1. Convolução de Funções $L^2(\mathbb{R}^n)$

Problema 1. Vimos a definição de convolução entre as seguintes distribuições/funções: $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) * C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) * C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) * \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) * C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) * \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) * \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) * \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. No entanto, nos exercícios apareceu a convolução entre as funções $\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}$ e $\frac{\operatorname{sen}(bx)}{x}$. Estas funções são ambas $L^2(\mathbb{R}^n)$, mas não são integráveis. Qual é afinal a definição de convolução entre estas duas funções? Vale a propriedade $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v)$, quando u e v são $L^2(\mathbb{R}^n)$? Isto é importante, já que esta propriedade foi usada no exercício. As demonstração da primeira proposição foi retirada do livro de equações diferenciais de W. Arendt e K. Urban.

Definição 2. Sejam $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Definimos $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

É fácil ver que a definição acima faz sentido. De fato, para cada x fixo, a função $y \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x-y)\, g(y) \in \mathbb{C}$ é integrável, já que, usando Cauchy-Schwartz, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\, g(y)|\, dy \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^2\, dy} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^2\, dy} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Em particular, a estimativa acima mostra que $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que $\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Podemos provar ainda mais. De fato, a seguinte proposição é válida:

Proposição 3. *Sejam f e g funções em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo $f * g$ é uma função contínua tal que $\lim_{\|x\| \to \infty} f * g(x) = 0$, ou seja, $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ (funções contínuas que vão a zero no infinito).*

Demonstração. Sejam $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que converge a f em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $(g_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que converge a g em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo $f_j * g_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$. Sabemos que $C_0(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach com a norma do sup, ou seja, é um subconjunto fechado de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Assim, se mostrarmos que $f_j * g_j$ converge a $f * g$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, concluiremos que $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

A prova da convergência em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é simples. Basta ver que

$$\begin{gathered}\|f * g - f_j * g_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|f * g - f_j * g + f_j * g - f_j * g_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \\ \|(f - f_j) * g + f_j * (g - g_j)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|(f - f_j) * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|f_j * (g - g_j)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \\ \|f - f_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|g - g_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0,\ j \to \infty.\end{gathered}$$

□

Como as funções em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, em particular as funções em $C_0(\mathbb{R}^n)$, definem distribuições temperadas, concluímos que $f * g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Desta maneira, $\mathcal{F}(f * g)$ está bem definido e pertence a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, como f e g pertencem a $L^2(\mathbb{R}^n)$, concluímos que $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ também são funções que pertencem a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Portanto, vemos que $\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, já que, repetindo o argumento anterior, temos

$$\begin{gathered}\|\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f)(\xi)\, \mathcal{F}(g)(\xi)|\, d\xi \leq \\ \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\mathcal{F}(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\end{gathered}$$

Portanto $\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ também define uma distribuição temperada, ou seja, $\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Tendo estas observações em mente, podemos provar a seguinte proposição:

Proposição 4. *Sejam f e g funções em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo a distribuição temperada $\mathcal{F}(f * g)$ é dada pela função $\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.*

Demonstração. Observemos que a inclusão $L^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é contínua. De fato, se $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j \to \infty} f_j = f$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então para todo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{gathered}|f_j(\phi) - f(\phi)| \leq \int |f_j(x)\, \phi(x) - f(x)\, \phi(x)|\, dx = \int |(f_j(x) - f(x))\, \phi(x)|\, dx = \\ \int |(f_j(x) - f(x))| \left(1 + |x|^2\right)^{-n} (1 + |x|)^n\, |\phi(x)|\, dx \leq \\ \int \left(1 + |x|^2\right)^{-n} dx\, \|(1 + |x|)^n\, \phi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f_j - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0,\ j \to \infty.\end{gathered}$$

Concluímos, assim, que $\lim_{n\to\infty} f_j = f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Sejam $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que converge a f em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que converge a g em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Vimos que $f_j * g_j$ converge a $f * g$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Portanto também em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Logo, como $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é contínua, concluímos que

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{F}(f_j * g_j) = \mathcal{F}(f * g), \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Da mesma forma, como $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\lim_{j\to\infty} g_j = g$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, temos que $\lim_{j\to\infty} \mathcal{F}(f_j) = \mathcal{F}(f)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\lim_{j\to\infty} \mathcal{F}(g_j) = \mathcal{F}(g)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Isto nos diz que $\lim_{j\to\infty} \mathcal{F}(f_j)\mathcal{F}(g_j) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato, temos

$$\|\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) - \mathcal{F}(f_j)\mathcal{F}(g_j)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|(\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_j))\mathcal{F}(g) + \mathcal{F}(f_j)(\mathcal{F}(g) - \mathcal{F}(g_j))\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq$$
$$\|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\mathcal{F}(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathcal{F}(f_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\mathcal{F}(g) - \mathcal{F}(g_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0,\ j \to \infty.$$

Vimos em sala de aula que a inclusão $L^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é contínua, Isto implica que $\lim_{j\to\infty} \mathcal{F}(f_j)\mathcal{F}(g_j) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Como f_j e g_j pertencem a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos $\mathcal{F}(f_j * g_j) = \mathcal{F}(f_j)\mathcal{F}(g_j)$. Logo

$$\mathcal{F}(f * g) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}(f_j * g_j) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}(f_j)\mathcal{F}(g_j) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$$

$\square$