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_a)\mathcal{F}(f_b))=\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-a|\xi|}e^{-b|\xi|}\right)=\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-(a+b)|\xi|}\right)=\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_{a+b}))=f_{a+b}$.

b) Seja

$$\chi_a(x)=\begin{cases}1, & |x|\leq a\\ 0, & |x|>a\end{cases}.$$

Assim,

$$\mathcal{F}(\chi_a)(\xi)=\int e^{-ix\xi}\chi_a(x)\,dx=\int_{-a}^{a}e^{-ix\xi}dx=\left.\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right|_{-a}^{a}=\frac{e^{-ia\xi}-e^{ia\xi}}{-i\xi}=\frac{2}{\xi}\left(\frac{e^{ia\xi}-e^{-ia\xi}}{2i}\right)=\frac{2}{\xi}\left(\frac{e^{ia\xi}-e^{-ia\xi}}{2i}\right)=\frac{2sen(a\xi)}{\xi}.$$

Desta maneira,

$$\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{sen}(ax)}{\pi x}\right)=2\pi\mathcal{S}\circ\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sen}(ax)}{\pi x}\right)=\mathcal{S}\circ\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2\mathrm{sen}(ax)}{x}\right)=\mathcal{S}(\chi_a)=\chi_a.$$

Logo

$$g_a*g_b=\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(g_a*g_b)=\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g_a)\mathcal{F}(g_b))=\mathcal{F}^{-1}(\chi_a\chi_b)=\mathcal{F}^{-1}\left(\chi_{\min(a,b)}\right)=g_{min(a,b)}.$$

Exercício 7. (Folland cap. 7.2 ex. 13) Use o Teorema de Plancherel (Fórmula de Parseval) para mostrar que:

a) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(at)\mathrm{sen}(bt)}{t^2}dt=\pi\min(a,b)$.

b) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}dt=\frac{\pi}{a+b}$.

Resposta:

a) Sabemos que

$$\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{sen}(ax)}{x}\right)=\pi\chi_a.$$

Logo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(at)\operatorname{sen}(bt)}{t^2}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(at)}{t}\frac{\operatorname{sen}(bt)}{t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\left(\frac{\operatorname{sen}(at)}{t}\right)(\xi)\,\mathcal{F}\left(\frac{\operatorname{sen}(bt)}{t}\right)(\xi)\,d\xi=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\pi\chi_a(\xi)\,\pi\mathcal{F}\chi_b(\xi)\,d\xi=\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\min(a,b)}(\xi)\,d\xi=\frac{\pi}{2}2\min(a,b)=\pi\min(a,b).$$

b) Seja $a>0$. Definimos

$$\phi_a(x)=\begin{cases} e^{-ax},\ x>0\\ -e^{ax},\ x<0\end{cases}.$$

Logo

$$\mathcal{F}(\phi_a)(\xi)=\int e^{-ix\xi}\phi_a(x)\,dx=\int_0^{\infty}e^{-ix\xi}e^{-ax}dx-\int_{-\infty}^{0}e^{-ix\xi}e^{ax}dx=$$

$$\int_0^{\infty}e^{x(-i\xi-a)}dx-\int_{-\infty}^{0}e^{x(-i\xi+a)}dx=\left.\frac{e^{x(-i\xi-a)}}{-i\xi-a}\right|_0^{\infty}-\left.\frac{e^{x(-i\xi+a)}}{-i\xi+a}\right|_{-\infty}^{0}=$$

$$\frac{1}{i\xi+a}+\frac{1}{i\xi-a}=\frac{i\xi-a+i\xi+a}{-\xi^2-a^2}=\frac{2i\xi}{-\xi^2-a^2}=-\frac{2i\xi}{\xi^2+a^2}.$$

Assim, $\mathcal{F}\left(\frac{i}{2}\phi_a\right)(\xi)=\frac{\xi}{\xi^2+a^2}$. Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{(t^2+a^2)}\frac{t}{(t^2+b^2)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\left(\frac{i}{2}\phi_a\right)\overline{\mathcal{F}\left(\frac{i}{2}\phi_b\right)}d\xi=$$

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{2}\phi_a\left(-\frac{i}{2}\right)\phi_b d\xi=\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_a\phi_b dx=\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(a+b)|x|}dx=$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\infty}e^{-(a+b)x}dx+\int_{-\infty}^{0}e^{(a+b)x}dx\right)=\frac{\pi}{2}\frac{2}{a+b}=\frac{\pi}{a+b}.$$

Exercício 8. (D.K. ex. 14.23) Prove que toda distribuição temperada é de ordem finita.

Resposta: Como $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, concluímos que existe $N\in\mathbb{N}_0$ e $C>0$ tal que

$$|u(\phi)|\le C\,\|\phi\|_{\mathcal{S},N}:=C\max_{|\alpha|+|\beta|\le N}\left\|y^{\alpha}\partial_y^{\beta}\phi\right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}.$$

Assim, seja $K\subset\mathbb{R}^n$ um compacto. Logo existe $R>0$ tal que $K\subset B_R(0)$. Assim, $y^{\alpha}\le(1+R)^{|\alpha|}$ para todo $y\in B_R(0)$. Desta maneira, se $\phi\in C_c^{\infty}(B_R(0))$, temos

$$|u(\phi)|\le C\,\|\phi\|_{\mathcal{S},N}:=C\max_{|\alpha|+|\beta|\le N}\left\|y^{\alpha}\partial_y^{\beta}\phi\right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}\le C(1+R)^N\max_{|\beta|\le N}\left\|\partial_y^{\beta}\phi\right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}\le C(1+R)^N\|\phi\|_{C^N}.$$

Assim, para todo compacto $K\subset\mathbb{R}^n$, existe uma constante $C_K>0$ tal que

$$|u(\phi)|\le C_K\|\phi\|_{C^N},\ \forall\phi\in C_c^{\infty}(K).$$

Logo a ordem de u é menor ou igual a N. Portanto é finita.

Exercício 9. (D.K. ex. 14.5) Sejam ϕ_1, ..., ϕ_n funções integráveis definidas em $\mathbb{R}$. Mostre que

$$\mathcal{F}(\phi_1(x_1)\ldots\phi_n(x_n))(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\mathcal{F}(\phi_1)(\xi_1)\ldots\mathcal{F}(\phi_n)(\xi_n).$$

Exercício 10. (D.K. ex. 14.6) Suponha que u e $v:=\mathcal{F}(u)$ sejam funções integráveis em $\mathbb{R}^n$. Prove que u é uma função contínua igual a $(2\pi)^{-n}S\circ\mathcal{F}(v)$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^n$.

Resposta: Sabemos que $u=\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(u))=\mathcal{F}^{-1}(v)=(2\pi)^{-n}S\circ\mathcal{F}(v)$. Como $v\in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\mathcal{F}(v)$ é a distribuição dada pela função contínua definida pela integral abaixo:

$$\mathcal{F}(v)(x)=\int e^{-ixy}v(y)\,dy.$$

Assim, u é a função contínua dada por

$$u(x)=(2\pi)^{-n}S\circ\mathcal{F}(v)=(2\pi)^{-n}\int e^{ixy}v(y)\,dy.$$

Exercício 11. (D.K. ex. 14.8) Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Prove uma das seguintes afirmações e obtenha a seguinte através da transformada de Fourier.

i) Se $\phi(0) = 0$, então existem $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tais que $\phi(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \phi_j(x)$.

ii) Se $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = 0$, então existem $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tais que $\phi(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} \phi_j(x)$.

Exercício 12. (D.K. ex. 14.13) Prove que para todo $t > 0$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\int_{-t}^{t} \mathcal{F}\phi(\xi) d\xi = 2 \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \frac{\text{sen } (tx)}{x} dx$$

e deduza que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\text{sen}\,(tx)}{x} = \pi\delta \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Exercício 13. (D.K. ex. 14.14) Considere as seguintes funções em $\mathbb{R}^n$: $a(x) = e^{-x^2+2x}$, $b(x) = e^{-x}H(x)$, $c(x) = e^{-|x|}$, $d(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

a) Para cada uma dessas funções, esboce o gráfico.

b) Verifique quais dessas funções pertencem a $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

c) Calcule a transformada de Fourier destas funções. Deduza a integral de Laplace:

$$\int_0^{\infty} \frac{cos(x\xi)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\xi|}.$$

d) Esboce a transformada de Fourier destas funções.

e) Verifique quais das transformadas de Fourier das funções acima pertencem a $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercício 14. (D.K. ex. 14.15) Defina $f(x) = e^{-|x|}$ em $\mathbb{R}$. Diferencie f duas vezes e prove que $\frac{1}{2}f$ é uma solução fundamental de $I + D^2$ em $\mathbb{R}$. Calcule $\mathcal{F}(f)$. Derive a fórmula $\mathcal{F}(\text{arctg}\,(x)) = \frac{\pi}{i} PV\left(\frac{e^{-|\xi|}}{\xi}\right)$ partindo dos resultados anteriores.

Resposta: Vemos que $f(x) = e^{-x}H(x) + e^{x}H(-x)$. Logo

$$\frac{d}{dx}(f) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x}H(x) + e^{x}H(-x)\right) = -e^{-x}H(x) + e^{-x}\delta + e^{x}H(-x) - e^{x}\delta = -e^{-x}H(x) + e^{x}H(-x).$$

Além disso, temos

$$\frac{d^2}{dx^2}(f) = e^{-x}H(x) - e^{-x}\delta + e^{x}H(x) - e^{x}\delta = e^{|x|} - 2\delta.$$

Assim,

$$\left(I + D^2\right)(f) = 2\delta.$$

Portanto, $\frac{1}{2}f$ é uma solução fundamental de $I + D^2$.

Concluímos que

$$\mathcal{F}\left(\left(I + D^2\right)f\right) = \mathcal{F}(2\delta) = 2 \implies \mathcal{F}(f) = \frac{2}{(I+\xi^2)} \implies e^{-|x|} = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{(I+\xi^2)}\right).$$

Como $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} S \circ \mathcal{F}$, concluímos que

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{(I+\xi^2)}\right) = \pi e^{-|x|}.$$

Note que $\xi\mathcal{F}(\text{arctg}\,(x)) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}(\text{arctg}\,(x))\right) = \frac{1}{i}\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{i}e^{-|\xi|}$ e que $\xi\frac{\pi}{i}PV\left(\frac{e^{-|\xi|}}{\xi}\right) = \frac{\pi}{i}e^{-|\xi|}$. Logo $\xi\left(\mathcal{F}(\text{arctg}\,(x)) - \frac{\pi}{i}PV\left(\frac{e^{-|\xi|}}{\xi}\right)\right) = 0$. Como a função ξ só se anula em 0 e tem derivada sempre diferente de zero, concluímos que (Teorema 9.5 do livro do Duistermaat, visto em sala de aula) existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{F}(\text{arctg}\,(x)) = \frac{\pi}{i}PV\left(\frac{e^{-|\xi|}}{\xi}\right) + c\delta.$$

Como $\text{arctg}\,(x)$ é ímpar, então $\mathcal{F}(\text{arctg}\,(x))$ também é impar. O mesmo para $\frac{\pi}{i}PV\left(\frac{e^{-|\xi|}}{\xi}\right)$. Lembrando que uma distribuição é ímpar se $u(\phi(-x)) = -u(\phi(-x))$. Logo $c\delta$ também deve ser ímpar. Mas $\delta(\phi(-x)) = \delta(\phi(x)) = \phi(0)$. Assim, a única forma para que $c\delta$ seja ímpar é que c seja igual a zero. Logo

$$\mathcal{F}(\text{arctg}\,(x)) = \frac{\pi}{i}PV\left(\frac{e^{-|\xi|}}{\xi}\right).$$

Exercício 15. (D.K. ex. 14.22) Seja u uma função localmente integrável em $\mathbb{R}^n$ para a qual existe $N \in \mathbb{N}_0$ e $C > 0$ com $|u(x)| \leq C(1+|x|)^N$. Prove que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Resposta:

Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Sabemos que $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. Logo, obtemos facilmente que $(1+|x|) \leq \sqrt{2\left(1+|x|^2\right)}$. Assim, temos que $(1+|x|)^N \leq 2^{\frac{N}{2}}\left(1+|x|^2\right)^{\frac{N}{2}}$. Portanto, se $M \in \mathbb{N}_0$ e $M \geq \frac{N}{2}$, obtemos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$(1+|x|)^N \leq C_1\left(1+|x|^2\right)^M.$$

Assim, obtemos

$$|u(\phi)| = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)\phi(x)|\, dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N |\phi(x)|\, dx \leq$$

$$CC_1\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x|^2\right)^{-n}\left(1+|x|^2\right)^{M+n}|\phi(x)|\, dx \leq CC_1\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x|^2\right)^{-n} dx\right)\left\|\left(1+|x|^2\right)^{M+n}\phi(x)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Por fim,

$$\left\|\left(1+|x|^2\right)^{M+n}\phi(x)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{j=0}^{M+n}\binom{M+n}{j}|x|^{2j}\phi(x) \leq C_2\|\phi\|_{\mathcal{S},M+n}.$$

Logo

$$|u(\phi)| \leq C_3\|\phi\|_{\mathcal{S},M+n}.$$

Isto mostra que a integral é finita (portanto bem definida) e u é contínuo. A linearidade de u é simples. Basta usar a linearidade da integral.

Exercício 16. (D.K. ex. 14.23) Suponha que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mostre que existem constantes $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}_0$ tais que

$$|u(\phi(x-a))| \leq C(1+|a|)^N, \forall a \in \mathbb{R}^n.$$

(Dica: Isto é apenas uma reformulação do exercício 4...)

Resposta: Apenas refaça as passagens do exercício 4.

Exercício 17. (D.K. ex. 14.27) .Determine as transformadas de Fourier das seguintes funções:

a) $cos(x)$, $sen(x)$, $xsen(x)$, $cos^2(x)$, $cos^k(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

b) $\frac{sen(x)}{x}$.

Observação: Apenas em $b)$ temos uma função no final.

Exercício 18. (D.K. ex. 14.45) . Considere $u_a(x) = e^{-a\frac{x^2}{2}}$, $a \in \mathbb{C}$ e $Re(a) \geq 0$. Seja $t \in \mathbb{R}$. Prove que $u_{it} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e que

$$\lim_{a\to it,\, Re(a)>0} u_a = u_{it} \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Calcule $\mathcal{F}(u_{it})$.

Resposta: Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Logo

$$\lim_{a\to it,\, Re(a)>0} u_a(\phi) = \lim_{a\to it,\, Re(a)>0}\int_{\mathbb{R}} e^{-a\frac{x^2}{2}}\phi(x)\, dx.$$

Se $Re(a) \geq 0$, então $\left|e^{-a\frac{x^2}{2}}\phi(x)\right| \leq |\phi(x)| \in L^1(\mathbb{R})$. Como $\lim_{a\to it,\, Re(a)>0} e^{-a\frac{x^2}{2}}\phi(x) = e^{it}\phi(x)$ pontualmente para todo $x \in \mathbb{R}^n$, podemos usar o teorema da convergência dominada e concluir que

$$\lim_{a\to it,\, Re(a)>0}\int_{\mathbb{R}} e^{-a\frac{x^2}{2}}\phi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{x^2}{2}}\phi(x)\, dx = u_{it}(\phi).$$

Isto implica que $\lim_{a\to it,\, Re(a)>0} u_a = u_{it}$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Desta forma, $\lim_{a\to it,\, Re(a)>0}\mathcal{F}(u_a) = \mathcal{F}(u_{it})$, já que $\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é uma função contínua. Vamos, então, calcular $\mathcal{F}(u_a)$.

Seja $Re(a) > 0$. Logo

$$\mathcal{F}(u_a) = \int e^{-ix\xi}u_a(x)\, dx = \int e^{-ix\xi}e^{-a\frac{x^2}{2}}\, dx = \int e^{-\frac{a}{2}\left[\left(x+\frac{i\xi}{a}\right)^2+\frac{\xi^2}{a^2}\right]}dx =$$

$$e^{-\frac{\xi^2}{2a}}\int e^{-\frac{a}{2}\left(x+\frac{i\xi}{a}\right)^2}dx = e^{-\frac{\xi^2}{2a}}\int e^{-\frac{a}{2}y^2}dy.$$

Na última igualdade, utilizamos o Teorema de Cauchy. Já vimos que se $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, então

$$\int e^{-\frac{a}{2}y^2} dy = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Para $Re(a) > 0$, temos que $a \mapsto \int e^{-\frac{a}{2}y^2} dy$ é analítica e que $a \mapsto \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$ é analítica (Estamos tomando $\frac{1}{\sqrt{a}} = e^{-\frac{1}{2}\ln(a)}$, em que ln é tomado usando o ramo principal). Como ambas coincidem em $[0, \infty[$, concluímos que devem ser iguais (afinal são duas funções analíticas que coincidem num conjunto com ponto de acumulação). Concluímos que se $Re(a) > 0$, temos

$$\mathcal{F}(u_a) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}}.$$

Agora, observemos que para todo ξ fixo, temos a convergência pontual:

$$\lim_{a \to it,\, Re(a)>0} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}} = \sqrt{-2\pi i} e^{-\frac{\xi^2}{2i}}.$$

Além disso,

$$\left| \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}} \right| \leq \sqrt{2\pi} \left| e^{-\frac{1}{2}\ln(a)} e^{-\frac{\xi^2}{2|a|^2}(\mathrm{Re}(a) - i\mathrm{Im}(a))} \right| \leq \sqrt{2\pi}\, |a|^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{\mathrm{Re}(a)}{2|a|^2}\xi^2} \leq \sqrt{2\pi}\, |a|^{-\frac{1}{2}}.$$

Logo $\left| \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}} \right|$ é limitado por uma constante para a suficientemente próximo a it. Assim, pelo teorema da convergência dominada, concluímos que para todo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\lim_{a \to it,\, Re(a)>0} \int \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}} \phi(\xi)\, d\xi = \sqrt{-2\pi i} \int e^{-\frac{\xi^2}{2i}} \phi(\xi)\, d\xi.$$

Concluímos, assim, que $\lim_{a \to it,\, Re(a)>0} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}} = \sqrt{-2\pi i} e^{-\frac{\xi^2}{2i}}$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Logo

$$\mathcal{F}(u_{it}) = \sqrt{-2\pi i} e^{-\frac{\xi^2}{2i}}.$$

Exercício 19. (D.K. ex. 14.49) . (Transformada de Hilbert) A Transformada de Hilbert $\mathcal{H}\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é definida da seguinte maneira:

$$\mathcal{H}\phi = \frac{1}{\pi}\left(\phi * PV\left(\frac{1}{y}\right)\right)(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|y|>\epsilon} \frac{\phi(x-y)}{y} dy.$$

a) Mostre que $\mathcal{H}\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e que $\mathcal{F} \circ \mathcal{H} = -i\mathrm{sign}(\xi)\mathcal{F}$.

b) Prove que $\|\mathcal{H}\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ e que $\mathcal{H}^2 = -I$.

c) Prove que $\mathcal{H}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{x}{1+x^2}$.