SEGUNDA PROVA - CÁLCULO V - MAP 0217 / MAT 0311 .

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

Considere a seguinte função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^4+y^4}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} .$$

(1,0 ponto) a) Mostre que existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, em que $v = (v_1, v_2)$.

(1,0 ponto) b) A igualdade $\langle \nabla f(0,0), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ é sempre válida? Prove ou dê um contraexemplo.

(0,5 ponto) c) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

Exercício 2

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞.

(1,0 ponto) a) Suponha que $f(x) = 0$ para todo $x \in S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$. Prove que existe um ponto crítico de f em $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$.

(0,5 ponto) b) Suponha que $d^4 f(0)(v) = \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^4 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} v_i v_j v_k v_l > 0$, para todo $v = (v_1, ..., v_n) \neq 0$. Mostre que existe uma constante $c > 0$ tal que $d^4 f(0)(v) > c \|v\|^4$ (Dica: Use que S^{n-1} é compacto e escreva $v = \|v\| \frac{v}{\|v\|}$.)

(1,0 ponto) c) Suponha que $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) = 0$ e $\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}(0) = 0$ para todo $j, k, l \in \{1, ..., n\}$. Suponha que para todo $v = (v_1, ..., v_n) \neq 0$, temos $d^4 f(0)(v) = \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^4 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} v_i v_j v_k v_l > 0$. Prove que o ponto 0 é um ponto de mínimo local de f. Ele é um ponto de mínimo local estrito de f? (Dica: Use série de Taylor)

Exercício 3

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e S^2 a esfera definida como $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(1,5 ponto) a) Seja $f(x,y,z) = x + y + z$. Ache os valores de máximo e de mínimo de $f|_{S^2}$, ou seja, de f na esfera.

(1,0 ponto) b) Seja $f(x,y,z) = ax^2 + ey^2 + gz^2 + 2bxy + 2cxz + 2fyz$, em que a, b, c, d, e, f, $g \in \mathbb{R}$. Mostre que os valores $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que correspondem ao máximo e ao mínimo de f em S^2 são autovetores da matriz

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & g \end{pmatrix}.$$

Exercício 4

Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y) = y\left(1 + y^6\right) - g(x).$$

(1,0 ponto) a) Mostre que para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe um único $y \in \mathbb{R}$ tal que $F(x,y) = 0$.

(1,5 ponto) b) Mostre que existe uma única função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)\left(1 + f(x)^6\right)$. Prove que ela é de classe C^1.

Formulário.

Definição 1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é diferenciável em $x_0 \in \Omega$ se existe um funcional linear $df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$r_{x_0}(h) := f(x_0 + h) - f(x_0) - df(x_0)(h)$$

satisfaz $\lim_{h\to 0} \frac{r_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$. Dizemos que f é diferenciável, se for diferenciável em todo $x \in \Omega$.

Proposição 2. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $x_0 \in \Omega$, em que Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Logo:*

1) Para todo $v \in \mathbb{R}^n$, existe a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$. A derivada direcional satisfaz $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v)$. As derivadas direcionais $\frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0)$, para $j \in \{1, ..., n\}$, em que $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ... formam a base canônica de $\mathbb{R}^n$, são chamadas de derivadas parciais de f. Usamos a notação $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) := \frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0)$.

2) O funcional linear $df(x_0)$ é dado pela expressão $df(x_0)(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) h_j = \langle \nabla f(x_0), h\rangle$, em que $\nabla f(x_0)$, também denotado por $grad(f)(x_0)$, é chamado de vetor gradiente de f e tem a expressão $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$.

Proposição 3. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função, em que Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Se todas as derivadas parciais existem em todos os pontos de Ω e $\frac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções contínuas para todo $j \in \{1, ..., n\}$, então f é diferenciável. Neste caso, dizemos que f é de classe C^1.*

Definição 4. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função, em que Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, e $k \geq 1$. Se todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a k, ou seja, derivadas da forma $\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{il}}(x)$, $x \in \Omega$ e $l \leq k$, existem e definem funções contínuas em Ω, dizemos que f é de classe C^k. Dizemos que uma função é de classe C^0 se ela for contínua.

Teorema 5. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$, x e $x+v \in \Omega$, temos*

$$f(x+v) = f(x) + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} d^l f(x)(v) + r_x^k(v),$$

em que $d^l f(x)(v) := \sum_{i_1=1}^{n} ... \sum_{i_l=1}^{n} \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_l}}(x) v_{i_1} ... v_{i_l}$, $v = (v_1, ..., v_n)$ e $\lim_{v\to 0} \frac{r_x(v)}{\|v\|^k} = 0$.

Definição 6. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, em que Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $x_0 \in \Omega$ é um ponto de mínimo local de f se existir um aberto $U \subset \Omega$ tal que $x_0 \in U$ e $f(y) \geq f(x_0)$ para todo $y \in U$. Dizemos que $x_0 \in \Omega$ é um ponto de mínimo local estrito de f se existir um aberto $U \subset \Omega$ tal que $x_0 \in U$ e $f(y) > f(x_0)$ para todo $y \in U \setminus \{x_0\}$. Um ponto de máximo local de f é definido da mesma forma, substituindo $\geq$ por $\leq$ e $>$ por $<$.

Seja $M \subset \Omega$ uma hiperfície. Dizemos que $x_0 \in M$ é um ponto de mínimo local de $f|_M$ se existir um aberto $U \subset \Omega$ tal que $x_0 \in U$ e $f(y) \geq f(x_0)$ para todo $y \in U \cap M$. Dizemos que $x_0 \in \Omega$ é um ponto de mínimo local estrito de $f|_M$ se existir um aberto $U \subset \Omega$ tal que $x_0 \in U$ e $f(y) > f(x_0)$ para todo $y \in (U \cap M) \setminus \{x_0\}$. Um ponto de máximo local de $f|_M$ é definido da mesma forma, substituindo $\geq$ por $\leq$ e $>$ por $<$.

Proposição 7. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, em que Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Todo ponto de máximo ou mínimo local de f é um ponto crítico de f, ou seja, satisfaz $df(x_0) = 0$.*

Proposição 8. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, em que Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, e $M \subset \Omega$ uma hiperfície de classe C^1. Todo ponto de máximo ou mínimo local de $f|_M$ é um ponto crítico de $f|_M$, ou seja, $df(x_0)(v) = 0$, para todo $v \in T_{x_0}M := \{\gamma'(0), \gamma :]-\delta, \delta[\to M$ é diferenciável e $\gamma(0) = x_0\}$.*

Teorema 9. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, em que Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Seja $c \in \mathbb{R}$ um ponto regular de φ, ou seja, c é um ponto da imagem de φ e, para todo $x \in \Omega$ tal que $\varphi(x) = c$, temos $d\varphi(x) \neq 0$. Seja M a hiperfície $\varphi^{-1}(c)$. Logo $x \in \Omega$ é um ponto crítico de $f|_M$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \varphi(x) = c \\ \nabla f(x) = \lambda \nabla \varphi(x) \end{cases}.$$

Teorema 10. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k, $k \geq 1$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um aberto. Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ um ponto de Ω tal que $f(x_0, y_0) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Logo existe uma bola aberta $B = B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo $J =]y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon[$ com as seguintes propriedades:*

1) $B \times \overline{J} \subset \Omega$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in B \times \overline{J}$.

2) Para todo $x \in B$, existe um único $y = \xi(x) \in J$ tal que $f(x, y) = f(x, \xi(x)) = c$. A função $\xi : B \to J$ é de classe C^k e $\frac{\partial \xi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}$, para todo $j = 1, ..., n$.