LISTA DE EXERCÍCIOS 1 - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER (MAP 5722-4)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/$\sim$PPLOPES/DISTRIBUICOES

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do Duistermaat e Kolk (denotado por D.K.), do J. Hounie, do M. W. Wong (An Introduction to Pseudo-Differential Operators) e da Gerd Grubb.

Exercício 1. (Wong ex. 1.1) Ache os símbolos de cada um dos operadores diferenciais abaixo:

a) $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.
b) $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.
c) $\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.
d) $\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.
e) $\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}$.
f) $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+x_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

Resposta:
Basta fazer a substituição $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\longleftrightarrow\xi_j$.
a) $P(x,\xi)=-\xi_1^2-\xi_2^2$.
b) $P(x,\xi)=-\xi_1^2+\xi_2^2$.
c) $P(x,\xi)=i\xi_1-\xi_2^2$.
d) $P(x,\xi)=i\xi_1-i\xi_2^2$.
e) $P(x,\xi)=i\xi_1-\xi_2$.
f) $P(x,\xi)=-\xi_1^2-x_1^2\xi_2^2$.

Exercício 2. (Wong ex. 1.5 e 7.2) Seja $x\in\mathbb{R}^n$. Definamos $\|x\|=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$. Prove que

a) $|x^\alpha|\leq\|x\|^{|\alpha|}$, para todo $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$.
b) $\|x\|^{2N}\leq n^N\sum_{|\gamma|=N}|x^\gamma|^2$, para todo $N\in\mathbb{N}_0$.

Resposta:
Sabemos que $x_j\leq\|x\|$, para todo $j\in\{1,...,n\}$:
a)

$$|x^\alpha|\leq|x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}|\leq|x_1|^{|\alpha_1|}...|x_n|^{|\alpha_n|}\leq$$
$$\|x\|^{|\alpha_1|}...\|x\|^{|\alpha_n|}=\|x\|^{|\alpha_1|+...+|\alpha_n|}.$$

b)

$$\|x\|^{2N}=\left(\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}\right)^{2N}=\left(x_1^2+...+x_n^2\right)^N$$

Vemos assim que teremos n^N termos da forma $x_{j_1}^2...x_{j_N}^2$, com $j_1,...,j_N\in\{1,...,n\}$. Cada um destes termos pode ser escrito como $x^{2\gamma}=x_1^{2\gamma_1}...x_n^{2\gamma_n}$ para algum $\gamma\in\mathbb{N}_0^n$ tal que $|\gamma|=N$. Por sua vez, vemos que $\left|x^{2\gamma}\right|=|x^\gamma|^2\leq\sum_{|\gamma|=N}|x^\gamma|^2$. Desta maneira, concluímos que

$$\|x\|^{2N}\leq n^N\sum_{|\gamma|=N}|x^\gamma|^2.$$

Exercício 3. (Wong ex. 7.3) Seja $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Usando a fórmula de Taylor com resto integral, mostre que se

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha f(x)|<\infty,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}_0^n,$$

então para todo $N\in\mathbb{N}_0$, existe uma constante positiva $C_N>0$ tal que

$$\left|f(x)-\sum_{|\alpha|<N}\frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!}x^\alpha\right|\leq C_N\|x\|^N,\ \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Resposta:
Vemos que

$$f(x)=\sum_{|\alpha|<N}\frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!}x^\alpha+N\sum_{|\alpha|=N}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\int_0^1(1-\theta)^{N-1}\partial^\alpha f(\theta x)\,d\theta.$$

Logo

$$\left|f(x)-\sum_{|\alpha|<N}\frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!}x^\alpha\right|\leq N\sum_{|\alpha|=N}\left|\frac{1}{\alpha!}\int_0^1(1-\theta)^{N-1}\partial^\alpha f(\theta x)\,d\theta\right||x^\alpha|\leq$$

$$N\sum_{|\alpha|=N}\frac{1}{\alpha!}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha f(x)|\,\|x\|^{|\alpha|}=\left(N\sum_{|\alpha|=N}\frac{1}{\alpha!}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha f(x)|\right)\|x\|^N.$$

Exercício 4. (Hounie capítulo 1 ex. 1) Determine quais das funções abaixo são funções teste (elementos de $C_c^\infty(\mathbb{R})$):

a) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x(x-1)}},\ 0<x<1 \\ 0,\ x\leq 0 \text{ ou } x\geq 1\end{cases}$.

b) $f(x)=\begin{cases} \cos(x),\ |x|<\frac{\pi}{2} \\ 0,\ |x|\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

c) $f(x)=\begin{cases} \cos(x)\,e^{\frac{1}{(4\pi^2-x^2)}},\ |x|<\frac{\pi}{2} \\ 0,\ |x|\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

Resposta:
Das funções acima, apenas $a)$ e $b)$ pertencem a $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Para $a)$ basta verificar que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{d^k}{dx^k}\left(e^{\frac{1}{x(x-1)}}\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{d^k}{dx^k}\left(e^{\frac{1}{x(x-1)}}\right)=0,$$

para cada $k\in\mathbb{N}_0$. Basta mostrar que as derivadas vão ser somas de expressões da forma

$$\frac{1}{x^j}\frac{1}{(x-1)^l}e^{\frac{1}{x(x-1)}}$$

e lembrar que a exponencial decai muito mais rapidamente do que as inversas de polinômios.

Para $c)$ o argumento é o mesmo. No entanto aparecem termos $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ nas expressões das derivadas, que, no entanto, não interferem no limite tomado.

a função $b)$ não é C^∞ já que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{d}{dx}\cos(x)=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(x)=-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\neq 0.$$

Exercício 5. (Hounie capítulo 1 ex. 2) Quais das funções abaixo são funções localmente integráveis?

a) $f(x)=\frac{1}{x}$ em $\mathbb{R}$.
b) $f(x,y)=\frac{1}{x+iy}$ em $\mathbb{R}^2$.
c) $f(x)=\frac{1}{\|x\|^{n-\frac{1}{2}}}$ em $\mathbb{R}^n$.
(Dica: Use coordenadas polares).

Resposta:
As funções em $b)$ e em $c)$ são localmente integráveis.
$a)$ Não é localmente integrável. Seja $K:=[0,1]$. Logo

$$\int_0^1\frac{1}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\ln(x)|_{\frac{1}{n}}^1=\lim_{n\to\infty}\left(\ln(1)-\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\ln(n)=\infty.$$

$b)$ e $c)$ Vamos mostrar que ambas as funções são integráveis na bola unitária:

$$\int_{B_1(0)}\left|\frac{1}{x+iy}\right|dxdy=\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}rdrd\theta=2\pi<\infty.$$

$$\int_{B_1(0)}\frac{1}{\|x\|^{\frac{n}{2}-1}}dx=\int_0^1\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{1}{r^{n-\frac{1}{2}}}r^{n-1}drd\Omega=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}d\Omega\int_0^1\frac{1}{r^{n-\frac{1}{2}}}r^{n-1}dr=$$

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\Omega \int_0^1 r^{-\frac{1}{2}} dr = 2\mathrm{vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) < \infty.$$

Assim, seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto ($n = 2$ no caso b)). Logo se f é qualquer uma das funções dos itens b) e c) acima, temos

$$\int_K |f(x)|\, dx \leq \int_{B_1(0)} |f(x)|\, dx + \int_{K \backslash B_1(0)} |f(x)|\, dx < \infty,$$

pois $\int_{B_1(0)} |f(x)|\, dx < \infty$, pelo que vimos acima e $\int_{K\backslash B_1(0)} |f(x)|\, dx$, já que $x \in K\backslash B_1(0) \mapsto |f(x)|$ é uma função contínua definida no compacto $K\backslash B_1(0)$. Portanto, é limitada e integrável num compacto.

Exercício 6. (Hounie capítulo 1 ex. 3) Dizemos que uma sequência de funções $(\phi_j)_j$ em $L^1_{loc}(\Omega)$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, converge para $\phi \in L^1_{loc}(\Omega)$ se, para todo compacto $K \subset \Omega$, temos

$$\lim_{j\to\infty} \int_K |\phi(x) - \phi_j(x)|\, dx = 0.$$

Mostre que se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, então existem uma sequência de funções teste $(\phi_j)_j$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tais que $\lim_{j\to\infty} \phi_j = f$ em $L^1_{loc}(\Omega)$.

Resposta: Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Seja $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma exaustão por compactos de Ω, ou seja, $\Omega = \cup_{j=1}^\infty K_j$, $K_j \subset \mathrm{int}(K_{j+1})$ e para todo compacto K contido em Ω, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $j > j_0$, então $K \subset K_j$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, vamos escolher $\chi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que χ_j é igual a 1 numa vizinhança aberta de K_j. Logo $\chi_j f \in L^1(\Omega)$. Sabemos que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega)$. Logo existe $\phi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\|\chi_j f - \phi_j\|_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{j}$. Vamos mostrar, por fim, que $\lim_{j\to\infty} \phi_j = f$ em $L^1_{loc}(\Omega)$.

Seja $K \subset \Omega$. Queremos mostrar que $\lim_{j\to\infty} \int_K |f(x) - \phi_j(x)|\, dx = 0$. Mas, temos que

$$\int_K |f(x) - \phi_j(x)|\, dx = \int_K |f(x) - f\chi_j + f\chi_j - \phi_j(x)|\, dx \leq$$

$$\int_K |f - f\chi_j|\, dx + \int_\Omega |f\chi_j - \phi_j(x)|\, dx \leq \frac{1}{j} + \int_K |f - f\chi_j|\, dx.$$

Porém existe j_0 tal que se $j > j_0$, então $K \subset K_j$. Assim, $(f - f\chi_j)|_K = 0$. Portanto $\int_K |f - f\chi_j|\, dx = 0$ para $j > j_0$. Concluímos que para $j > j_0$, temos $\int_K |f(x) - \phi_j(x)|\, dx \leq \frac{1}{j}$. Assim

$$\lim_{j\to\infty} \int_K |f(x) - \phi_j(x)|\, dx = 0.$$

Exercício 7. (Hounie capítulo 1 ex. 6) Prove que $T : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ dada como $T(\phi) = \int_{-\infty}^\infty \phi'(t)\, dt$ é a distribuição nula.

Resposta:

Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Logo existe um $R > 0$ tal que $\mathrm{supp}(\phi) \subset \left]-R, R\right[$. Assim,

$$T(\phi) = \int_{-\infty}^\infty \phi'(t)\, dt = \int_{-R}^R \phi'(t)\, dt = \phi(R) - \phi(-R) = 0 - 0 = 0.$$

Exercício 8. (Hounie capítulo 1 ex. 7) Quais das funções $T : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ abaixo definem distribuições?

a) $T(\phi) = \int_{-\infty}^\infty e^{t^2} \phi(t)\, dt$.

b) $T(\phi) = \int_{-\infty}^\infty \left|\frac{d\phi}{dt}(t)\right| dt$.

c) $T(\phi) = \lim_{n\to\infty} n\left[\phi\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \phi(1)\right]$.

Resposta:

Podemos ver que

a) É uma distribuição. De fato $T = T_f$, em que $f(t) = e^{t^2} \in C(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

b) Não é uma distribuição. De fato, T não é linear. Se fosse linear, então teríamos $T(-\phi) = -T(\phi)$. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ uma função não nula. Logo $\frac{d\phi}{dx}$ também não é nula, afinal se $\frac{d\phi}{dx} \equiv 0$, concluiríamos que ϕ é uma constante. Como ϕ tem suporte compacto, isto implicaria que $\phi \equiv 0$, um absurdo. Assim

$$T(\phi) = \int_{-\infty}^\infty \left|\frac{d\phi}{dx}(x)\right| dx > 0.$$

Porém $T(-\phi) = T(\phi) > 0$ e $-T(\phi) < 0$. Logo $T(-\phi) \neq -T(\phi)$.

c) Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Logo

$$T(\phi) = \lim_{n\to\infty} n\left(\phi\left(1+\frac{1}{n}\right) - \phi(1)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi\left(1+\frac{1}{n}\right)-\phi(1)}{\frac{1}{n}} = \phi'(1) = -\frac{d}{dx}\delta_1(\phi).$$

Assim, $T = -\frac{d}{dx}\delta_1$ que sabemos que é uma distribuição.

Exercício 9. (Hounie capítulo 1 ex. 8) Prove que não existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $\int f(x)\phi(x)\,dx = \phi(0)$ para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. (Dica: observe que se isto fosse verdade, teríamos $\int f(x)\phi(x)\,dx = 0$ para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Isto implicaria que $f = 0$ q.t.p em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, e, portanto, também em $\mathbb{R}$, já que $\{0\}$ tem medida nula. De fato, basta usar os resultados vistos em sala de aula. Detalhe o argumento)

Exercício 10. (Hounie capítulo 2 ex. 2 e 5) Calcule as seguintes derivadas no sentido das distribuições:
a) $\left(\frac{d}{dx} - a\right)(H(x)e^{ax})$.
b) $\frac{d^k}{dx^k}|x|$. (Dica: Tente fazer os exercícios 20 a) e b) antes)
c) $\left(\frac{d}{dx} + a^2\right)\left(\frac{H(x)\cos(ax)}{a}\right)$.
d) $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(H(x)H(y))$.
Acima usamos que $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ é a função de Heaviside.

Resposta:
Podemos calcular as derivadas abaixo a partir da definição:
a) Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Logo

$$\frac{d}{dx}(H(x)e^{ax})(\phi) = -(H(x)e^{ax})\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = -\int_0^\infty e^{ax}\frac{d\phi}{dx}(x)dx =$$

$$-\left(e^{ax}\phi(x)|_0^\infty - \int_0^\infty ae^{ax}\phi(x)dx\right) = \phi(0) + \int_0^\infty aH(x)e^{ax}\phi(x)dx = (\delta_0 + aH(x)e^{ax})(\phi).$$

Outra forma de fazer isto é observando que e^{ax} é uma função C^∞. Logo $e^{ax}H(x)$ pode ser visto como a multiplicação da função e^{ax} pela distribuição $H(x)$. Assim, vale regra de Leibniz pelo que vimos em sala de aula:

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}H(x)) = \frac{d}{dx}(e^{ax})H(x) + e^{ax}\frac{d}{dx}(H(x)) = ae^{ax}H(x) + e^{ax}\delta_0 = ae^{ax}H(x) + \delta_0.$$

b) $\frac{d}{dx}|x| = \text{sign}(x)$, $\frac{d^2}{dx^2}|x| = 2\delta_0$ e $\frac{d^k}{dx^k}|x| = 2\delta_0^{(k-2)}$, se $k \geq 2$.
c) Podemos novamente usar a definição como no item a) ou aplicar regra de Leibniz. Com a regra de Leibniz (mais rápido) obtemos:

$$\left(\frac{d}{dx} + a^2\right)\frac{\cos(ax)}{a}H(x) =$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos(ax)}{a}\right)H(x) + \frac{\cos(ax)}{a}\frac{d}{dx}(H(x)) + a^2\frac{\cos(ax)}{a}H(x) =$$

$$-\text{sen}(ax)H(x) + \frac{\cos(ax)}{a}\delta_0 + a\cos(ax)H(x) =$$

$$\frac{\cos(ax)}{a}\delta_0 + (a\cos(ax) - \text{sen}(ax))H(x).$$

d) Vamos usar a definição. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Logo

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(H(x)H(y))(\phi) = H(x)H(y)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right) =$$

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}dx\right)dy = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^\infty \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)\,dx\right)dy =$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}(-\phi(0,y))\,dy = \phi(0,0) = \delta_0(\phi).$$

Assim $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(H(x)H(y)) = \delta_0$.

Exercício 11. (Hounie capítulo 2 ex. 7) Mostre que se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ satisfaz $\frac{du}{dx} = \delta_0$, então existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $u(x) = H(x) + c$.

Resposta:
Seja $v = H(x)$, em que H é a função de Heaviside. Logo, se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, temos

$$\frac{d}{dx}H(\phi) = -H\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = -\int_0^\infty \frac{d\phi}{dx}(x)\,dx = -\lim_{x\to\infty}(\phi(x) - \phi(0)) = \phi(0) = \delta_0(\phi).$$

Assim, concluímos que $\frac{d}{dx}v = \delta_0$. Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que $\frac{d}{dx}u = \delta_0$. Concluímos, assim, que $\frac{d}{dx}(u - v) = 0$. Vimos em sala de aula que isto implica que $u - v = C$, em que $C \in \mathbb{C}$ é uma constante. Logo $u = H(x) + C$.

Exercício 12. (Grubb ex. 2.1) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Seja $\varphi : I \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Mostre que se $\varphi \in C_c^\infty(I)$, então $\varphi = 0$.

Resposta:
Seja $\varphi \in C_c^\infty(I)$ analítica. Seja $\mathcal{N} := \left\{t \in I : \varphi^{(j)}(t) = 0, \forall j \in \mathbb{N}_0\right\}$. Como φ tem suporte compacto, existe um aberto tal que φ se anula. Portanto, este aberto está contido em $\mathcal{N}$. Assim, $\mathcal{N} \neq \emptyset$. Vamos agora provar que $\mathcal{N}$ é aberto e fechado.

$\mathcal{N}$ é fechado.

Seja $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ uma sequência e $t \in I$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Assim, para todo $j \in \mathbb{N}_0$, temos que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \varphi^{(j)}(t_n) = \varphi^{(j)}(t).$$

Logo $t \in \mathcal{N}$.

$\mathcal{N}$ é aberto.

Seja $t_0 \in \mathcal{N}$. Como φ é analítica, existe $\epsilon > 0$ tal que $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\subset I$ e, para todo $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$, temos que

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(t_0)(t - t_0)^j = 0.$$

Assim, $\varphi|_{]t_0-\epsilon,t_0+\epsilon[} = 0$. Logo todas as derivadas também se anulam nesta bola. Isto implica que $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\subset \mathcal{N}$. Assim, $\mathcal{N}$ é um aberto.

Como I é um conexo e $\mathcal{N}$ é um aberto e fechado não vazio contido em I, concluímos que $I = \mathcal{N}$. Portanto, $\varphi = 0$.

Exercício 13. (Grubb ex. 2.5) Mostre que se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B_R(0)$, então

$$\mathrm{sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \leq 2R\mathrm{sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial_{x_1}\varphi(x)|.$$

Dica: Expresse φ como uma integral de $\partial_{x_1}\varphi$.

Resposta:
Como $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ é tal que $\mathrm{supp}\varphi \subset B_R(0)$, vemos que

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = \varphi(x_1, ..., x_n) - \varphi(-R, ..., x_n) = \int_{-R}^{x_j} \partial_{x_1}\varphi(t, ..., x_n)\,dt.$$

Assim

$$|\varphi(x_1, ..., x_n)| \leq \int_{-R}^{R} |\partial_{x_1}\varphi(t, ..., x_n)|\,dy_j \leq 2R\,\mathrm{sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial_{x_1}\varphi(x)|.$$

Concluímos que

$$\mathrm{sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \leq 2R\,\mathrm{sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial_{x_1}\varphi(x)|.$$

Exercício 14. (D.K. ex. 2.2) Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\phi \neq 0$ e $0 \notin \mathrm{supp}\phi$. Consideremos as seguintes sequências:

i) $\phi_j(x) = \frac{1}{j}\phi(x - j)$.

ii) $\phi_j(x) = \frac{1}{j^p}\phi(jx)$, em que $p \in \mathbb{N}$.

iii) $\phi_j(x) = e^{-j}\phi(jx)$.

a) Para cada uma das sequências acima, mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}$ e para cada $k \in \mathbb{N}_0$, a sequência $\left(\frac{d^k\phi_j}{dx^k}(x)\right)_j$ converge para zero. Mostre que a convergência é uniforme no item *iii*).

b) Determine quais das sequências acima convergem a zero em $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Exercício 15. (D.K. ex. 2.3) Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função tal que $\phi \geq 0$, $\mathrm{supp}\phi \subset B_1(0)$ e $\int_{-\infty}^\infty \phi(x)\,dx = 1$. Definamos $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Dado $\psi \in C_c^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0$, mostre que:

a) $\partial_x^\alpha(\psi * \phi_\epsilon) = (\partial_x^\alpha\psi) * \phi_\epsilon$, para todo $|\alpha| \leq k$.

b) $\lim_{\epsilon\to 0} \psi * \phi_\epsilon = \psi$ em $C_c^k(\Omega)$.

c) Conclua que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $C_c^k(\Omega)$ no seguinte sentido: Dado $\varphi \in C_c^k(\Omega)$, existe uma sequência $(\varphi_j)_j \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\lim_{j\to\infty}\varphi_j = \varphi$ em $C_c^k(\Omega)$.

Exercício 16. (D.K. ex. 3.1 e 3.2) Considere a distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definida abaixo:

$$u(\phi) = \frac{d^k\phi}{dx^k}(0).$$

a) Mostre que a ordem de u é menor ou igual a $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Prove que a distribuição acima é de ordem exatamente igual a $k \in \mathbb{N}_0$.

(Dica: Seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\psi(0) = 1$. Definimos $\phi_\delta(x) = x^k\psi\left(\frac{x}{\delta}\right)$. Suponha que a ordem de u seja menor do que k. Use as funções ϕ_δ para obter uma contradição. O argumento completo pode ser encontrado no exemplo 2.1.2 do livro do Hörmander)

Exercício 17. (D.K. ex. 3.4) Verifique que u, v e w definidas abaixo são distribuições em $\mathbb{R}^2$:

i) $u(\phi) = \partial_{x_1}\partial_{x_2}\phi(1,1)$.

ii) $v(\phi) = \int_{\mathbb{R}}\phi(t,0)\,dt$.

iii) $w(\phi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\|x\|^2}\phi(x)\,dx$, em que $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Resposta:

i) u é linear, pois

$$u(\alpha\phi + \beta\psi) = \partial_{x_1}\partial_{x_2}(\alpha\phi + \beta\psi)(1,1) = \alpha\partial_{x_1}\partial_{x_2}\phi(1,1) + \beta\partial_{x_1}\partial_{x_2}\psi(1,1) = \alpha u(\phi) + \beta u(\psi).$$

u é contínuo, pois

$$|u(\phi)| = |\partial_{x_1}\partial_{x_2}\phi(1,1)| \le \|\phi\|_{C^2}.$$

ii) v é linear, pois

$$v(\alpha\phi + \beta\psi) = \int_{\mathbb{R}}(\alpha\phi + \beta\psi)(t,0)\,dt = \alpha\int_{\mathbb{R}}\phi(t,0)\,dt + \beta\int_{\mathbb{R}}\psi(t,0)\,dt = \alpha v(\phi) + \beta v(\psi).$$

v é contínuo, pois para todo $K \subset \mathbb{R}^2$, existe uma constante C tal que

$$|v(\phi)| \le C\|\phi\|_{C^0},\ \forall\phi \in C_c^\infty(K).$$

De fato, seja $R > 0$ tal que $K \subset B_R(0)$. Logo se $\phi \in C_c^\infty(K)$, então

$$|v(\phi)| = \left|\int_{\mathbb{R}}\phi(t,0)\,dt\right| = \left|\int_{-R}^{R}\phi(t,0)\,dt\right| \le \int_{-R}^{R}|\phi(t,0)|\,dt \le 2R\,\|\phi\|_{C^0}.$$

iii) w é uma distribuição. De fato, $w = T_f$, em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ dada por $f(x) = e^{\|x\|^2}$ é localmente integrável. Logo T_f define uma distribuição, conforme foi visto em sala de aula.

Exercício 18. (D.K. ex. 3.5) Consideremos funções e distribuições em $\mathbb{R}^2$:

a) Seja $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$. Mostre que $\frac{1}{r}$ e $\ln(r)$ definem distribuições em $\mathbb{R}^2$. Qual é a ordem destas distribuições?

b) Definimos $u(\phi) = \int_0^\pi (cos(t)\,\partial_{x_1} + sen(t)\,\partial_{x_2})\,\phi(\cos(t), \mathrm{sen}(t))\,dt$. Mostre que u define uma distribuição em $\mathbb{R}^2$. Qual é a sua ordem?

c) Definimos $u(\phi) = \int_0^\pi (-sen(t)\,\partial_{x_1} + cos(t)\,\partial_{x_2})\,\phi(\cos(t), \mathrm{sen}(t))\,dt$. Mostre que u define uma distribuição em $\mathbb{R}^2$. Qual é a sua ordem?

Exercício 19. (D.K. ex. 3.6) Mostre que se f é uma função contínua e T_f é a distribuição que corresponde a f, então $T_f \ge 0$ se, e somente se, $f \ge 0$.

Resposta: Suponha que $f \ge 0$. Logo se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ é tal que $\phi \ge 0$, então

$$T_f(\phi) = \int f(x)\,\phi(x)\,dx \ge 0,$$

já que estamos integrando uma função positiva. Logo $T_f \ge 0$.

Suponha que $T_f \ge 0$. Se f não for não negativa, então existe $x_o \in \Omega$ tal que $f(x_0) < 0$. Como f é contínua, existem constantes $c > 0$ e $r > 0$ tais que $f(x) \le -c$ para todo $x \in B_r(x_0)$. Desta maneira, escolhendo $\phi \in C_c^\infty(B_r(x_0))$ tal que $\phi \ge 0$ e $\int\phi dx = 1$, concluímos que

$$T_f(\phi) = \int f(x)\,\phi(x)\,dx = \int_{B_r(x_0)} f(x)\,\phi(x)\,dx \le -c\int_{B_r(x_0)}\phi(x)\,dx = -c < 0.$$

Logo T_f não é positiva. Assim, $T_f \ge 0$ implica $f \ge 0$.

Exercício 20. (D.K. ex. 4.1 e 4.2) Prove que:

a) $\frac{d}{dx}|x| = \text{sign}(x)$, em que $\text{sign}(x)$ é a função igual a 1 se $x \geq 0$ e a -1 se $x < 0$.

b) $\frac{d^2}{dx^2}|x| = 2\delta_0$.

c) $\frac{d}{dx}\ln(x) = PV\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercício 21. (D.K ex. 4.4) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a função definida como

$$f(x) = \begin{cases} e^{\lambda x}, \, x > 0 \\ 0, \, x \leq 0 \end{cases}.$$

Prove que as derivadas de f satisfazem:

$$\frac{d^k}{dx^k} f = \lambda^k f + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-1-j} \frac{d^j}{dx^j}(\delta_0), \, k \in \mathbb{N}_0.$$

Seja p um polinômio de grau $m > 0$ tal que $p(\lambda) = 0$. É verdade que $p(\partial) f = 0$? Calcule a ordem de f.

Resposta:

Exercício 22. (D.K. ex. 4.6) Seja $p \in \mathbb{R}^n$ e $v_j(x) = \frac{x_j - p_j}{\|x-p\|^n}$, $1 \leq j \leq n$. Verifique que v_j são localmente integráveis em $\mathbb{R}^n$ e que, portanto, definem distribuições em $\mathbb{R}^n$. Prove que

$$\text{div}(v) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} v_j = c_n \delta_p,$$

em que c_n denota o volume da esfera $\mathbb{S}^{n-1}$.

Exercício 23. (D.K. ex. 4.7) Para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Definamos

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)c_n \|x\|^{n-2}}, \text{ se } n \neq 2 \\ \frac{1}{2\pi} \ln\|x\|, \text{ se } n = 2 \end{cases}.$$

a) Mostre que existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $\partial_{x_j} E = c v_j$.

b) Mostre que $\Delta E = \delta$, em que

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2.$$

Exercício 24. (D.K. ex. 4.8) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Suponha que $c_1, ..., c_q \in \mathbb{C}$ e $a_1 < ... < a_q \in \mathbb{R}$. Ache as soluções $u \in \mathcal{D}'(I)$ de $\frac{du}{dx} = \sum_{j=1}^{q} c_j \delta_{a_j}$.

Resposta: Seja $H(x-a)$, em que H é a função de Heaviside. Logo

$$\frac{d}{dx} H(x-a)(\phi) = -H(x-a)\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = -\int_a^{\infty} \frac{d\phi}{dx}(x)\, dx = \phi(a) = \delta_a(\phi).$$

Assim, obtemos que $\frac{d}{dx} H(x-a) = \delta_a$. Portanto,

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{q} c_j H(x-a_j)\right) = \sum_{j=1}^{q} c_j \frac{d}{dx} H(x-a_j) = \sum_{j=1}^{q} c_j \delta_{a_j}.$$

Portanto, $\frac{d}{dx}\left(u - \sum_{j=1}^{q} c_j H(x-a_j)\right) = 0$. Logo $u = \sum_{j=1}^{q} c_j H(x-a_j) + c$, em que $c \in \mathbb{C}$, pelo que foi visto em sala de aula. Assim, as soluções são todas desta forma.