Lista de Exercícios 4

Os exercício abaixo foram tirados ou adaptados da Apostila da Elosa / Lucia / Juaci. Denotaremos por ELJ X, o exercício número X da apostila. No que segue $M_n(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes $n\times n$.

Exercício 1 (ELJ 38) Seja $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ diferenciável. Vamos definir $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ por

$$F(x,y)=f(3x-y).$$

a) Mostre que F é uma função diferenciável (Lembre-se que composta de funções diferenciáveis é diferenciável).

b) Seja $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ e $v=(h,k)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Calcule $\frac{\partial F}{\partial v}(x_0,y_0)$ em termos de f usando a definição de derivada direcional.

c) Ache uma expressão para $dF(x_0,y_0)$ em termos de f.

Exercício 2 (ELJ 39). Estude a diferenciabilidade da função F e ache $dF(p)$ e sua matriz nos seguintes casos:

(a) $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k$ é dado por $F(x)=(x,f(x))$, em que $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ é diferenciável.

(b) $F:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k$ é dado por $F(x,y)=(x,f(y))$, em que $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ é diferenciável.

(c) $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ é dado por $F(x)=\langle x,x_0\rangle$, em que $x_0\in\mathbb{R}^n$ é fixo.

(d) $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ é dado por $F(x)=\langle x,Ax\rangle$, em que $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ é uma transformação linear.

(e) $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ é dado por $F(x,y)=f(x)+g(y)$, em que $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ e $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ são diferenciáveis.

Exercício 3 (ELJ 40). Seja $f:M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$ dado por $f(X)=X^2+X^3$. Mostre que f é diferenciável. Calcule $df(X_0)(H)$, em que X_0 e $H\in M_n(\mathbb{R})$.

Exercício 4 (ELJ 41). Dado $A\in M_3(\mathbb{R})$, vamos escrever $A=(A_1,A_2,A_3)$ para dizer que A é a matriz cujas linhas são A_1, A_2 e A_3. Usando esta notação, mostre que $\det: M_3(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Calcule $d(\det)(A)(I)$, em que I é a matriz identidade.

Exercício 5 (ELJ 45). Seja $f:\Omega\overset{ab}{\subset}\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m+n}$ de classe C^1. Mostre que o conjunto $\{x\in\Omega;\ df(x):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m+n}$ é injetora$\}$ é um aberto.

Exercício 6 (ELJ 48). Seja $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma função bilinear. Mostre que

(a) $\lim_{(h,k)\to 0} \dfrac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$.

(b) f é diferenciável em (x_0, y_0). Calcule $df(x_0,y_0)(h,k)$.

Exercício 7 (ELJ 49). Seja $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável que satisfaz $\|f(x)-f(y)\| \leq M\|x-y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$, em que $M > 0$ é um valor constante. Mostre que $\|\frac{\partial f}{\partial v}(p)\| \leq M\|v\|$, $\forall$ $p, v \in \mathbb{R}^m$.

Exercício 8 (ELJ 51). Use a regra da cadeia para resolver os itens abaixo

(a) Mostre que se $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, então $\omega: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dado por $\omega(t) = F(f(t), g(t), t)$ é derivável. Calcule $\frac{d\omega}{dt}(t)$.

(b) Mostre que se $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis, então $\omega: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por $\omega(x,y,z) = F(x, u(x,y), v(y,z))$ é diferenciável. Calcule $d\omega(x,y,z)$.

(c) Mostre que se $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis, então $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por $F(x,y,z) = f(g(x+y), h(y+z))$ é diferenciável. Calcule $dF(x,y,z)$.

Exercício 9 (ELJ 52) Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciável. Mostre que:

a) a função $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \langle f(x), f(x)\rangle$ é diferenciável. Calcule $dF(x_0)(h)$.

b) se $\|f(x)\| = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então $\det(df(x)) = 0$. Interprete geometricamente.

Exercício 10 (ELJ 55). Seja $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função que satisfaz

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x-y\|^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^m.$$

Mostre que f é uma função constante.

Exercício 11 (ELJ 59). Seja $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ dado por $F(x,y) = A(x)(y)$, em que $A: \mathbb{R}^m \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$ é diferenciável. Mostre que F é diferenciável e calcule $dF(x,y)(h,k)$.

Exercício 12 (ELJ64) Seja $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciável e a um ponto de acumulação de $f^{-1}(b)$, em que $b \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $df(a): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ não é injetora.

Exercício 13 (ELJ65) Seja $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^2 que satisfaz, para todo $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $f(tx) = t^2 f(x)$. Mostre que existe uma aplicação bilinear $B: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = B(x,x)$.

Exercício 14 (ELJ68). Sejam $f, g, h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funções diferenciáveis, em que h é um difeomorfismo. Suponha que $f = h^{-1} \circ g \circ h$ e $f(p) = p$ para um certo $p \in \mathbb{R}^n$. Mostre que

a) $g(h(p)) = h(p)$

b) $df(p)$ e $dg(h(p))$ têm os mesmos autovalores (Lembre-se que λ é um autovalor de A se, e somente se, $\det(\lambda I - A) = 0$).

Exercício 15 (ELJ70) Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local. Mostre que

a) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, então $f(A)$ também é.

b) Mostre que se $p \in \mathbb{R}^n$, então $f^{-1}(p)$ é vazio, finito ou infinito enumerável.

Exercício 16 (ELJ72). Sejam $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g_1, \dots, g_m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções tais que

1) f é contínua.

2) $g_j \circ f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são de classe C^1

3) $\{\nabla g_1(f(x)), \dots, \nabla g_m(f(x))\}$ são vetores L.I, $\forall x \in \mathbb{R}^m$.

Mostre que f é de classe C^1.

Exercício 17 (ELJ75). Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $f \circ f(x_0) = x_0$, para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $df(f(x))\, df(x) = I$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é invertível e $f^{-1} = f$.

Exercício 18 (ELJ 90) Seja $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$f(x,y,z) = (x^2+y^2-z^2,\ x-y-a).$$
Para que valores de a vale a implicação
$$(x,y,z) \in f^{-1}(0) \Rightarrow df(x,y,z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{ é sobrejetora}$$
(O valor 0 é chamado de valor regular, neste caso).

Exercício 19 (ELJ 102). Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ uma função de classe C^1. Sejam $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ dada por $F(x,y) = f(x) - y$ e $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ dada por $G(x) = (x, f(x))$.

a) Mostre que $\mathrm{graf}(f) = F^{-1}(0)$.

b) Mostre que se $(x,y) \in F^{-1}(0)$, então $dF(x,y): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ é sobrejetora

c) Mostre que $\mathrm{graf}(f) = \mathrm{Imagem}(G)$.

d) Mostre que $dG: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ é injetora.

Exercício 20 (ELJ 110 e 113)

Dizemos que uma função $h: \Omega \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão se h é diferenciável e $dh(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetora, $\forall x \in \Omega$. Mostre que

a) Se $h: \Omega \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão, então $m \leq n$.

b) Se $\sigma: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ é uma imersão de classe C^1, $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo de classe C^1, então $\sigma \circ F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ é uma imersão de classe C^1.

c) Se $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ são imersões de classe C^1, mostre que $f \times g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^{n+p}$ dada por
$$f \times g\,(x,y) = (f(x), g(y))$$
é uma imersão de classe C^1. Conclua que $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ (toro) é a imagem de uma imersão de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^4$.

Exercício 21 (ELJ 115). Mostre que se $f: \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^n$ é uma submersão de classe C^1, então f leva conjuntos abertos em conjuntos abertos.

Exercício 22 (ELJ 118). Seja $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ uma submersão de classe C^1 tal que $f(x) \neq 0$, $\forall x$. Mostre que $x \mapsto \|f(x)\|$ não tem máximos nem mínimos locais.