LISTA DE EXERCÍCIOS 2 - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER (MAP 5722-4)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/DISTRIBUICOES

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do Duistermaat e Kolk (denotado por D.K.).

Exercício 1. (D.K. ex. 5.1) Seja $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções não negativas em $L^1(\mathbb{R}^n)$ (ou seja, tais que $\int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)|\,dx < \infty$). Suponha que as funções satisfaçam as seguintes propriedades:
a) Para todo $j\in\mathbb{N}$, temos $\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\,dx = 1$.
b) Para todo $r>0$, temos que $\lim_{j\to\infty}\int_{\|x\|\geq r} f_f(x)\,dx = 0$.
Prove que $\lim_{j\to\infty} f_j = \delta_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 2. (D.K. ex. 5.2) Seja $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definamos $f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} f\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Prove que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon = c\delta \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \text{em que} \quad c = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \in \mathbb{C}.$$

(Dica: Uma maneira simples de se provar isto é fazendo a mudança de variável $y=\frac{x}{\epsilon}$ ao calcular $f_\epsilon(\phi)$.)

Exercício 3. (D.K. ex. 5.3) Mostre que:
1) $\frac{1}{x+i0} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{x+i\epsilon} = PV\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta_0$ e que $\frac{1}{x-i0} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{x-i\epsilon} = PV\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta_0$. (Dica: O primeiro limite foi provado em sala de aula. O segundo segue do mesmo argumento, só mudando a região da integração complexa).
2) Usando o resultado anterior, mostre que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{x}{x^2+\epsilon^2} = PV\left(\frac{1}{x}\right) \text{ e } \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = \pi\delta_0 \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Resposta:
1) Seja $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com suporte contido em $]-R,R[$. Logo temos

$$\frac{1}{x+i\epsilon}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x+i\epsilon}\phi(x)\,dx = \int_{-R}^{R}\frac{1}{x+i\epsilon}\phi(x)\,dx =$$

$$\int_{-R}^{R}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x+i\epsilon}dx + \int_{-R}^{R}\frac{\phi(0)}{x+i\epsilon}dx =$$

$$\int_{-R}^{R}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x+i\epsilon}dx + \int_{-R}^{R}\frac{\phi(0)}{x+i\epsilon}dx + \int_0^\pi\frac{\phi(0)}{Re^{i\theta}+i\epsilon}iRe^{i\theta}d\theta - \int_0^\pi\frac{\phi(0)}{Re^{i\theta}+i\epsilon}iRe^{i\theta}d\theta =$$

$$\int_{-R}^{R}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x+i\epsilon}dx + \int_{\Gamma_R}\frac{\phi(0)}{z+i\epsilon}dz - \int_0^\pi\frac{\phi(0)}{Re^{i\theta}+i\epsilon}iRe^{i\theta}d\theta =$$

$$\int_{-R}^{R}\frac{x}{x+i\epsilon}\left(\int_0^1\phi'(\theta x)\,d\theta\right)dx + \int_{\Gamma_R}\frac{\phi(0)}{z+i\epsilon}dz - \int_0^\pi\frac{\phi(0)}{Re^{i\theta}+i\epsilon}iRe^{i\theta}d\theta,$$

em que Γ_R é o caminho fechado dado por $[-R,R]\cup\left\{Re^{i\theta},\,0\leq\theta\leq\pi\right\}$ em $\mathbb{C}$. Pelo Teorema de Cauchy, temos que $\int_{\Gamma_R}\frac{\phi(0)}{z+i\epsilon}dz=0$, já que $z\mapsto\frac{\phi(0)}{z+i\epsilon}$ é analítica para todo $z\neq -i\epsilon$. Concluímos, assim, que

$$\frac{1}{x+i0}(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{x+i\epsilon}(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-R}^{R}\frac{x}{x+i\epsilon}\left(\int_0^1\phi'(\theta x)\,d\theta\right)dx - \int_0^\pi\frac{\phi(0)}{Re^{i\theta}+i\epsilon}iRe^{i\theta}d\theta\right) =$$

$$\left(\int_{-R}^{R}\left(\int_0^1\phi'(\theta x)\,d\theta\right)dx - i\int_0^\pi\phi(0)\,d\theta\right) = PV\left(\frac{1}{x}\right)(\phi) - i\pi\delta_0(\phi).$$

Para $\frac{1}{x-i0}$, basta fazer o mesmo argumento com o caminho fechado dado por $[-R,R]\cup\left\{Re^{i\theta},\,0\geq\theta\geq-\pi\right\}$.
2) Basta observar que

$$\frac{x}{x^2+\epsilon^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i\epsilon}+\frac{1}{x-i\epsilon}\right).$$

Assim, vemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{x}{x^2+\epsilon^2}=\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{x+i\epsilon}+\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{x-i\epsilon}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0}+\frac{1}{x-i0}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(PV\left(\frac{1}{x}\right)-i\pi\delta_0+PV\left(\frac{1}{x}\right)+i\pi\delta_0\right)=PV\left(\frac{1}{x}\right).$$

Observamos agora que

$$\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i\epsilon}-\frac{1}{x+i\epsilon}\right).$$

Assim, obtemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}=\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i\epsilon}-\frac{1}{x+i\epsilon}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i0}-\frac{1}{x+i0}\right)=$$
$$\frac{1}{2i}\left(PV\left(\frac{1}{x}\right)+i\pi\delta_0-PV\left(\frac{1}{x}\right)+i\pi\delta_0\right)=\pi\delta_0.$$

Exercício 4. (D.K. ex. 3.1) Prove que $PV\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{x+i0}$ e $\frac{1}{x-i0}$ são todas distribuições de ordem 1. (Observação: A prova para $PV(\frac{1}{x})$ foi feita em aula. Para as demais, basta usar os mesmos argumentos ou usar o fato de que $PV(\frac{1}{x})$ tem ordem 1 junto com os resultados do item 1) do exercício anterior).

Resposta:
Para $PV\left(\frac{1}{x}\right)$, fizemos em sala de aula. De fato, se $\phi\in C_c^\infty\left(]-R,R[\right)$, então

$$\left|PV\left(\frac{1}{x}\right)(\phi)\right|=\left|\int_{-R}^{R}\left(\int_0^1\phi'(\theta x)\,d\theta\right)dx\right|\leq 2R\sup_{x\in\mathbb{R}}|\phi'(x)|\leq 2R\,\|\phi\|_{C^1}.$$

Logo a ordem de $PV\left(\frac{1}{x}\right)$ é menor ou igual a 1. Suponha que seja igual a 0. Logo existe $C>0$ tal que

$$\left|PV\left(\frac{1}{x}\right)(\phi)\right|\leq C\,\|\phi\|_{C^0},\ \forall\phi\in C_c^\infty\left(]0,2[\right).$$

Seja $\phi_n\in C_c^\infty\left(]0,1[\right)$ tal que $0\leq\phi_n\leq 1$ e tal que $\phi_n(x)=1$ para todo $x\in\left[\frac{1}{n},1\right]$. Logo $\|\phi_n\|_{C^0}=1$, mas

$$\left|PV\left(\frac{1}{x}\right)(\phi_n)\right|=\int_0^2\frac{\phi_n(x)}{x}dx\geq\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1}{x}dx=\ln(x)|_{\frac{1}{n}}^1=\ln(n).$$

Assim, para n grande, teremos $\ln(n)>C$. Logo $\left|PV\left(\frac{1}{x}\right)(\phi)\right|\geq\ln(n)\,\|\phi\|_{C^0}>C\,\|\phi\|_{C^0}$. Isto é um absurdo. Logo $PV\left(\frac{1}{x}\right)$ tem ordem exatamente igual a 1.

Quanto a $\frac{1}{x+i0}$, sabemos que $\frac{1}{x+i0}=PV\left(\frac{1}{x}\right)-i\pi\delta_0$. Como $PV\left(\frac{1}{x}\right)$ tem ordem 1 e δ_0 tem ordem 0, então $\frac{1}{x+i0}$ tem ordem ≤ 1. Suponha que a ordem seja igual a 0. Assim, para todo compacto $K\subset\mathbb{R}$, existe uma constante $C_K>0$ tal que

$$\left|\frac{1}{x+i0}(\phi)\right|\leq C_K\,\|\phi\|_{C^0},\ \ \forall\phi\in C_c^\infty(K).$$

Portanto, obteríamos que

$$\left|PV\left(\frac{1}{x}\right)(\phi)\right|\leq\left|\frac{1}{x+i0}(\phi)\right|+\pi\,|\delta_0(\phi)|\leq C_K\,\|\phi\|_{C^0}+\pi\,\|\phi\|_{C^0}=(C_K+\pi)\,\|\phi\|_{C^0}.$$

Logo $PV\left(\frac{1}{x}\right)$ tem que ter ordem zero. Isto é um absurdo pelo que vimos anteriormente. Logo $\frac{1}{x+i0}$ tem ordem 1. O mesmo argumento vale para $\frac{1}{x-i0}$.

Exercício 5. (D.K. ex. 5.4) Seja $\{e_j\}_{j=1,\dots,n}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ ($e_1=(1,0,0,...)$, $e_2=(0,1,0,...)$, ...) e seja $a\in\mathbb{R}^n$. Mostre que:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\delta_{a-te_j}-\delta_a\right)=\partial_{x_j}\delta_a\ \text{ em }\ \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Resposta: Basta observar que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\delta_{a-te_j}-\delta_a\right)(\phi)=\lim_{t\to 0}\frac{\phi(a-te_j)-\phi(a)}{t}=-\lim_{t\to 0}\frac{\phi(a-te_j)-\phi(a)}{-t}=$$
$$-\lim_{t\to 0}\frac{\phi(a+te_j)-\phi(a)}{t}=-\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(a)=\delta_a\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)=\left(\partial_{x_j}\delta_a\right)(\phi).$$

Exercício 6. (D.K. ex. 5.5) Considere para $t > 0$ a seguinte função em $\mathbb{R}^n$:

$$u_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}.$$

Verifique que a equação acima satisfaz a seguinte equação (chamada equação do calor ou da difusão)

$$\frac{d}{dt} u_t = \Delta u.$$

Calcule os seguintes limites em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:
a) $\lim_{t \to 0^+} u_t$.
b) $\lim_{t \to 0^+} \frac{d}{dt} u_t$.

Exercício 7. (D.K. ex. 6.2) Seja u_t como no exercício anterior, ou seja, $u_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$. Mostre que para todo $k \in \mathbb{N}_0$, temos

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^k} \left(u_t - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} \Delta^j \delta \right) = \frac{1}{k!} \Delta^k \delta \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Por que a notação $u_t = e^{t\Delta}\delta$ é adequada para $t > 0$?
(Dica: Use Série de Taylor em t para provar o limite e os resultados do exercício anterior)

Exercício 8. (D.K. ex. 5.11) Seja $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ uma sequência tal que $\lim_{j \to \infty} \|a_j\| = \infty$. Seja $(c_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ uma sequência arbitrária. Definamos as distribuições u_k, $k \in \mathbb{N}$ por

$$u_k := \sum_{j=1}^{k} c_j \delta_{a_j}.$$

Mostre que existe uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{k \to \infty} u_k = u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Resposta:
Vimos o seguinte resultado em sala de aula: Seja $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Se para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ o limite $\lim_{j \to \infty} u_j(\phi)$ existe, então $\lim_{j \to \infty} u_j$ existe em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $u := \lim_{j \to \infty} u_j$ é tal que

$$u(\phi) = \lim_{j \to \infty} u_j(\phi).$$

Seja então $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo existe $R > 0$ tal que $\operatorname{supp}(\phi) \subset B_R(0)$. Como $\lim_{j \to \infty} \|a_j\| = \infty$, então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $j \geq j_0$, então $\|a_j\| > R$. Assim,

$$u_k(\phi) = \sum_{j=1}^{k} c_j \delta_{a_j}(\phi) = \sum_{j=1}^{k} c_j \phi(a_j) = \sum_{j=1}^{\min\{k, j_0\}} c_j \phi(a_j).$$

Portanto,

$$\lim_{k \to \infty} u_k(\phi) = \sum_{j=1}^{j_0} c_j \phi(a_j).$$

Como o limite existe para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, concluímos, pelo resultado visto em sala de aula, que existe o limite $\lim_{k \to \infty} u_k$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 9. (D.K. ex. 5.12) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e definamos as distribuições u_k, $k \in \mathbb{N}$, por

$$u_k := \frac{1}{k} \sum_{j=-k^2}^{k^2} f\left(\frac{j}{k}\right) \delta_{\frac{j}{k}}.$$

Existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{k \to \infty} u_k = u$? Se existir, qual é este limite? (Dica: Pense na integral de Riemann)

Resposta: Sim. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{supp}\phi \subset]-n, n[$. Assim, para $k > n$, temos

$$u_k(\phi) = \frac{1}{k} \sum_{j=-k^2}^{k^2} f\left(\frac{j}{k}\right) \delta_{\frac{j}{k}}(\phi) = \frac{1}{k} \sum_{j=-nk}^{nk} f\left(\frac{j}{k}\right) \delta_{\frac{j}{k}}(\phi) = \sum_{j=0}^{2nk} \frac{1}{k} f\left(-n + \frac{j}{k}\right) \phi\left(-n + \frac{j}{k}\right).$$

Vemos assim, que estamos dividindo o intervalo $[-n,n]$ em $2nk$ pedaços de tamanho $\frac{1}{k}$. Como f e ϕ são funções contínuas em $[-n,n]$, a integral converge de $f\phi$ Riemann existe. Logo

$$\lim_{k\to\infty} u_k(\phi) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{2nk} \frac{1}{k} f\left(-n+\frac{j}{k}\right)\phi\left(-n+\frac{j}{k}\right) = \int_{-n}^{n} f(x)\,\phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\phi(x)\,dx.$$

Note que temos a igualdade $\int_{-n}^{n} = \int_{-\infty}^{\infty}$ acima, pois ϕ se anula fora de $[-n,n]$. Assim, concluímos que $\lim_{k\to\infty} u_k = f$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (f no sentido de distribuições, ou seja, T_f na notação de sala de aula).

Exercício 10. (D.K. ex. 5.14) Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de medidas de Radon em Ω com a propriedade de que para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos $\lim_{j\to\infty} u_j(\phi) = u(\phi)$. Mostre que para todo compacto $K \subset \Omega$ existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|u_j(\phi)| \le c\left(\sup_{x\in\Omega} |\phi(x)|\right), \forall j \in \mathbb{N}\,\mathrm{e}\,\forall \phi \in C_c^\infty(K).$$

Prove que u é é uma medida de Radon positiva.

Por fim, mostre que, para toda $f \in C_c(\Omega)$, não necessariamente diferenciável, temos $\lim_{j\to\infty} u_j(f) = u(f)$.

Dica: Use o seguinte resultado visto em sala de aula. Seja $K \subset \Omega$ um compacto. Logo para toda função $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$, $0 \le \chi \le 1$, que seja igual a 1 numa vizinhança de K, temos

$$|u(\phi)| \le u(\chi)\,\|\phi\|_{C^0}, \forall \phi \in C_c^\infty(K),$$

em que $\|\phi\|_{C^0} := \sup_{x\in\Omega} |\phi(x)|$.

Resposta:

Seja $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \le \chi \le 1$ e que seja igual a 1 numa vizinhança de K. Logo

$$|u_j(\phi)| \le u_j(\chi)\,\|\phi\|_{C^0}, \forall \phi \in C_c^\infty(K).$$

Como $\lim_{j\to\infty} u_j(\chi) = u(\chi)$, concluímos que $(u_j(\chi))_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathbb{C}$. Assim, existe uma constante $c > 0$ tal que $|u_j(\chi)| \le c$ para todo $j \in \mathbb{N}$.Portanto

$$|u_j(\phi)| \le u_j(\chi)\,\|\phi\|_{C^0} \le c\,\|\phi\|_{C^0}, \forall j \in \mathbb{N}\,\mathrm{e}\,\forall \phi \in C_c^\infty(K).$$

Agora vamos mostrar que u é uma medida de Radon positiva. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\phi \ge 0$. Logo $u_j(\phi) \in \mathbb{R}$ para todo j e $u_j(\phi) \ge 0$ para todo j. Como $\lim_{j\to\infty} u_j(\phi) = u(\phi)$, concluímos que $\mathrm{Im}(u(\phi)) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{Im}(u_j(\phi)) = 0$. Assim, $u(\phi) \in \mathbb{R}$. Por fim, $u_j(\phi) \ge 0$ para todo j implica que $u(\phi) \ge 0$, já que $u(\phi) = \lim_{j\to\infty} u_j(\phi)$.

Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi \ge 0$ e $\int \phi(x)\,dx = 1$. Definimos $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Vimos em sala de aula que podemos estender u_j a $C_c(\Omega)$ da seguinte forma: Para $f \in C_c(\Omega)$ uma função não necessariamente diferenciável, definimos $u_j(f) := \lim_{\epsilon\to 0} u_j(f * \phi_\epsilon)$. Assim,

$$|u_j(f)| = \lim_{\epsilon\to 0} |u_j(f * \phi_\epsilon)| \le c \lim_{\epsilon\to 0} \|f * \phi_\epsilon\|_{C^0} \le c\,\|f\|_{C^0}.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, podemos escolher $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\|f - \phi\|_{C^0} < \frac{\epsilon}{3c}$. Desta maneira, vemos que

$$|u_j(f) - u(f)| \le |u_j(f) - u_j(\phi)| + |u_j(\phi) - u(\phi)| + |u(\phi) - u(f)| \le \frac{2\epsilon}{3} + |u_j(\phi) - u(\phi)|.$$

Sabemos que existe j_0 tal que se $j \ge j_0$, então $|u_j(\phi) - u(\phi)| < \frac{\epsilon}{3}$. Assim, para $j > j_0$, obtemos que

$$|u_j(f) - u(f)| < \epsilon.$$

Logo

$$\lim_{j\to\infty} u_j(f) = u(f).$$