PRIMEIRA PROVA - CÁLCULO V - MAP 0217 / MAT 0311 .

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

(1,0 ponto) a) Verifique que a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty[$ dada pela expressão abaixo é um métrica em $\mathbb{R}$.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ se } x = y \\ 1 + |x - y|, \text{ se } x \neq y \end{cases}.$$

(1,5 ponto) b) Consideremos em $\mathbb{R}$ duas métricas. A métrica d definida acima e a métrica usual $d_U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty[$ definida como $d_U(x, y) = |y - x|$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x = 0 \\ 1 + |x|, \text{ se } x \neq 0 \end{cases}.$$

Prove que $f : (\mathbb{R}, d_U) \to (\mathbb{R}, d_U)$ não é contínua, ou seja, f não é contínua na métrica usual de $\mathbb{R}$.

Prove que $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_U)$ é contínua, ou seja, f não é contínua quando o domínio tem a métrica definida acima e o contradomínio tem a métrica usual.

Exercício 2

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e conexo. Seja $f : K \to \mathbb{R}^n$ contínua.

(0,5 ponto) a) Mostre que $\varphi : K \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dado por $\varphi(x) = (x, f(x))$ é contínua.

(1,0 ponto) b) Mostre que o conjunto $\text{graf}(f) := \{(x, f(x)) ; x \in K\}$ é conexo e compacto.

(1,0 ponto) c) Seja $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto que pertence a imagem de f. Prove que $f^{-1}(p)$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Exercício 3

Sejam (M, d) um espaço métrico, $X \subset M$ e $Y \subset M$ subconjuntos de M.

(1,5 ponto) Prove que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$.

(1,0 ponto) Suponha que $M = \overline{X} \cup \overline{Y}$, $X \cap Y \neq \emptyset$ e X e Y são conjuntos conexos. Mostre que toda função contínua $f : M \to \mathbb{Q}$ é constante.

Exercício 4

Seja (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$.

(1,5 ponto) a) Seja $x \in M$. Mostre que se $y \in B_\epsilon(x)$, então $|d(y, X) - d(x, X)| < \epsilon$. (Lembre que $d(x, X) := \inf\{d(x, y) ; y \in X\}$)

(1 ponto) b) Seja $C \subset M$ um conjunto conexo. Mostre que para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $\inf\{d(y, X) ; y \in C\} < t < \sup\{d(y, X) ; y \in C\}$, existe $x_0 \in C$ tal que

$$d(x_0, X) = t.$$

(Dica: Conclua de a), que $x \in M \mapsto d(x, X) \in \mathbb{R}$ é uma função contínua. Use este fato.)

Formulário.

Definição 1. (Espaço Métrico) Um espaço métrico (M,d) consiste de um conjunto M e uma função $d: M\times M \to [0,\infty[$ chamado métrica que satisfaz:

1) $d(x,y)=0$ se, e somente se, $x=y$.
2) $d(x,y)=d(y,x)$, para todo $x,y\in M$.
3) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

Definição 2. (Função contínua) Sejam (M,d) e $\left(N,\tilde{d}\right)$ dois espaços métricos e $f: M\to N$ uma função. Dizemos que f é contínua se qualquer uma das propriedades abaixo vale (qualquer uma das propriedades abaixo implica as demais):

1) Para todo $x\in M$ e $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ (que pode depender de x e ϵ) tal que se $d(y,x)<\delta$, então $\tilde{d}(f(y),f(x))<\epsilon$, ou seja, $f\left(B_\delta^M(x)\right)\subset B_\epsilon^N(f(x))$ (B^M são bolas em M e B^N são bolas em N).
2) Seja $F\subset N$ um conjunto fechado. Logo $f^{-1}(F)$ é um conjunto fechado de M.
3) Seja $A\subset N$ um conjunto aberto. Logo $f^{-1}(A)$ é um conjunto aberto de M.
4) Seja $X\subset M$. Logo $f\left(\overline{X}\right)\subset\overline{f(X)}$.

Uma função $f: M\to N$ é um homeomorfismo se for bijetora, contínua e $f^{-1}: N\to M$ for contínua.

Definição 3. (Aberto/Fechado/Interior/Fecho) Seja (M,d) um espaço métrico.

1) Dizemos que $A\subset M$ é um aberto se para todo $x\in A$, existe $\epsilon>0$ tal que $B_\epsilon(x)\subset A$, em que $B_\epsilon(x)=\{y\in M;\, d(y,x)<\epsilon\}$ é a bola aberta de raio ϵ e centro x.
2) Um conjunto $F\subset M$ é fechado se $F^c:=M\backslash F$ é um conjunto aberto. F é fechado equivale a: i) Se $d(x,F)=0$, então $x\in F$. ii) Todo ponto de aderência de F pertence a F. iii) Se $(x_n)_n$ é uma sequência convergente e $x_n\in F$, então $\lim_{n\to\infty}x_n\in F$.
3) O interior de um conjunto $X\in M$ é o maior aberto contido em X. Isto equivale a: i) $\operatorname{int}(X)$ é a união de todos os abertos contidos em X. ii) $x\in\operatorname{int}(X)$ se, e somente se, existe $\epsilon>0$ tal que $B_\epsilon(x)\subset X$.
4) O fecho de um conjunto $X\in M$ é o menor fechado que contém X. Isto equivale a: i) $\overline{X}$ é a intersecção de todos os fechados que contém X. ii) $x\in\overline{X}$ se, e somente se, x é um ponto de aderência de X, ou seja, para todo $\epsilon>0$, $B_\epsilon(x)\cap X\neq\emptyset$. iii) $x\in\overline{X}$ se, e somente se, $d(x,X)=0$. iv) $x\in\overline{X}$ se, e somente se, existe uma sequência $(x_n)_n$ com $x_n\in X$ tal que $\lim_{n\to\infty}x_n=x$.

Definição 4. (Conexo) Dizemos que um espaço métrico (M,d) é conexo se o único conjunto aberto e fechado contido em M é o vazio e o conjunto M. Isto equivale a: Se $M=A\cup B$, $A\cap B=\emptyset$ e A e B são abertos, então $A=M$ e $B=\emptyset$ ou $A=\emptyset$ e $B=M$. Dizemos que $X\subset M$ é conexo se $\left(X,\, d|_{X\times X}\right)$ é conexo.

Para conjuntos conexos valem as seguintes propriedades:

i) Sejam X_α, $\alpha\in\Lambda$, conjuntos conexos. Se $\cap_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha\neq\emptyset$, então $\cup_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ é um conjunto conexo.
ii) Se $X\subset M$ é um conjunto conexo, então $\overline{X}$ também é um conjunto conexo.
iii) Se $f: M\to N$ é uma função contínua e M é um conjunto conexo, então $f(M)$ também é um conjunto conexo.

Definição 5. (Compacto) Dizemos que um espaço métrico (M,d) é compacto se dado uma coleção $(A_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\subset M$ de conjuntos abertos tais que $M=\cup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$, então existe α_1, ..., $\alpha_n\in\Lambda$ tal que $M=A_{\alpha_1}\cup\ldots\cup A_{\alpha_n}$. Isto equivale a: Toda sequência de $(x_n)_n$ de M tem uma subsequência convergente. Dizemos que $X\subset M$ é compacto se $\left(X,\, d|_{X\times X}\right)$ é compacto.

Para conjuntos compactos valem as seguintes propriedades:

1) A intersecção de compactos é um conjunto compacto.
2) A união de finitos compactos é um conjunto compacto.
3) Se $f: M\to N$ é uma função contínua e M é um conjunto compacto, então $f(M)$ também é um conjunto compacto.