LISTA DE EXERCÍCIOS 3 - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER (MAP 5722-4)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/∼PPLOPES/DISTRIBUICOES

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do Duistermaat e Kolk (denotado por D.K.) e da Gerd Grubb (denotado por G).

Exercício 1. (D.K. ex. 7.1) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f \in C(\Omega)$. Mostre que o suporte de f como função e como distribuição coincidem $(supp\,(f) = supp\,(T_f))$.

Resposta: Feito em sala de aula.

Exercício 2. (D.K. ex. 7.2 e 7.10) Determine o suporte e o suporte singular das distribuições δ_0, $PV\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{x\pm i0}$ e $H(x)$, em que H é a função de Heaviside.

Resposta: Vemos que:
$\text{supp}\delta_0 = \{0\}$, $\text{supp}PV\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R}$, $\text{supp}\frac{1}{x\pm i0} = \mathbb{R}$, $\text{supp}H(x) = [0, \infty[$.
$\text{sing supp}\delta_0 = \{0\}$, $\text{sing supp}PV\left(\frac{1}{x}\right) = \{0\}$, $\text{sing supp}\frac{1}{x\pm i0} = \{0\}$, $\text{sing supp}H(x) = \{0\}$.

Exercício 3. (D.K. ex. 7.3 e 7.11) Seja $P(D) = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial linear com coeficientes constantes e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Mostre que:
a) $\text{supp}\,(P(D)\,u) \subset \text{supp}\,(u)$.
b) $\text{sing supp}\,(P(D)\,u) \subset \text{sing supp}\,(u)$.

Exercício 4. (D.K. ex. 7.6) Seja $a \in \mathbb{C}$ e definamos $x_+^a = \begin{cases} x^a = e^{a\ln(x)},\ x > 0 \\ 0,\ x \leq 0 \end{cases}$. Prove as seguintes afirmações:

a) Se $Re(a) > -1$, então x_+^a é uma função localmente integrável em $\mathbb{R}$ e, portanto, pode ser interpretada como uma distribuição.

b) Se a não é um inteiro negativo, então

$$x_+^a = \frac{1}{(a+k)\dots(a+1)}\partial_x^k x_+^{a+k},\ \text{para}\, k > -Re(a) - 1$$

define uma distribuição em $\mathbb{R}$ que é uma extensão da distribuição dada pela função x_+^a em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. A distribuição acima independe de k, desde que k seja maior do que $-Re(a)-1$. Determine o suporte e a ordem desta distribuição. O que ocorre se a parte real de a é um inteiro negativo, mas sua parte imaginária não se anula?

c) Seja $l_+(x) = \begin{cases} \ln(x),\ x > 0 \\ 0,\ x \leq 0 \end{cases}$. Logo $l_+(x)$ é uma função localmente integrável em $\mathbb{R}$ e, portanto, define uma distribuição em $\mathbb{R}$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\partial_x^k l_+$ é uma distribuição em $\mathbb{R}$ que estende a distribuição em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ dada pela função x_+^{-k}. Determine seu suporte e sua ordem.

d) Formule resultados similares partindo de $(-x)_+^a$ e de $l_+(-x)$.

Exercício 5. (D.K. ex. 7.9) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Suponha que para todo $x \in \Omega$ exista uma vizinhança aberta de x, $U_x \subset \Omega$, com a seguinte propriedade:
Para toda função $\phi \in C_c^\infty(U_x)$, a sequência em $\mathbb{C}$ dada por $(u_j(\phi))_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente.
Prove que existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$.

Resposta: Vimos em sala de aula que para provar que uma sequência de distribuições $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge para uma distribuição, basta mostrar que $(u_j(\phi))_{j\in\mathbb{N}}$ converge para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $K := \text{supp}\phi$. Seja $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m$ uma partição da unidade de K subordinada a cobertura $\mathcal{U} := \{U_x : x \in \Omega\}$. Logo existem x_k tais que $\text{supp}\psi_k \subset U_{x_k}$ e $\phi = \sum_{k=1}^m \psi_k\phi$. Assim

$$u_j(\phi) = u_j\left(\sum_{k=1}^m \psi_k\phi\right) = \sum_{k=1}^m u_j(\psi_k\phi).$$

Como o limite $\lim_{j\to\infty} u_j(\psi_k\phi)$ existe para todo $k \in \{1, ..., m\}$, já que $\psi_k\phi \in C_c^\infty(U_{x_k})$, concluímos que o limite $\lim_{j\to\infty} u_j(\phi)$ sempre existe.

Exercício 6. (D.K. ex. 8.1) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Suponha que o suporte singular de u seja compacto. Prove que u tem ordem finita.

Resposta: Seja K o suporte singular de u. Logo K é um compacto contido em Ω. Seja $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ uma função igual a 1 numa vizinhança de K. Assim $1-\chi$ é igual a zero numa vizinhança de K. Sabemos que existe $f \in C^\infty(\Omega \backslash K)$ tal que $u|_{\Omega\backslash K} = T_f$. Seja $\tilde{K} := \operatorname{supp}\chi$. Logo $\tilde{K}$ é um compacto. Portanto existem constantes $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}_0$ tais que

$$|u(\phi)| \le C\|\phi\|_{C^m}, \forall \phi \in C_c^\infty\left(\tilde{K}\right).$$

Vamos mostrar que a ordem de u é menor ou igual a m. Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo

$$u(\phi) = u(\chi\phi) + u((1-\chi)\phi) =$$

$$u(\chi\phi) + T_f((1-\chi)\phi) = u(\chi\phi) + \int_{\Omega\backslash K} f(x)(1-\chi(x))\phi(x)\,dx.$$

Logo se $\mathcal{K}$ é um compacto contido em Ω e $\phi \in C_c^\infty(\mathcal{K})$, então

$$|u(\phi)| \le |u(\chi\phi)| + \left|\int_{\Omega\backslash K} f(x)(1-\chi(x))\phi(x)\,dx\right| \le$$

$$C\|\chi\phi\|_{C^m} + \int_{\mathcal{K}\backslash K} |f(x)(1-\chi(x))|\,dx\,\|\phi\|_{C^0} \le \left(C_\chi + \int_{\mathcal{K}\backslash K} |f(x)(1-\chi(x))|\,dx\right)\|\phi\|_{C^m}.$$

Logo u tem ordem menor ou igual a m. Observemos que $x \in \Omega \mapsto f(x)(1-\chi(x))\phi(x)$ tem suporte compacto contido em $\Omega\backslash K$. Logo a última integral acima está bem definida.

Exercício 7. (D.K. ex. 8.2) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ uma sequência que converge a $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Mostre que:

a) Se existe um compacto K contido em Ω tal que $\operatorname{supp}(u_j) \subset K$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $\operatorname{supp}(u) \subset K$.

b) Se existe um compacto K contido em Ω tal que $\operatorname{supp}(u_j) \subset K$ para todo $j \in \mathbb{N}$, o seguinte limite $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ vale em $\mathcal{E}'(\Omega)$, isto é, para todo $\phi \in C^\infty(\Omega)$ temos que $\lim_{j\to\infty} u_j(\phi) = u(\phi)$.

c) Seja $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em Ω com a propriedade de que $\lim_{j\to\infty} d(a_j, \mathbb{R}^n\backslash\Omega) = 0$ ou $\lim_{j\to\infty}\|a_j\| = 0$. Prove que $\lim_{j\to\infty}\delta_{a_j} = 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, mas não em $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Exercício 8. (G. ex. 3.17) A distribuição $\frac{d^k}{dx^k}\delta_0$ é frequentemente denotada por $\delta^{(k)}$. Para $k = 1,2,3$, a notação δ', δ'' e δ''' (respectivamente) também é usada. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

a) Mostre que existem constantes c_0 e c_1 tais que a identidade $f\delta' = c_0\delta + c_1\delta'$ é válida.

(b) Para $k \in \mathbb{N}_0$, mostre que existem constantes c_{kj} adequadas para as quais a seguinte identidade é válida: $f\delta^{(k)} = \sum_{j=0}^k c_{kj}\delta^{(j)}$.

(Dica: Use a definição de multiplicação por funções e a regra de Leibniz).

Resposta:

a) Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Logo

$$f\delta'(\phi) = \delta'(f\phi) = -\frac{d}{dx}(f\phi)(0) = -\frac{df}{dx}(0)\phi(0) - \frac{d\phi}{dx}(0)f(0) = -f'(0)\delta_0(\phi) + f(0)\delta_0'(\phi).$$

Assim,

$$f\delta' = -f'(0)\delta_0 + f(0)\delta_0'.$$

b) Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Logo

$$f\delta^{(k)}(\phi) = (-1)^k\delta_0\left(\frac{d^k}{dx^k}(f\phi)\right) =$$

$$(-1)^k\delta_0\left(\sum_{j=0}^k \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}\frac{d^jf}{dx^j}\frac{d^{k-j}\phi}{dx^{k-j}}\right) = (-1)^k\sum_{j=0}^k \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}\frac{d^jf}{dx^j}(0)\frac{d^{k-j}\phi}{dx^{k-j}}(0) =$$

$$(-1)^k\sum_{j=0}^k \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}\frac{d^jf}{dx^j}(0)(-1)^{k-j}\delta_0^{(k-j)}(\phi) =$$

$$\sum_{j=0}^k \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}(-1)^{k-j}\frac{d^{k-j}f}{dx^{k-j}}(0)\delta_0^{(j)}(\phi).$$

Logo $c_{kj} = \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (-1)^{k-j} \frac{d^{k-j}f}{dx^{k-j}}(0)$.

Exercício 9. (D.K. ex. 9.2) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Escreva a distribuição $\psi \partial^\alpha \delta$ como uma combinação linear da seguinte forma:

$$\psi \partial^\alpha \delta = \sum_{\beta \leq \alpha} c_\beta \partial^\beta \delta,$$

em que $c_\beta \in \mathbb{C}$. (Dica: Use a definição de multiplicação por funções e a regra de Leibniz. Essencialmente é uma generalização do exercício anterior).

Exercício 10. (D.K. ex. 9.3) Determine as soluções $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ da equação $x^k u = 0$.

Exercício 11. (D.K. ex. 9.4) Determine as soluções $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ da equação $xu' = 0$.

Exercício 12. (D.K. ex. 9.5) Vimos em sala de aula que $u = \frac{1}{x+i0}$ é solução de $xu = 1$. Usando este fato:

a) Prove que a distribuição u satisfaz $xu' = -u$.

b) Aplicando o operador diferencial $x\partial_x$, prove que se u é solução de $x^k u = 1$, então $v = -\frac{1}{k}u'$ é solução de $x^{k+1}v = 1$.

c) Usando os itens a) e b), determine todas as soluções $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ da equação $x^k u = 1$.

Exercício 13. (D.K. ex. 9.7) Mostre que se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é tal que $x_n u = 0$, então existe uma única distribuição $v \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ tal que

$$u(\phi) = v(i^*(\phi)), \ \ \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

em que $i^*(\phi)(x_1, ..., x_n) = \phi(x_1, ..., x_{n-1}, 0)$.

Dica: Use $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com $\chi = 1$ numa vizinhança de 0. Para $\phi \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, definamos a função $\phi \otimes \chi(x', x_n) = \phi(x')\chi(x_n)$ e deduza que v deve ser definida como $v(\phi) = u(\phi \otimes \chi)$.

Exercício 14. (D.K. ex. 9.10) Determine as soluções $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ da equação $e^{i\xi x}u = u$. Considere os casos $\xi = 0$, $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $\xi \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Resposta:

Vemos que $e^{ix\xi}u = u$. Logo $\left(e^{ix\xi} - 1\right)u = 0$. Assim, temos:

1) Se $\xi = 0$, temos $(1-1)u = 0$, ou seja, toda distribuição é solução da equação.

2) Se $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, então $\left(e^{ix\xi} - 1\right)u = 0$ implica que $\operatorname{supp}(u) \subset \left\{x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : \ e^{ix\xi} - 1 = 0\right\} = \frac{2\pi}{\xi}\mathbb{Z}$. Como $\frac{d}{dx}\left(e^{ix\xi} - 1\right) = i\xi e^{ix\xi} \neq 0$, concluímos que numa vinhança de cada ponto em $\frac{2\pi}{\xi}\mathbb{Z}$, u é da forma $u = c_n \delta_{\frac{2\pi}{\xi}n}$, em que $n \in \mathbb{Z}$ (Teorema 9.5 do Duistermaat e Kolk, visto em sala de aula.). Assim, a solução geral é a distribuição da forma:

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta_{\frac{2\pi}{\xi}n}.$$

3) Se $\xi \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, então $e^{ix\xi} = e^{ixRe(\xi) - xIm(\xi)} = e^{-xIm(\xi)}\left(\cos\left(xRe(\xi)\right) + i\text{sen}\left(xRe(\xi)\right)\right)$. Logo se $e^{ix\xi} = 1$, então $\text{sen}\left(xRe(\xi)\right) = 0$ e $e^{-xIm(\xi)} = 1$. Assim, $x = 0$. Como $\frac{d}{dx}\left(e^{ix\xi} - 1\right) = i\xi e^{ix\xi} \neq 0$, podemos aplicar o Teorema 9.5 novamente e concluir que a solução geral é a forma:

$$u = c_0 \delta_0.$$

Exercício 15. (D.K. ex. 9.9) Seja $a \in \mathbb{C}$. Mostre que as soluções $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ da equação diferencial $xu' = au$ formam um espaço vetorial $\mathcal{H}_a$. Prove que a multiplicação por x e a diferenciação por ∂_x define mapas lineares de $\mathcal{H}_a$ em $\mathcal{H}_{a+1}$ e $\mathcal{H}_{a-1}$, respectivamente. Determine $\mathcal{H}_a$ (Dica: use o exercício 4). Decida se as aplicações de multiplicação e diferenciação são injetoras ou sobrejetoras, respectivamente.

Resposta: Se u e v pertencem a $\mathcal{H}_a$, então $x\frac{d}{dx}(\alpha u + \alpha v) = \alpha xu' + \alpha xv = \alpha au + \alpha av = a\alpha(u+v)$. Logo $\alpha u + \beta v \in \mathcal{H}_a$.

Se $u \in \mathcal{H}_a$, então $xu \in \mathcal{H}_{a+1}$, pois $x\frac{d}{dx}(xu) = xu + x^2u' = xu + axu = (a+1)xu$.

Se $u \in \mathcal{H}_a$, então $\partial_x u \in \mathcal{H}_{a-1}$, pois $xu'' = \frac{d}{dx}(xu') - \frac{d}{dx}(x)u' = \frac{d}{dx}(au) - u' = (a-1)u'$.

Podemos ver agora que x_a^+ e $(-x)_a^+$ são soluções da equação acima com suportes em $[0, \infty[$ e $]-\infty, 0]$, respectivamente, para $a \in \mathbb{C}\backslash\{-1, -2, ...\}$. Para $a = k \in \{-1, -2, ...\}$, temos as soluções são dadas por $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\partial_x^k l_+(-x)$ e $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\partial_x^k l_+(-x)$.

Seja $u \in \mathcal{D}'\mathbb{R}$

Exercício 16. (G. ex. 3.8) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto.
a) Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mostre que se $\delta(\phi) = 0$, então $\phi\delta = 0$.
b) Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Verifique se as implicações abaixo valem para todos u e ϕ:
i) $u(\phi) = 0 \implies \phi u = 0$.
ii) $\phi u = 0 \implies u(\phi) = 0$.

Respostas:
a) Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Suponha que $\delta(\phi) = 0$. Logo

$$(\phi\delta)(\varphi) = \delta(\phi\varphi) = \phi(0)\varphi(0) = \delta(\phi)\varphi(0) = 0\varphi(0) = 0.$$

b)
i) Não é verdadeira. Seja $\phi, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tais que $\phi(0) \neq 0$ e $\phi'(0) = 0$ (por exemplo, ϕ é igual a uma constante não nula numa vizinhança de 0) e ψ é definida como $\psi(x) = x\phi(x)$. Logo $\psi'(0) = \phi(0) \neq 0$. Assim, $\delta'(\phi) = -\phi'(0) = 0$, mas $\phi\delta' \neq 0$, já que

$$\phi\delta'(\psi) = \delta'(\phi\psi) = -(\phi'(0)\psi(0) + \phi(0)\psi'(0)) = -\phi(0)\psi'(0) = -\phi(0)^2 \neq 0.$$

Assim, $\delta'(\phi) = 0$, mas $\phi\delta' \neq 0$.
ii) É verdadeira. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi u = 0$. Seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi \equiv 1$ numa vizinhança aberta de $\operatorname{supp}(\phi)$. Logo $u(\phi) = u(\psi\phi) = (\phi u)(\psi) = 0$. Assim, $\phi u = 0$ implica que $u(\phi) = 0$.

Exercício 17. (G. ex. 3.10) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com contorno suave ou $\Omega = \mathbb{R}^n_+$.
a) Mostre que $\operatorname{supp}\left(\partial_{x_j}\chi_\Omega\right) \subset \partial\Omega$, em que χ_Ω é a função característica do conjunto Ω.
b) Mostre que a distribuição $-\Delta\chi_\Omega$ satisfaz $-\Delta\chi_\Omega(\phi) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial n} d\sigma$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, em que n é a normal que aponta para fora de Ω. Determine a ordem e o suporte da distribuição no caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$.

Resposta:
a) Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{supp}\phi \cap \partial\Omega = \emptyset$. Logo $\phi = \phi_1 + \phi_2$, em que $\phi_1 \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}\right)$ e $\phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$. Assim

$$(\partial_{x_1}\chi_\Omega)(\phi) = (\chi_\Omega)(\partial_{x_1}\phi) = (\chi_\Omega)(\partial_{x_1}\phi_1) + (\chi_\Omega)(\partial_{x_1}\phi_2) =$$

$$-\int_\Omega \partial_{x_1}\phi_2 dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}\phi_2 dx = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \partial_{x_1}\phi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)\, dx_1\right) dx_2...dx_n =$$

$$-\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lim_{R\to\infty} \left(\phi(R, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) - \phi(R, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)\right) dx_2...dx_n = 0.$$

Concluímos que $\partial_{x_1}\chi_\Omega|_{\mathbb{R}^n\backslash\partial\Omega} = 0$. Logo $\mathbb{R}^n\backslash\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n\backslash\operatorname{supp}(\partial_{x_1}\chi_\Omega)$. Assim, $\operatorname{supp}(\partial_{x_1}\chi_\Omega) \subset \partial\Omega$.
b) Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo

$$\Delta\chi_\Omega(\phi) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2\chi_\Omega(\phi) = -\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}\chi_\Omega\left(\partial_{x_j}\phi\right) = \sum_{j=1}^n \chi_\Omega\left(\partial_{x_j}^2\phi\right) =$$

$$\chi_\Omega\left(\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2\phi\right) = \chi_\Omega(\Delta\phi) = \int_\Omega \Delta\phi dx = \int_\Omega \nabla.(\nabla\phi)\, dx = \int_\Omega (\nabla\phi).n dx = \int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial n} d\sigma,$$

na penúltima igualdade usamos o Teorema da Divergência.

Exercício 18. (G. ex. 3.12) Frequentemente se encontra em livros a notação $\delta(x)$ para a distribuição delta de Dirac δ_0. Além disso, é comum encontrarmos em textos de física a notação $\delta(x-a)$ para a distribuição δ_a, $a \in \mathbb{R}$. Isto é motivado pelo seguinte cálculo heurístico:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x+a)dx = \phi(a),$$

para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.
(a) Motive por um cálculo similar a fórmula $\delta(ax) = |a|\,\delta(x)$, para $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
(b) Motive por um cálculo similar a fórmula: $\delta\left(x^2 - a^2\right) = \frac{1}{2a}\left(\delta(x-a) + \delta(x+a)\right)$, para $a > 0$ (Dica: Podemos "calcular" (heuristicamente) a integral $\int_{-\infty}^{\infty}$ decompondo-a em duas: uma sobre $]-\infty, 0]$ e outra sobre $[0, \infty[$. Use mudança de variáveis)

Resposta:
Neste exercício faremos cálculos heurísticos. É claro que as manipulações abaixo não são rigorosas, mas servem para entender as definições mais adequadamente.

a) Vemos que

$$\delta\left(ax\right)\left(\phi\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(ax\right)\phi\left(x\right)dx=\left|a\right|\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(ax\right)\phi\left(\frac{ax}{a}\right)d\left(ax\right)=$$

$$\left|a\right|\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(y\right)\phi\left(\frac{y}{a}\right)dy=\left|a\right|\phi\left(0\right)=\left|a\right|\delta_0.$$

b) Vemos que

$$\delta\left(x^2-a^2\right)\left(\phi\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x^2-a^2\right)\phi\left(x\right)dx=\int_{0}^{\infty}\delta\left(x^2-a^2\right)\phi\left(x\right)dx+\int_{-\infty}^{0}\delta\left(x^2-a^2\right)\phi\left(x\right)dx.$$

Agora observamos que se $y=x^2-a^2$, então $x=\pm\sqrt{y+a^2}$ e $dy=2xdx$, ou seja, $dx=\frac{1}{2\sqrt{y+a^2}}dy$. Assim,

$$\int_{0}^{\infty}\delta\left(x^2-a^2\right)\phi\left(x\right)dx=\int_{-a^2}^{\infty}\delta\left(y\right)\phi\left(\sqrt{y+a^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{y+a^2}}dy=\frac{1}{2a}\phi\left(a\right),$$

$$\int_{-\infty}^{0}\delta\left(x^2-a^2\right)\phi\left(x\right)dx=\int_{-a^2}^{\infty}\delta\left(y\right)\phi\left(-\sqrt{y+a^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{y+a^2}}dy=\frac{1}{2a}\phi\left(-a\right).$$

Assim,

$$\delta\left(x^2-a^2\right)\left(\phi\right)=\frac{1}{2a}\left(\phi\left(a\right)+\phi\left(-a\right)\right)=\frac{1}{2a}\left(\delta_a+\delta_{-a}\right)\left(\phi\right).$$

Logo $\delta\left(x^2-a^2\right)=\frac{1}{2a}\left(\delta\left(x-a\right)+\delta\left(x+a\right)\right)$.

Exercício 19. (D.K. ex. 10.1) (Composição de pushforward e diferenciação parcial) Considere um mapa C^∞ de um aberto X de $\mathbb{R}^n$ em um aberto Y de $\mathbb{R}^p$. Prove que para todo $j=1,...,n$, a seguinte identidade de mapas lineares contínuos vale:

$$\Phi_*\circ\partial_j=\sum_{k=1}^{n}\partial_k\circ\Phi_*\circ\partial_j\Phi_k:\mathcal{E}'\left(X\right)\to\mathcal{E}'\left(Y\right).$$

Exercício 20. (D.K. ex. 10.6) (Teorema de Mudança de Variável) Seja $\Psi:Y\to X$ um difeomorfismo de classe C^∞ entre os abertos X e Y de $\mathbb{R}^n$. Mostre que $\chi_{\Psi(Y)}=\Psi_*\left(j_\Psi\chi_Y\right)$ em $\mathcal{D}'\left(X\right)$, em que $j_\Psi:=\left|det\left(D\Psi\right)\left(x\right)\right|$ e χ_A é a função característica do conjunto A.

Resposta: Seja $\phi\in C_c^\infty\left(X\right)$. Logo

$$\Psi_*\left(j_\Psi\chi_Y\right)\left(\phi\right)={}^t\left(\Psi^*\right)\left(j_\Psi\chi_Y\right)\left(\phi\right)=\left(j_\Psi\chi_Y\right)\left(\Psi^*\left(\phi\right)\right)=\chi_Y\left(j_\Psi\phi\circ\Psi\right)=$$

$$\int_Y\phi\circ\Psi\left(x\right)\left|det\left(D\Psi\right)\left(x\right)\right|dx=\int_{\Psi(Y)}\phi\left(y\right)dy=\chi_{\Psi(Y)}\left(\phi\right).$$

Exercício 21. (D.K. ex. 10.7) (Composição de pullback e diferenciação parcial) Considere um difeomorfismo de classe C^∞ dado por $\Phi:Y\to X$, em que X e Y são abertos de $\mathbb{R}^n$. Denotemos a inversa da transposta da matrix Jacobiana de Ψ por $\left(\psi_{jk}\right)_{j,k=1,..,n}$ ou seja, $\left({}^t\left(D\Psi(y)\right)\right)^{-1}=\left(\psi_{jk}\left(y\right)\right)_{jk}$, para $y\in Y$. Derive a seguinte propriedade entre mapas lineares:

$$\Psi^*\circ\partial_j=\left(\sum_{k=1}^{n}\psi_{jk}\circ\partial_k\right)\circ\Psi^*:\mathcal{D}'\left(X\right)\to\mathcal{D}'\left(Y\right).$$

Exercício 22. (D.K. ex. 10.16) Mostre que $\partial^\alpha\delta$ é uma distribuição homogênea de ordem $-n-\left|\alpha\right|$.