LISTA DE EXERCÍCIOS 3 CÁLCULO V

Para o estudo da matéria da segunda prova, recomendamos resolver os exercício dos capítulos 3 (Funções Reais de n Variáveis) e 4 (Funções Implícitas) do livro Análise Real Volume 2 do Elon.

Abaixo segue uma lista de exercícios extras (alguns muito parecidos com os do Elon), selecionados ou adaptados da apostila "Cálculo Diferencial Geométrico no $\mathbb{R}^n$". Indicamos por ELJ X, o exercício X da apostila.

Exercício 1 (ELJ 32)
Para cada uma das funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas abaixo, responda:

i) Para quais $u \in \mathbb{R}^2$, existem $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$? Calcule.

ii) Existem $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$?

iii) A função f é diferenciável em $(0,0)$?

iv) A função f é contínua em $(0,0)$?

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(y-x)^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Exercício 2 (ELJ 34)
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Prove que a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada abaixo é diferenciável se $x \neq y$. Mostre que se f é de classe C^2, então F é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \text{ se } x \neq y \\ f'(x), \text{ se } x = y \end{cases}.$$

Exercício 3 (ELJ 36)
Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função definida no aberto Ω.

a) Suponha que $v \neq 0$ e que exista $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$. Mostre que também existe $\frac{\partial f}{\partial tv}(p)$ e que $\frac{\partial f}{\partial tv}(p) = t\frac{\partial f}{\partial v}(p)$.

b) Encontre um exemplo em que exista $\frac{\partial f}{\partial u}(p)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ e $\frac{\partial f}{\partial (u+v)}(p)$ com $\frac{\partial f}{\partial (u+v)}(p) \neq \frac{\partial f}{\partial u}(p) + \frac{\partial f}{\partial v}(p)$.

Exercício 4 (ELJ 37)
Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}^2$ dados por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ e $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) \neq \langle \nabla f(0,0), u \rangle$. Explique.

Exercício 5 (ELJ 42)
Estude a diferenciabilidade de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

a) $f(x,y) = |x| + |y|$.

b) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

c) $f(x,y) = |xy|$.

d) $f(x,y) = \sup\{|x|, |y|\}$.

Exercício 6 (ELJ 44)
Dê o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ onde f é de classe C^1 mas não é de classe C^2:

a) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

b) $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^4}$.

Exercício 7 (ELJ 47)

Mostre que $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ não é diferenciável em $(0,0)$, mas $f \circ \gamma$ é diferenciável em $t=0$, qualquer que seja a curva $\gamma :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^2$, $\gamma(0) = 0$, derivável em $t = 0$.

Exercício 8 (ELJ 56)

Consideremos abaixo $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

a) Se Ω é convexo e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, para todo $(x,y) \in \Omega$. Mostre que $f(x,y) = g(x)$ em Ω.

b) Se $\Omega = \mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ em Ω, mostre que f é constante.

Exercício 9 (ELJ 57)

Consideremos abaixo $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,;\, x \geq 0\}$.

a) Mostre que se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaz $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ em Ω, então f é constante.

b) Encontre $f : \Omega \to \mathbb{R}$ com $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ em Ω, mas f não é independente de y.

Exercício 10 (ELJ 58)

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com $f(0) = 0$. Mostre que existem funções contínuas $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = \sum_{j=1}^n x_j g_j(x)$, $\forall x$. (Sugestão: $f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(tx))\,dt$).

Exercício 11 (ELJ 62)

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é linear.

Exercício 12 (ELJ 82)

Verifique se $x^3 + xy^2 + y^3 = 1$ pode ser dada localmente no ponto $(1,0)$ por $x = x(y)$. E por $y = y(x)$? Determine a reta tangente em $(1,0)$.

Exercício 13 (ELJ 83)

Pode $xye^{xz} - z\ln y = 0$ ser resolvida localmente no ponto $(0,1,0)$ como $z = z(x,y)$? E como $x = x(y,z)$? E como $y = y(x,z)$? Determine o plano tangente em $(0,1,0)$.

Exercício 14 (ELJ 85)

Encontre os quatro pontos onde $\nabla f = 0$ sendo $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$. Encontre os pontos da curva $f(x,y) = 0$, onde o teorema da função implícita não garante que ela possa ser resolvida unicamente por $y = y(x)$ nem por $x = x(y)$.

Exercício 15 (ELJ 87)

Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(z) = ze^{xy} + z^3\left(x^2+y^2\right) - 1$. Mostre que:

a) f é estritamente crescente e existe um único $z = z(x,y)$ tal que $f(z) = 0$.

b) A função $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ acima é de classe C^∞.

Exercício 16 (ELJ 92)

Mostre que $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dado por $M := \left\{(x, a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x^n + a_{n-1}x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0\right\}$ é uma hiperfície.

Exercício 17 (ELJ 93)

Seja $f : [0,2] \to]0,\infty[$ contínua tal que $\int_0^1 f dx = \int_1^2 f dx = 1$. Para cada $x \in [0,1]$, considere $g : [0,1] \to [0,2]$ definida implicitamente por $\int_x^{g(x)} f(t)dt = 1$. Prove que g está bem definida e é de classe C^1.

Exercício 18 (ELJ 97)

Determine o paralelepípedo de faces paralelas aos planos coordenados inscrito no elipsoide $x^2 + \frac{y^4}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ de maior volume possível.

Exercício 21 (ELJ 99)

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável não constante. Dado $\epsilon > 0$, mostre que existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|p\| = \epsilon$ e $p \parallel \nabla f(p)$, ou seja, $\nabla f(p)$ é um múltiplo de p.

Exercício 19 (ELJ 100)

Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear auto-adjunta.

a) Mostre que os extremos da função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \langle A(x), x\rangle$ condicionada à esfera S^{n-1} são autovetores de A e os valores extremos são os autovalores correspondentes.

b) Conclua que o valor máximo e o valor mínimo da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ são os autovalores da matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Exercício 20 (ELJ 103)

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 - 4\right)^2 + z^2 - 1$. Determine os valores de $c \in \mathbb{R}$ tais que $f^{-1}(c)$ é uma hiperfície de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 22 (ELJ 108)

Seja $0 \in \mathbb{R}$ um valor regular de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, em que f é uma função de classe C^1. Seja $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(a) = 0$ e $\gamma :]-1, 1[\to \mathbb{R}^3$ uma curva derivável com $\gamma(0) = a$ e $\gamma'(0)$ um vetor que não pertence ao espaço tangente a hiperfície $f^{-1}(0)$ no ponto a, $\gamma'(0) \notin T_a\left(f^{-1}(0)\right)$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $t \mapsto f \circ \gamma(t)$ não se anula e tem sinais distintos em $]-\delta, 0[$ e em $]0, \delta[$, respectivamente. Interprete geometricamente.