LISTA DE EXERCÍCIOS 4 CÁLCULO V

Para o estudo da terceira prova, recomendamos resolver os exercícios dos capítulos 5 (Aplicações Diferenciais), 6 (Aplicações Inversas e Implícitas) e partes do 7 (Superfícies diferenciáveis, somente as seções iniciais. Sobre este capítulo será cobrado (caso seja cobrado) apenas conceitos básicos) do livro Análise Real Volume 2 do Elon.

Abaixo segue uma lista de exercícios extras (alguns muito parecidos com os do Elon), selecionados ou adaptados da apostila "Cálculo Diferencial Geométrico no $\mathbb{R}^n$". Indicamos por ELJ X, o exercício X da apostila das professoras Élvia Sallum, Lucia Murakami e Juaci da Silva. Sempre denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais $n \times n$.

Exercício 1. (ELJ 38) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ diferenciável. Vamos definir $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ por

$$F(x, y) = f(3x - y).$$

a) Mostre que F é uma função diferenciável (Lembre-se que composta de funções diferenciáveis é diferenciável).

b) Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e $v = (h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Calcule $\frac{\partial F}{\partial v}(x_0, y_0)$ em termos de f usando a definição de derivada direcional.

c) Ache uma expressão para $dF(x_0, y_0)$ em termos de f.

Exercício 2. (ELJ 39) Estude a diferenciabilidade da função F e ache $dF(p)$ e sua matriz nos seguintes casos:

a) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ é dado por $F(x) = (x, f(x))$, em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável.

b) $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ é dado por $F(x, y) = (x, f(y))$, em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável.

c) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dado por $F(x) = \langle x, x_0 \rangle$, em que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é fixo.

d) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dado por $F(x) = \langle x, Ax \rangle$, em que $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear.

e) $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é dado por $F(x, y) = f(x) + g(y)$, em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ são diferenciáveis.

Exercício 3. (ELJ 40) Seja $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ dada por $f(X) = X^2 + X^3$. Mostre que f é diferenciável. Calcule $df(X_0)(H)$, em que X_0 e $H \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercício 4. (ELJ 41) Dado $A \in M_3(\mathbb{R})$, vamos escrever $A = (A_1, A_2, A_3)$ para dizer que A é a matriz cujas linhas são A_1, A_2 e A_3. Usando esta notação, mostre que $\det : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Calcule $d(\det)(A)(I)$, em que I é a matriz identidade.

Exercício 5. (ELJ 45) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma função de classe C^1, em que Ω é um aberto. Mostre que o conjunto $\{x \in \Omega;\ df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n} \text{ é injetora}\}$ é um aberto.

Exercício 6. (ELJ 48) Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma função bilinear. Mostre que

a) $\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$.

b) f é diferenciável em (x_0, y_0). Calcule $df(x_0, y_0)(h, k)$.

Exercício 7. (ELJ 49) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável que satisfaz $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$, em que $M > 0$ é um valor constante. Mostre que $\left\|\frac{\partial f}{\partial \nu}(p)\right\| \leq M\|v\|$, para todo $p, v \in \mathbb{R}^m$.

Exercício 8. (ELJ 51) Use a regra da cadeia para resolver os itens abaixo:

a) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, então $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $\omega(t) = F(f(t), g(t), t)$ é derivável. Calcule $\frac{d\omega}{dt}(t)$.

b) Mostre que se $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis, então $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por $\omega(x, y, z) = F(x, u(x, y), v(y, z))$ é diferenciável. Calcule $d\omega(x, y, z)$.

c) Mostre que se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis, então $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por $F(x, y, z) = f(g(x + y), h(y + z))$ é diferenciável. Calcule $dF(x, y, z)$.

Exercício 9. (ELJ 52) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciável. Mostre que:

a) A função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(x) = \langle f(x), f(x) \rangle$ é diferenciável. Calcule $dF(x_0)(h)$.

b) Se $\|f(x)\| = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então $\det(df(x)) = 0$. Interprete geometricamente.

Exercício 10. (ELJ 55) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função que satisfaz

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2, \forall x, y \in \mathbb{R}^m.$$

Mostre que f é uma função constante.

Exercício 11. (ELJ 59) Se $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é dado por $F(x, y) = A(x)(y)$, em que $A : \mathbb{R}^m \to L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right)$ é diferenciável. Mostre que F é diferenciável e calcule $dF(x, y)(h, k)$.

Exercício 12. (ELJ 64) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciável e a um ponto de acumulação de $f^{-1}(b)$, em que $b \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $df(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ não é injetora.

Exercício 13. (ELJ 65) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^2 que satisfaz, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^m$, $f(tx) = t^2 f(x)$. Mostre que existe uma aplicação bilinear $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = B(x, x)$.

Exercício 14. (ELJ 68) Sejam $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funções diferenciáveis, em que h é um difeomorfismo. Suponha que $f = h^{-1} \circ g \circ h$ e $f(p) = p$ para um certo $p \in \mathbb{R}^n$. Mostre que:

a) $g(h(p)) = h(p)$.

b) $df(p)$ e $dg(h(p))$ têm os mesmos autovalores. (Lembre-se que λ é um autovalor de A se, e somente se, $\det(\lambda I - A) = 0$).

Exercício 15. (ELJ 70) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local. Mostre que

a) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, então $f(A)$ também é.

b) Mostre que se $p \in \mathbb{R}^n$, então $f^{-1}(p)$ é vazio, finito ou infinito enumerável.

Exercício 16. (ELJ 72) Sejam $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g_1, ..., g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que

1) f é contínua.

2) $g_j \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são de classe C^1.

3) Os vetores $\{\nabla g_1(f(x)), ..., \nabla g_m(f(x))\}$ são linearmente independentes para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Mostre que, nestas condições, a função f é de classe C^1.

Exercício 17. (ELJ 75) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $f \circ f(x_0) = x_0$, para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $df(f(x))df(x) = I$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é invertível e $f^{-1} = f$.

Exercício 18. (ELJ 90) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 - z^2, x - y - a\right).$$

Para que valores de a vale a seguinte propriedade: Se $(x, y, z) \in f^{-1}(0)$, então $df(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é sobrejetora. (Observação: Neste caso, o valor 0 é chamado de valor regular)

Exercício 19. (ELJ 102) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ uma função de classe C^1. Sejam $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ dado por $F(x, y) = f(x) - y$ e $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ dado por $G(x) = (x, f(x))$.

a) Mostre que $\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) ; x \in \mathbb{R}^n\} = F^{-1}(0)$.

b) Mostre que se $(x, y) \in F^{-1}(0)$, então $dF(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ é sobrejetora.

c) Mostre que $\text{graf}(f) = \text{Imagem}(G)$.

d) Mostre que $dG : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ é injetora.

Exercício 20. (ELJ 110 e 113) Dizemos que uma função $h : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão se h é diferenciável e $dh(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetora, para todo $x \in \Omega$. Mostre que

a) Se $h : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão, então $m \leq n$.

b) Se $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ é uma imersão de classe C^1, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo de classe C^1, então $\sigma \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ é uma imersão de classe C^1.

c) Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ são imersões de classe C^1, mostre que $f \times g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^{n+p}$ dado por

$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$$

é uma imersão de classe C^1. Conclua que $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ (toro) é a imagem de uma imersão de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^4$.

Exercício 21. (ELJ 115) Mostre que se $f : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^n$ é uma submersão de classe C^1, então f leva conjuntos abertos em conjuntos abertos.

Exercício 22. (ELJ 118) Seja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ uma submersão de classe C^1 tal que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^4$. Mostre que a função $x \mapsto \|f(x)\|$ não tem máximos nem mínimos locais.