LISTA DE EXERCÍCIOS 2 CÁLCULO V - MAP 0217 - MAT 0311

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/EDO2

Os exercícios a seguir foram selecionados ou inspirados no livro do autor Elon Lages Lima: Espaços Métricos, Terceira Edição. (E.M.X.Y) indica exercício Y do capítulo X deste livro.

Exercício 1

Sejam (M, d) e $\left(N, \tilde{d}\right)$ espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Suponha que existam fechados F_1, ..., F_n em M tais que $M = F_1 \cup ... \cup F_n$ e tais que $f|_{F_j} : F_j \to N$ sejam funções contínuas.

i) Mostre que f é uma função contínua. (Dica use a caracterização de função contínua com inversos de fechados)

ii) Mostre que se, ao invés de um número finito de fechados, tivermos um número infinito, então não podemos concluir que a função f é contínua. (Dica: Lembre que $\{x\}$ é sempre um conjunto fechado)

Exercício 2 (E.M.2.2)

Sejam $f, g : M \to N$ funções contínuas no ponto $a \in M$. Se $f(a) \neq g(a)$, então existe uma bola aberta B de centro a tal que $f(B) \cap g(B) = \emptyset$. Em particular, $x \in B \implies f(x) \neq g(x)$.

Exercício 3 (E.M.2.3)

Sejam $f, g : M \to N$ funções contínuas. Dado $a \in M$, suponha que toda bola de centro a contenha um ponto x tal que $f(x) = g(x)$. Conclua que $f(a) = g(a)$. Use este fato para mostrar que se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e $f(x) = g(x)$ para todo x racional, então $f = g$.

Exercício 4

Encontre um exemplo de homeomorfismo entre dois espaços métricos $f : M \to N$ tal que f é uniformemente contínua, mas f^{-1} é contínua, mas não é uniformemente contínua. (Dica: Considere $f :]1, \infty[\to]1, \infty[$ dado por $f(t) = \sqrt{t}$)

Exercício 5 (E.M.2.17)

Dada $f : M \to N$, se existem constantes $c > 0$ e $\alpha > 0$ tais que f cumpre a "condição de Hölder" $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$, para quaisquer $x, y \in M$, então dizemos que f é hölderiana. Mostre que se f é hölderiana, então f é contínua. Mostre que se $f : I \to \mathbb{R}$ é hölderiana, em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $\alpha > 1$, então f é constante.

Exercício 6 (E.M.2.19)

Sejam dadas as funções $f : M \to \mathbb{R}$ e $g : M \to \mathbb{R}$. Defina $f \vee g : M \to \mathbb{R}$ e $f \wedge g : M \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{array}{c} (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \\ (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} \end{array},$$

para cada $x \in M$. Prove que se f e g são contínuas em um ponto $a \in M$, então $f \vee g : M \to \mathbb{R}$ e $f \wedge g : M \to \mathbb{R}$ também são contínuas em a. Conclua que se f e g são contínuas, então $f \vee g$ e $f \wedge g$ também são.

Exercício 7 (E.M.2.22)

Seja $M = A \cup B$, Se $f : M \to N$ é tal que $f|_A$ e $f|_B$ são contínuas, então f é contínua em cada ponto $a \in A \cap B$.

Exercício 7 (E.M.2.23)

Num espaço métrico M, sejam $F := B_r[a]$ e $G = (B_s(a))^c$, onde $0 < r < s$. Mostre que a função $f : M \to [0, 1]$ definida por

$$f(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, G)}$$

é contínua e, além disso, $f^{-1}(0) = F$ e $f^{-1}(1) = G$.

Exercício 8 (E.M.2.28)

Sejam $fM \to N$ contínua e $Y \subset N$ não vazio. Se $a \in M$ é tal que $d(f(a), Y) > 0$, então existe uma bola $B_r(a)$ tal que $x \in B_r(a)$ implica que $d(f(x), Y) > 0$.

Exercício 9 (E.M.4.2)

Seja $\varphi : M \to N$ um homeomorfismo local. Dado o espaço métrico X, sejam $f, g : X \to M$ contínuas tais que $\varphi \circ f = \varphi \circ g$. Mostre que se X for conexo, então $f = g$ ou então $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in X$.

Exercício 10 (E.M.4.11)

Prove que um espaço métrico (M, d) é conexo se, e somente se, toda função contínua $f : M \to \{0, 1\}$ é contante. Use isto para demonstrar (novamente) que:

1) O fecho de um subconjunto conexo $S \subset M$ também é conexo.

2) Se $(X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ são subconjuntos conexos de M com um ponto em comum, então $\cup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ também é um conjunto conexo.

Exercício 11 (E.M.4.12)

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $c \in \mathbb{R}$ é um número estritamente compreendido entre o máximo e o mínimo de f em M, então $f^{-1}(c)^c$ é desconexo.

Exercício 12 (E.M.4.15)

Para toda função contínua $f : S^1 \to \mathbb{R}$, prove que existe um ponto $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Exercício 13 (E.M.4.17)

Prove que, no círculo S^1, o complementar de um conjunto conexo ainda é conexo.

Exercício 14

Seja (M, d) um espaço métrico. Seja $A \subset M$ um subconjunto de M.

i) Prove que a função $g : M \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d(x, A)$ é contínua.

ii) Use item i) para mostrar que se $F \subset M$ é fechado e $K \subset M$ é compacto, então $d(K, F) > 0$.

Exercício 15 (E.M.6.5)

Dada $f : [0\infty[\to \mathbb{R}$. Suponha que exista $a > 0$ tal que $f|_{[0,a]}$ e $f|_{[a,\infty[}$ sejam uniformemente contínuas. Prove que f é uniformemente contínua.

Exercício 16 (E.M.6.6)

Seja $X \subset M$ um conjunto denso e $f : M \to N$ uma função contínua. Se $f|_X$ é uma função uniformemente contínua, então f é uniformemente contínua.

Exercício 17 (E.M.6.11)

Mostre que um polinômio não nulo $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função uniformemente contínua se, e somente se, tem grau ≤ 1.

Exercício 18 (E.M.8.2)

Sejam $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, onde K é compacto e U é aberto. Prove que existe $\epsilon > 0$ tal que se $x \in K$, $y \in U$ e $\|x - y\| < \epsilon$, então $\{x + t(y - x) ; t \in [0, 1]\} \subset U$.

Exercício 19 (E.M.8.3)

Sejam $K \subset V \subset M$, onde K é compacto e V é um aberto contido em M. Prove que existe $r > 0$ tal que $\cup_{x \in K} B_r(x) \subset V$.

Exercício 20 (E.M.8.10)

Sejam $K = \cap_{\lambda \in L} K_\lambda$ a intersecção de uma família de compactos no espaço métrico M e U um aberto que contém K. Prove que existem $\lambda_1, ..., \lambda_n \in L$ tais que $K_{\lambda_1} \cap ... \cap K_{\lambda_n} \subset U$. Se a família $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ for uma cadeia (para todo

$\lambda, \mu \in L$, temos $K_\lambda \subset K_\mu$ ou $K_\mu \subset K_\lambda$), então $K \subset U$ implica que $K_\lambda \subset U$ para algum λ. Se $K_1 \supset K_2 \supset ...$ e $\cap_{n=1}^{\infty} K_n \subset U$, então existe n_0 tal que $n > n_0$ implica que $K_n \subset U$.

Exercício 21

Seja (M, d) um espaço métrico e $K \subset M$ um conjunto compacto. Mostre que existem $x, y \in K$ tais que

$$d(x, y) = \operatorname{diam}(K) = \sup\{d(x_1, x_2); x_1, x_2 \in K\}.$$

Exercício 22

Mostre que:

1) $\mathbb{R}$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ (Dica: Tire um ponto de $\mathbb{R}$ e use conexidade)

2) $S^2 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

3) S^1 não é homeomorfo a S^2. (Dica: Tire dois pontos de S^1 e use conexidade)

Exercício 23

Resolva os exercícios do capítulo 1 (Topologia do Espaço Euclidiano) do livro Análise Real Volume 2 do Elon Lages Lima. A sexta edição tem as resoluções. (Alguns precisam de resultados sobre sequências que serão dados nas próximas aulas)