LISTA DE EXERCÍCIOS 4 - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER (MAP 5722-4)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/DISTRIBUICOES

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do Duistermaat e Kolk (denotado por D.K.), do J. Hounie (denotado por Hounie) e do Rudin (denotado por Rudin).

Exercício 1. (D.K. ex. 11.3) Seja dado uma função $\mathcal{A} : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mostre que as seguintes propriedades de $\mathcal{A}$ são equivalentes:
i) $\mathcal{A}$ é uma função contínua linear que comuta com as derivadas ∂_j, ou seja, $\partial_j \mathcal{A} = \mathcal{A}\partial_j$.
ii) Existe uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{A}(\phi) = u * \phi$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
(Dica: Diferencie $a \mapsto T_a \circ \mathcal{A} \circ T_{-a}$)

Exercício 2. (D.K. feito no capítulo 12) (Fórmula Integral de Pompeiu) Vimos em sala de aula que para todos f e g de classe $C^1(\overline{\Omega})$, em que Ω é um aberto limitado com fronteira C^1, temos

$$\int_\Omega (\partial_{\overline{z}} f(z))\, g(z)\, dxdy + \int_\Omega f(z)\,(\partial_{\overline{z}} g(z))\, dxdy = -\frac{i}{2}\int_{\partial\Omega} f(z)\, g(z)\, dz.$$

Isto pode ser interpretado como

$$\partial_{\overline{z}}(f\chi_\Omega) = (\partial_{\overline{z}} f)\,\chi_\Omega - \frac{1}{2}(n_x + i n_y)\, f\delta_{\partial\Omega}.$$

Fazendo a convolução com a função $\frac{1}{\pi z}$, obtenha a seguinte fórmula, válida para todo $\zeta \in \Omega$:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\zeta}dz - \frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{\partial_{\overline{z}} f(z)}{z-\zeta}dz.$$

Observação: Se f é analítica, obtemos a fórmula de Cauchy.
Resposta: Vemos que

$$\partial_{\overline{z}}(f\chi_\Omega) * \frac{1}{\pi z} = (\partial_{\overline{z}} f)\,\chi_\Omega * \frac{1}{\pi z} - \frac{1}{2}(n_x + i n_y)\, f\delta_{\partial\Omega} * \frac{1}{\pi z}.$$

O primeiro termo pode ser calculado como:

$$\partial_{\overline{z}}(f\chi_\Omega) * \frac{1}{\pi z} = (f\chi_\Omega) * \left(\partial_{\overline{z}}\frac{1}{\pi z}\right) = (f\chi_\Omega) * \delta_0 = f\chi_\Omega.$$

Como $(\partial_{\overline{z}} f)\,\chi_\Omega$ é integrável e se anula fora de um compacto e $\frac{1}{\pi z}$ é localmente integrável, concluímos que (ver resolução do exercício 7):

$$(\partial_{\overline{z}} f)\,\chi_\Omega * \frac{1}{\pi z} = \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_{\overline{z}} f)(w)\,\chi_\Omega(w)\,\frac{1}{\pi(z-w)}dw = \frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{(\partial_{\overline{z}} f)(\zeta)}{(z-\zeta)}d\zeta.$$

Por fim, se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, então

$$\frac{1}{2}(n_x + i n_y)\, f\delta_{\partial\Omega} * \frac{1}{\pi z}(\phi) = \frac{1}{2}(n_x + i n_y)\, f\delta_{\partial\Omega}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{\pi\zeta}\phi(z+\zeta)\,d\zeta\right) =$$

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{\pi\zeta}\phi(z+\zeta)\,d\zeta\right) f(z)\,(n_x + i n_y)\,d\sigma(z) =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\phi(z+\zeta)}{\zeta}d\zeta\right) f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\phi(z+\zeta)}{\zeta}d\zeta\right) f(z)\,dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\phi(w)}{w-z}dw\right) f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(z)}{w-z}dz\right)\phi(w)\,dw.$$

Logo, tomando as restrições das distriuições em Ω, obtemos:

$$\left.\partial_{\overline{z}}(f\chi_\Omega) * \frac{1}{\pi z}\right|_\Omega = f\chi_\Omega|_\Omega = f,$$

$$\left(\partial_{\overline{z}} f\right) \chi_{\Omega} * \frac{1}{\pi z}\bigg|_{\Omega} = \frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \frac{\left(\partial_{\overline{z}} f\right)(\zeta)}{(z-\zeta)} d\zeta,$$

$$-\frac{1}{2}\left(n_x + i n_y\right) f \delta_{\partial\Omega} * \frac{1}{\pi z}\bigg|_{\Omega} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Concluímos que para $z \in \Omega$, temos

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \frac{\left(\partial_{\overline{z}} f\right)(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Exercício 3. (D.K. ex. 11.5) Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição tal que $\partial_{x_j} u = 0$ para todo $1 \le j \le n$. Prove que existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $u = c$.

Exercício 4. (Hounie. Capítulo IV ex. 7) Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sabemos que $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, pode ser interpretado como uma distribuição. Prove que esta distribuição coincide com o produto de convolução $u * T_\phi$, em que T_ϕ é a distribuição associada a ϕ. Em outras palavras, mostre que

$$T_{u*\phi} = u * T_\phi.$$

Resposta: Basta observar que se $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então

$$u * T_\phi(\psi) = u\left(S\left(T_\phi\right) * \psi\right) = u\left(S\left(T_\phi\right)\left(y \mapsto \psi(x-y)\right)\right) =$$

$$u\left(T_\phi\left(y \mapsto \psi(x+y)\right)\right) = u\left(\int \phi(y)\,\psi(x+y)\,dy\right) = u\left(\int \phi(z-x)\,\psi(z)\,dz\right) =$$

$$\int u\left(x \mapsto \phi(z-x)\right)\psi(z)\,dz = \int u * \phi(z)\,\psi(z)\,dz = T_{u*\phi}(\psi).$$

Usamos que $A : \mathbb{R}^n \mapsto C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por $A(z) = x \mapsto \phi(z-x)\,\psi(z)$ é tal que
1) $A(z) = 0$ para $z \notin \operatorname{supp}\psi$
2) $A(z)$ é uma função com suporte contido no compacto $\operatorname{supp}\phi + \operatorname{supp}\psi$.
3) Para todo $\epsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}_0$, existe uma constante $\delta > 0$ tal que $\|A(x) - A(y)\|_{C^N} < \epsilon$, para todo $|x-y| < \delta$.
Logo

$$u\left(\int A(z)\,dz\right) = \int u \circ A(z)\,dz,$$

em que

$$\left(\int A(z)\,dz\right)(x) = \left(\int A(z)(x)\,dz\right).$$

Exercício 5. (D.K. ex. 11.7) Seja f um polinômio em $\mathbb{R}$ de grau $\le m$ e $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Mostre que $f * T$ é uma função polinomial de grau $\le m$.

Resolução: Seja $f(t) = \sum_{j=0}^m a_j t^j$. Logo

$$(f*T)(t) = (T*f)(t) = T\left(s \mapsto f(t-s)\right) = T\left(s \mapsto \sum_{j=0}^m a_j (t-s)^j\right) =$$

$$T\left(s \mapsto \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^j \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} a_j (-1)^{j-k} t^k s^{j-k}\right) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^j \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} a_j (-1)^{j-k}\, T\left(s^{j-k}\right) t^k.$$

Assim, obtemos um polinômio em t.

Exercício 6. (D.K. ex. 11.8) Calcule $\delta_a * \delta_b$, em que a e $b \in \mathbb{R}^n$.

Resposta:
Sabemos que se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então

$$\delta_a * \delta_b(\phi) = \delta_a\left(S(\delta_b) * \phi\right) = \delta_a\left(S(\delta_b)\left(y \mapsto \phi(x-y)\right)\right) =$$

$$\delta_a\left(\delta_b\left(y \mapsto \phi(x+y)\right)\right) = \delta_a\left(\phi(x+b)\right) = \phi(a+b) = \delta_{a+b}(\phi).$$

Exercício 7. (D.K. ex. 11.9) Suponha que f e g pertençam a $C(\mathbb{R})$ e que f tenha suporte compacto. Mostre que $T_f * T_g = T_{f*g}$, ou seja, a convolução de duas funções no sentido de distribuições coincide com a convolução de duas funções no sentido usual de convolução de funções.

Resposta: Como f ou g tem suporte compacto, conclu´mos que T_f ou T_g pertence a $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sabemos que

$$T_f * T_g(\phi) = T_f(S(T_g) * \phi).$$

Porém

$$S(T_g) * \phi(x) = S(T_g)(y \mapsto \phi(x-y)) = T_g(S(y \mapsto \phi(x-y))) = T_g(y \mapsto \phi(x+y)) = \int g(y)\phi(x+y)\,dy.$$

Logo

$$T_f * T_g(\phi) = T_f\left(\int g(y)\phi(x+y)\,dy\right) = \int f(x)\int g(y)\phi(x+y)\,dydx = \int\int f(x)g(y)\phi(x+y)\,dxdy.$$

Note que na última igualdade usamos o Teorema de Fubini. Podemos fazê-lo, já que $(x,y) \mapsto f(x)g(y)\phi(x+y) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$m uma vez que ϕ tem suporte compacto e ou f ou g tem suporte compacto. Fazendo mudança de coordenadas, temos que se $z = x+y$ e $y = y$, então

$$\int\int f(x)g(y)\phi(x+y)\,dxdy = \int\int f(z-y)g(y)\phi(z)\,dzdy = \int\left(\int f(z-y)g(y)\,dy\right)\phi(z)\,dz = T_{f*g}(\phi).$$

Note que o mesmo argumento é válido para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e f ou g tem suporte compacto.

Exercício 8. (D.K. ex. 11.10) Seja $P(D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial linear em $\mathbb{R}^n$ com coeficientes constantes. Prove que:

a) $P(D)u = (P(D)\delta) * u$, para toda $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

b) $P(D)(u * v) = (P(D)u) * v = u * (P(D)v)$, para toda u e $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que ou u ou v tem suporte compacto.

Exercício 9. (D.K. ex. 11.11) Seja $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $S : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ o operador de reflexão: $Sv(x) = v(-x)$.

a) Prove que a função $(Sv)* : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ leva funções de suporte compacto em funções de suporte compacto, ou seja, $(Sv)* : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, de maneira contínua (ou seja, sequencialmente contínua).

b) Considere a função transposta

$${}^t(Sv*) : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Prove que ${}^t(Sv*)(u) = u * v$, para todo $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 10. (D.K. ex. 11.12) Seja E o subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ que consiste de finitas combinações lineares de deltas de Dirac δ_x, $x \in \mathbb{R}^n$.

a) Prove que para toda função contínua f em $\mathbb{R}^n$ existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em E tal que $\lim_{j\to\infty} u_j = f$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. (Dica: Para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, escreva $f(\phi)$ como o limite de somas de Riemann)

b) Prove, agora, que para toda distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em E tal que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Resposta:

a) Basta repetir o argumento do exercício 9 da lista 2. Vamos fazer isto abaixo.

Definamos

$$u_k = \frac{1}{k^n}\sum_{j_1=-k^2}^{k^2} \cdots \sum_{j_n=-k^2}^{k^2} f\left(\frac{j_1}{k}, \ldots, \frac{j_n}{k}\right)\delta_{\left(\frac{j_1}{k},\ldots,\frac{j_n}{k}\right)}.$$

Vamos mostrar que $\lim_{k\to\infty} u_k = f$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que supp$\phi \subset]-N, N[^n$. Assim, para $k > N$, temos

$$u_k(\phi) = \frac{1}{k^n}\sum_{j_1=-k^2}^{k^2} \cdots \sum_{j_n=-k^2}^{k^2} f\left(\frac{j_1}{k}, \ldots, \frac{j_n}{k}\right)\delta_{\left(\frac{j_1}{k},\ldots,\frac{j_n}{k}\right)}(\phi) =$$

$$\frac{1}{k^n}\sum_{j_1=-Nk}^{Nk} \cdots \sum_{j_n=-Nk}^{Nk} f\left(\frac{j_1}{k}, \ldots, \frac{j_n}{k}\right)\delta_{\left(\frac{j_1}{k},\ldots,\frac{j_n}{k}\right)}(\phi) =$$

$$\frac{1}{k^n}\sum_{j_1=0}^{2Nk} \cdots \sum_{j_n=0}^{2Nk} f\left(-N + \frac{j_1}{k}, \ldots, -N + \frac{j_n}{k}\right)\phi\left(-N + \frac{j_1}{k}, \ldots, -N + \frac{j_n}{k}\right).$$

Vemos assim, que estamos dividindo o intervalo $[-N,N]^n$ em $(2Nk)^n$ pedaços de tamanho $\frac{1}{k^n}$. Como f e ϕ são funções contínuas em $[-N,N]^n$, a integral converge de $f\phi$ Riemann existe. Logo

$$\lim_{k\to\infty} u_k(\phi) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^n} \sum_{j_1=0}^{2Nk} \dots \sum_{j_n=0}^{2Nk} f\left(-N+\frac{j_1}{k}, \dots, -N+\frac{j_n}{k}\right) \phi\left(-N+\frac{j_1}{k}, \dots, -N+\frac{j_n}{k}\right) =$$

$$\int_{[-N,N]^n} f(x)\phi(x)\,dx = \int_{R^n} f(x)\phi(x)\,dx.$$

Note que temos a igualdade $\int_{[-N,N]^n} = \int_{\mathbb{R}^n}$ acima, pois ϕ se anula fora de $[-N,N]^n$. Assim, concluímos que $\lim_{k\to\infty} u_k = f$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (f no sentido de distribuições, ou seja, T_f na notação de sala de aula).

b)

Usando a estimativa acima para k grande, concluímos que:

A parte difícil é a prova do seguinte lema:

Lema 11. *Sejam $N\in\mathbb{N}_0$, $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\epsilon>0$. Logo existe $\tilde{u}\in E$ tal que*

$$|\tilde{u}(\phi) - f(\phi)| \le \epsilon\left(\|\phi\|_{L^\infty([-N,N]^n)} + \|\nabla\phi\|_{L^\infty([-N,N]^n)}\right),\ \forall\phi\in C_c^\infty(]-N,N[^n).$$

Vamos assumir este lema por um momento.

Seja $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Sabemos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Logo existe $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0}\subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty} f_j = u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}_0}\subset E$ tal que

$$|u_j(\phi) - f_j(\phi)| \le \frac{1}{j}\left(\|\phi\|_{L^\infty([-j,j]^n)} + \|\nabla\phi\|_{L^\infty([-j,j]^n)}\right),\ \forall\phi\in C_c^\infty(]-j,j[^n).$$

Vamos mostrar que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo existe $N\in\mathbb{N}_0$ tal que $\operatorname{supp}(\phi)\subset\,]-N,N[^n$. Logo para $j>N$, temos

$$|u_j(\phi) - u(\phi)| \le |u_j(\phi) - f_j(\phi)| + |f_j(\phi) - u(\phi)| \le$$

$$\frac{1}{j}\left(\|\phi\|_{L^\infty([-j,j]^n)} + \|\nabla\phi\|_{L^\infty([-j,j]^n)}\right) + |f_j(\phi) - u(\phi)|.$$

Assim,

$$\lim_{j\to\infty} |u_j(\phi) - u(\phi)| = 0.$$

Agora vamos demonstrar o lema:

Demonstração. (Demonstração do Lema)

Seja $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $N\in\mathbb{N}_0$. Logo para todo $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com suporte em $[-N,N]^n$, temos que $\int_{R^n} f(x)\phi(x)\,dx = \int_{[-N,N]^n} f(x)\phi(x)\,dx$ e que

$$\left|\int_{[-N,N]^n} f(x)\phi(x)\,dx - \frac{1}{k^n}\sum_{j_1=0}^{2Nk}\dots\sum_{j_n=0}^{2Nk} f\left(-N+\frac{j_1}{k},\dots,-N+\frac{j_n}{k}\right)\phi\left(-N+\frac{j_1}{k},\dots,-N+\frac{j_n}{k}\right)\right| \le$$

$$\left|\sum_{j_1=0}^{2Nk}\dots\sum_{j_n=0}^{2Nk}\int_{\left[-N+\frac{j_1}{k},-N+\frac{j_1+1}{k}\right]\times\dots\times\left[-N+\frac{j_n}{k},-N+\frac{j_n+1}{k}\right]} f(x)\phi(x)\,dx- \le\right.$$

$$\left.\frac{1}{k^n}\sum_{j_1=0}^{2Nk}\dots\sum_{j_n=0}^{2Nk} f\left(-N+\frac{j_1}{k},\dots,-N+\frac{j_n}{k}\right)\phi\left(-N+\frac{j_1}{k},\dots,-N+\frac{j_n}{k}\right)\right| \le$$

$$\sum_{j_1=0}^{2Nk}\dots\sum_{j_n=0}^{2Nk}\int_{\left[-N+\frac{j_1}{k},-N+\frac{j_1+1}{k}\right]\times\dots\times\left[-N+\frac{j_n}{k},-N+\frac{j_n+1}{k}\right]} \left|f(x)\phi(x)\right.$$

$$\left.-f\left(-N+\frac{j_1}{k},\dots,-N+\frac{j_n}{k}\right)\phi\left(-N+\frac{j_1}{k},\dots,-N+\frac{j_n}{k}\right)\right|dx.$$

Observemos que

$$\left|f(x)\phi(x) - f\left(-N+\frac{j_1}{k},\dots,-N+\frac{j_n}{k}\right)\phi\left(-N+\frac{j_1}{k},\dots,-N+\frac{j_n}{k}\right)\right| \le$$

$$\sum_{m=1}^{n}\left(x_m+N-\frac{j_m}{k}\right)\int_0^1\left|\partial_{x_m}(f\phi)\left(x_1+\theta\left(-N+\frac{j_1}{k}-x_1\right),...,x_n+\theta\left(-N+\frac{j_n}{k}-x_n\right)\right)\right|d\theta\leq$$
$$\sum_{m=1}^{n}\left(x_m+N-\frac{j_m}{k}\right)\|\partial_{x_m}(f\phi)\|_{L^\infty([-N,N]^n)}.$$

Logo

$$\sum_{j_1=0}^{2Nk}...\sum_{j_n=0}^{2Nk}\int_{\left[-N+\frac{j_1}{k},-N+\frac{j_1+1}{k}\right]\times...\times\left[-N+\frac{j_n}{k},-N+\frac{j_n+1}{k}\right]}|f(x)\phi(x)-$$
$$f\left(-N+\frac{j_1}{k},...,-N+\frac{j_n}{k}\right)\phi\left(-N+\frac{j_1}{k},...,-N+\frac{j_n}{k}\right)\bigg|dx\leq$$
$$\sum_{j_1=0}^{2Nk}...\sum_{j_n=0}^{2Nk}\sum_{m=1}^{n}\|\partial_{x_l}(f\phi)\|_{L^\infty([-N,N]^n)}\int_{\left[-N+\frac{j_1}{k},-N+\frac{j_1+1}{k}\right]\times...\times\left[-N+\frac{j_n}{k},-N+\frac{j_n+1}{k}\right]}\left(x_m+N-\frac{j_l}{k}\right)dx=$$
$$\sum_{j_1=0}^{2Nk}...\sum_{j_n=0}^{2Nk}\sum_{m=1}^{n}\|\partial_{x_m}(f\phi)\|_{L^\infty([-N,N]^n)}\frac{1}{2^nk^{2n}}\leq\sum_{m=1}^{n}\|\partial_{x_m}(f\phi)\|_{L^\infty([-N,N]^n)}\frac{(2Nk)^n}{2^nk^{2n}}\leq$$
$$\sum_{m=1}^{n}\|\partial_{x_m}(f\phi)\|_{L^\infty([-N,N]^n)}\frac{N^n}{k^n}\leq$$
$$\left(\frac{N}{k}\right)^n\left(\|f\|_{L^\infty([-N,N]^n)}+\|\nabla f\|_{L^\infty([-N,N]^n)}\right)\left(\|\phi\|_{L^\infty([-N,N]^n)}+\|\nabla\phi\|_{L^\infty([-N,N]^n)}\right).$$

Assim, tomando k suficientemente grande, concluímos que para todo $N\in\mathbb{N}_0$, $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\epsilon>0$, existe $\tilde{u}\in E$ tal que

$$|\tilde{u}(\phi)-f(\phi)|\leq\epsilon\left(\|\phi\|_{L^\infty([-N,N]^n)}+\|\nabla\phi\|_{L^\infty([-N,N]^n)}\right),\ \forall\phi\in C_c^\infty(]-N,N[^n).$$

Basta escolher k tal que $\left(\frac{N}{k}\right)^n\left(\|f\|_{L^\infty([-N,N]^n)}+\|\nabla f\|_{L^\infty([-N,N]^n)}\right)\leq\epsilon$. □

Exercício 12. (D.K. ex. 12.1) Determine todas as soluções fundamentais $E_k\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $P=\frac{d^k}{dx^k}$ para $k\in\mathbb{N}_0$. Quais destas distribuições são homogêneas? De qual grau?

Resposta: Sabemos que $P=\frac{d}{dx}H=\delta$. Logo $E_1=H$ éuma solução fundamental de $\frac{d}{dx}$. Logo se $\frac{d^2}{dx^2}E_2=\delta$, basta escolher E_2 tal que $\frac{d}{dx}E_2=H$. É fácil de ver que uma opção é dada por $E_2=H(x)x$ é uma solução fundamental de $\frac{d^2}{dx^2}$. Da mesma forma, se $\frac{d^3}{dx^3}E_3=\delta$, basta escolher E_2 tal que $\frac{d}{dx}E_2=H(x)x$. Assim, podemos ver que $E_3=H(x)\frac{x^2}{2}$ é uma solução fundamental de $\frac{d^3}{dx^3}$. Continuando por indução, concluímos que $E_k=H(x)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ é uma solução fundamental de $\frac{d^k}{dx^k}$. Se $\tilde{E}_k$ for outra solução fundamental, então $\frac{d^k}{dx^k}\left(E_k-\tilde{E}_k\right)=0$. Logo, como vimos na primeira parte do curso, $E_k-\tilde{E}_k$ é um polinômio de grau $k-1$, ou seja,

$$\tilde{E}_k=H(x)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}+\sum_{j=0}^{k-1}c_jx^j.$$

Assim, o conjunto de todas as soluções fundamentais de $\frac{d^k}{dx^k}$ é dado por distribuições da forma acima. Como $H(x)\frac{x^k}{k!}$ é homogênea de grau $k-1$ e x^j são homogêneas de grau j, concluímos que as soluções fundamentais homogêneas são da forma

$$\tilde{E}_k=H(x)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}+cx^{k-1},$$

para $c\neq0$ e têm grau $k-1$.

Exercício 13. (D.K. ex. 11.14) Defina, por indução matemática em k, a função χ_+^k que satisfaz: $\chi_+^1=H$, a função de Heavside, e $\chi_+^k=H*\chi_+^{k-1}$, para $k>1$.

a) Calcule todas as funções χ_+^k e todas as suas derivadas.

b) Para $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, verifique a fórmula

$$\frac{d^k}{dx^k}(\phi H)=\sum_{j=0}^{k-1}\phi^{(k-j-1)}(0)\,\delta^{(j)}+\phi^{(k)}H.$$

Faça a convolução dos dois lados por χ_+^k. Interprete o resultado.

Resolução:
a) Vamos calcular

$$\chi_+^2(x) = H * H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y)\,H(y)\,dy = \int_0^{\infty} H(x-y)\,dy = \begin{cases} \int_0^x dy,\ x \geq 0 \\ 0,\ x \leq 0 \end{cases} = H(x)\,x,$$

$$\chi_+^3(x) = \chi_+^2 * H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} yH(y)\,H(x-y)\,dy = H(x)\int_0^x y dy = H(x)\,\frac{x^2}{2}.$$

Por indução, vemos que $\chi_+^k(x) = H(x)\,\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$. De fato,

$$\chi_+^{k+1}(x) = \chi_+^k * H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} H(y)\,H(x-y)\,dy = H(x)\int_0^x \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} dy = H(x)\,\frac{x^k}{k!}.$$

Agora vemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\chi_+^k\right) = \frac{d}{dx}\left(H * \chi_+^{k-1}\right) = \frac{d}{dx}(H) * \chi_+^{k-1} = \delta * \chi_+^{k-1} = \chi_+^{k-1}.$$

Assim, se $l < k$, temos

$$\frac{d^l}{dx^l}\left(\chi_+^k\right) = \chi_+^{k-l}.$$

Se $l \geq k$, então

$$\frac{d^l}{dx^l}\left(\chi_+^k\right) = \frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}}(\delta_0).$$

b) Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Logo

$$\frac{d^k}{dx^k}(\phi H)(\varphi) = (-1)^k(\phi H)\left(\frac{d^k}{dx^k}\varphi\right) = (-1)^k\int_0^{\infty}\phi(x)\,\frac{d^k\varphi}{dx^k}(x)\,dx =$$

$$(-1)^k\left(\phi(x)\,\frac{d^{k-1}\varphi}{dx^{k-1}}(x)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{d\phi}{dx}(x)\,\frac{d^{k-1}\varphi}{dx^{k-1}}(x)\,dx\right) =$$

$$(-1)^k\left(-\phi(0)\,\frac{d^{k-1}\varphi}{dx^{k-1}}(0) - \int_0^{\infty}\frac{d\phi}{dx}(x)\,\frac{d^{k-1}\varphi}{dx^{k-1}}(x)\,dx\right) =$$

$$(-1)^k\left(-\phi(0)\,\frac{d^{k-1}\varphi}{dx^{k-1}} + \frac{d\phi}{dx}(0)\,\frac{d^{k-2}\varphi}{dx^{k-2}}(0) + \int_0^{\infty}\frac{d^2\phi}{dx^2}(x)\,\frac{d^{k-2}\varphi}{dx^{k-2}}(x)\,dx\right) = ... =$$

$$(-1)^k\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j-1}\,\frac{d^j\phi}{dx^j}(0)\,\frac{d^{k-j-1}\varphi}{dx^{k-j-1}}(0) + (-1)^k\int_0^{\infty}\frac{d^k\phi}{dx^k}(x)\,\varphi(x)\,dx\right) =$$

$$(-1)^k\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j-1}(-1)^{k-j-1}\,\frac{d^j\phi}{dx^j}(0)\,\frac{d^{k-j-1}\delta_0}{dx^{k-j-1}}(\varphi) + (-1)^k\int_0^{\infty}\frac{d^k\phi}{dx^k}(x)\,\varphi(x)\,dx\right) =$$

$$\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{d^j\phi}{dx^j}(0)\,\delta_0^{(k-j-1)} + H(x)\,\frac{d^k\phi}{dx^k}(x)\right)(\varphi).$$

Fazendo a convolução com χ_+^k, obtemos

$$\frac{d^k}{dx^k}(\phi H) * \chi_+^k = \sum_{j=0}^{k-1}\phi^{(k-j-1)}(0)\,\delta^{(j)} * \chi_+^k + \left(\phi^{(k)}H\right) * \chi_+^k.$$

Assim,

$$(\phi H) * \left(\frac{d^k}{dx^k}\chi_+^k\right) = \sum_{j=0}^{k-1}\phi^{(k-j-1)}(0)\,\delta * \frac{d^j}{dx^j}\chi_+^k + \left(\phi^{(k)}H\right) * \chi_+^k \implies$$

$$(\phi H) * \delta = \sum_{j=0}^{k-1}\phi^{(k-j-1)}(0)\,\frac{d^j}{dx^j}\chi_+^k + \left(\phi^{(k)}H\right) * \chi_+^k \implies$$

$$\phi H = \sum_{j=0}^{k-1}\phi^{(k-j-1)}(0)\,\chi_+^{k-j} + \left(\phi^{(k)}H\right) * \chi_+^k \implies$$

$$\phi H = \sum_{j=0}^{k-1} \phi^{(k-j-1)}(0) H(x) \frac{x^{k-j-1}}{(k-j-1)!} + \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(k)}(y) H(y) H(x-y) \frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} dy \implies$$

$$H(x)\phi(x) = H(x) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j}{j!} \phi^{(j)}(0) + H(x) \int_0^x \phi^{(k)}(y) \frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} dy.$$

Isto é a fórmula da Taylor para $x \geq 0$.

Exercício 14. (D.K. ex. 11.15 e Rudin cap.6 2.4) Seja H a função de Heaviside e $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$.
a) Mostre que $H * \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(y)\, dy$.
b) Mostre que $\delta' * H = \delta$.
c) Mostre que $1 * \delta' = 0$.
d) Mostre que $1 * (\delta' * H) = 1 * \delta = 1$ e que $(1 * \delta') * H = 0 * H = 0$. Isto contradiz o resultado de associatividade visto em sala de aula?

Resposta:
a) Basta usar as definições:

$$H * \phi(x) = H(y \mapsto \phi(x-y)) = \int_{-\infty}^{\infty} H(y)\phi(x-y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y)\phi(y)\, dy = \int_{-\infty}^{x} \phi(y)\, dy.$$

b) Basta observar que

$$\delta' * H = \left(\frac{d}{dx}\delta\right) * H = \frac{d}{dx}(\delta * H) = \frac{d}{dx} H = \delta.$$

c) Basta observar que

$$1 * \delta' = 1 * \left(\frac{d}{dx}\delta\right) = \frac{d}{dx}(1 * \delta) = \frac{d}{dx} 1 = 0.$$

d) Dos itens acima, obtemos que $1 * (\delta' * H) = 1 * \delta = 1$ e que $(1 * \delta') * H = 0 * H = 0$. Logo

$$1 * (\delta' * H) \neq (1 * \delta') * H.$$

Isto não contradiz o resultado visto em sala de aula, já que a associatividade mostrada em sala de aula vale apenas quando temos ao menos duas distribuições com suporte compacto. No entanto, acma δ tem suporte compacto. No entanto, 1 e H nã têm suportes compactos.

Exercício 15. (D.K. ex. 10.25) (Equação de Onda) Denote os pontos de $\mathbb{R}^2$ por (x,t). Mostre que se u e v são distribuições em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, então $u(t+x)+v(t-x)$ é solução da equação de onda: $\partial_t^2 - \partial_x^2$. (Note que estamos usando o difeomorfismo $\Phi(x,t) = (t+x, t-x)$)

Resposta: Faremos para o caso em que u e v são funções contínuas. Vamos fazer a prova somente para uma função contínua da forma $f(x+t)$, já que a prova para $f(x-t)$ é análoga.
Vamos provar que $f(x+t)$ é solução da equação de onda. Seja $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ uma função teste arbitrária. Logo

$$\left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f(x+t), \varphi(x,t) \right\rangle = \left\langle f(x+t), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) \right\rangle =$$

$$\left\langle f(x+t), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t) \right\rangle - \left\langle f(x+t), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) \right\rangle =$$

$$\int f(x+t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t) dx dt - \int f(x+t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) dx dt.$$

Vamos agora fazer as mudanças de coordenadas

$$y = x - vt$$

$$s = t.$$

Logo

$$dx dt = \left| \det \frac{\partial(x,t)}{\partial(y,s)} \right| dy ds = dy ds.$$

Assim

$$\left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f(x+t), \varphi(x,t) \right\rangle = \int f(y) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)(y - s.s) dy ds - \int f(y) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)(y - s.s) dy ds.$$

Definindo $\psi(y,s) := \varphi(y-s,s)$ temos que $\varphi(x,t) = \psi(x+t,t)$. Assim usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(x+t,t),$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial\psi}{\partial y}(x+t,t) + \frac{\partial\psi}{\partial s}(x+t,t),$$

logo

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(x+t,t) + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial s}(x+t,t) + \frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}(x+t,t).$$

Assim

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(y-s,s) = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(y,s),$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(y-s,s) = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(y,s) + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial s}(y,s) + \frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}(y,s).$$

Substituindo tudo obtemos

$$\left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f(x+t), \varphi(x,t) \right\rangle = \int f(y) 2\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial s}(y,s)dyds + \int f(y)\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}(y,s)dyds = 0,$$

pois

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial s}(y,s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}(y,s)ds = 0,$$

já que $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ e $\frac{\partial\psi}{\partial s}$ têm suportes compactos.

Exercício 16. (D.K. ex. 12.11) Suponha que $P(D)$ e $Q(D)$ sejam operadores hipoelípticos.

a) Mostre que a composição $P(D)\,Q(D)$ também é um operador hipoelíptico.

b) Calcule a composição de ∂_z com $\partial_{\overline{z}}$. Use isto para determinar, a partir da solução fundamental de Δ, a solução fundamental de ∂_z e de $\partial_{\overline{z}}$.

Exercício 17. (D.K. ex. 12.4) (Fórmula de Green e o Problema de Dirichlet) Suponha que $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é uma solução fundamental do operador de Laplace Δ e considere uma função harmônica u definida num aberto Ω de $\mathbb{R}^n$. Seja U um aberto de Ω tal que $\overline{U}$ seja um compacto contido em Ω. Prove que $v := \Delta(u\chi_U)$ é uma distribuição em Ω cujo suporte está contido em ∂U. Prove também que $v \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e que $u\chi_U = E * v$.

Agora assuma que a fronteira ∂U é de classe C^1 e denote a normal exterior ao bordo no ponto $y \in \partial U$ por $\nu(y)$. Para uma função f definida numa vizinhança de ∂U, a derivada normal de $\partial_\nu f$ de f é definida como

$$\partial_\nu f = \sum_{j=1}^{n} \nu_j(y)\,\partial_j f(y), \quad y \in \partial U.$$

A função acima é contínua em ∂U. Prove agora a fórmula de Green:

$$u(x) = \int_{\partial U} \left(u(y)\,\partial_\nu\left(y \mapsto E(x-y)\right) - E(x-y)\,\partial_\nu u(y)\right) dy, \forall x \in U.$$

Mostre, por fim, que o lado direito da equação acima se anula quando $x \notin U$.

Resposta: Vamos começar mostrando que $\operatorname{supp}(v) \subset \partial U$. De fato, se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tem suporte disjunto de ∂U, concluímos que

$$v(\phi) = \Delta(u\chi_U)(\phi) = (u\chi_U)(\Delta\phi) = \int_U u(x)(\Delta\phi)(x)\,dx = \int_U \Delta u(x)\,\phi(x)\,dx = 0.$$

Na penútima igualdade, usamos que ϕ se anula numa vizinhança de ∂U. Logo podemos fazer integração por partes.

Agora observemos que

$$u\chi_U = E * v = E * \Delta(u\chi_U) = (\Delta E) * (u\chi_U) = \delta * (u\chi_U) = u\chi_U.$$

Por fim, observemos que para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\int_U u(x)\,\Delta\phi(x)\,dx = \int_U u(x)\,\nabla.\left(\nabla\phi(x)\right)dx =$$
$$\int_U \nabla.\left(u(x)\,\nabla\phi(x)\right)dx - \int_U \nabla u(x)\,.\nabla\phi(x)\,dx = \int_{\partial U} u(x)\,\nabla\phi(x)\,.n(x)\,d\sigma(x) - \int_U \nabla u(x)\,.\nabla\phi(x)\,dx.$$

E que

$$\int_U \Delta u(x)\,\phi(x)\,dx = \int_U \phi(x)\,\nabla.\left(\nabla u(x)\right)dx =$$

$$\int_U \nabla.\left(\phi(x)\,\nabla u(x)\right)dx - \int_U \nabla\phi(x)\,.\nabla u(x)\,dx = \int_{\partial U} \phi(x)\,\nabla u(x)\,.n(x)\,d\sigma(x) - \int_U \nabla u(x)\,.\nabla\phi(x)\,dx.$$

Logo

$$\int_U u(x)\,\Delta\phi(x)\,dx - \int_U \Delta u(x)\,\phi(x)\,dx = \int_{\partial U} u(x)\,\nabla\phi(x)\,.n(x)\,d\sigma(x) - \int_{\partial U} \phi(x)\,\nabla u(x)\,.n(x)\,d\sigma(x).$$

Assim,

$$\Delta(\chi_U u) - \chi_U(\Delta u) = -\partial_\nu(u\delta_{\partial U}) - (\partial_\nu u)\,\delta_{\partial U}.$$

Como u é harmônica, obtemos

$$\Delta(\chi_U u) = -\partial_\nu(u\delta_{\partial U}) - (\partial_\nu u)\,\delta_{\partial U}.$$

Assim,

$$\chi_U u = (\chi_U u) * \delta = (\chi_U u) * (\Delta E) = \Delta(\chi_U u) * E =$$

$$(-\partial_\nu(u\delta_{\partial U}) - (\partial_\nu u)\,\delta_{\partial U}) * E = -(u\delta_{\partial U}) * (\partial_\nu E) - (\partial_\nu u)\,\delta_{\partial U} * E.$$

Portanto,

$$\chi_U(x)\,u(x) = \int \left(-u(y)\left(y \mapsto \partial_\nu E(x-y)\right) - (\partial_\nu u(y))\left(y \mapsto E(x-y)\right)\right)d\sigma(y) =$$

$$\int \left(u(y)\,\partial_\nu\left(y \mapsto E(x-y)\right) - (\partial_\nu u(y))\left(y \mapsto E(x-y)\right)\right)d\sigma(y).$$

Logo se $x \notin U$, então $\chi_U(x)\,u(x) = 0$ e a integral é igual a 0. Se $x \in U$, então

$$u(x) = \int \left(u(y)\,\partial_\nu\left(y \mapsto E(x-y)\right) - (\partial_\nu u(y))\left(y \mapsto E(x-y)\right)\right)d\sigma(y).$$

Exercício 18. (D.K. ex. 12.7) (Equação de Onda Unidimensional) Defina o conjunto aberto $V := \{(x,t) : |x| < t\}$. Ache uma constante $a \in \mathbb{C}$ tal que $E = a\chi_V$ é uma solução fundamental de $\partial_t^2 - \partial_x^2$, em que χ_V é a função característica do conjunto V. Determine supp(E) e o singsupp(E)

Exercício 19. (D.K. ex. 12.12) Seja E a solução fundamental de Δ em $\mathbb{R}^n$. Sejam g_j, para j de 1 a n, distribuições de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ com a propriedade de que $\partial_j g_k = \partial_k g_j$ para todo j e k. Prove que a distribuição

$$f = \sum_{j=1}^{n} \partial_j E * g_j$$

satisfaz o sistema de equações diferenciais

$$\partial_j f = g_j,\ \forall j.$$