LISTA DE EXERCÍCIOS 1 CÁLCULO V - MAP 0217 - MAT 0311

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/EDO2

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do autor Elon Lages Lima: Espaços Métricos, Terceira Edição. (E.M.X.Y) indica exercício Y do capítulo X deste livro.

Exercício 1 (E.M.1.1)
Seja $d : M \times M \to [0, \infty[$ uma função tal que
a) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
b) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$
Prove que d é uma métrica.

Exercício 2 (E.M.1.2)
Mostre que $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty[$ definida por $d(x, y) = (x - y)^2$ não é uma métrica.

Exercício 3 (E.M.1.4)
Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que $d_1 : M \times M \to [0, \infty[$, $d_2 : M \times M \to [0, \infty[$ e $d_3 : M \times M \to [0, \infty[$ são métricas de M, em que

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$
$$d_2(x, y) = \sqrt{d(x, y)},$$
$$d_3(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}.$$

Exercício 4 (E.M.1.6)
Seja E um espaço vetorial real e $d : E \times E \to [0, \infty[$ uma métrica de E. Mostre que existe uma norma $\|.\| : E \to [0, \infty[$ tal que $d(x, y) = \|x - y\|$ se, e somente se, $d(x + a, y + a) = d(x, y)$, para todo a, x e y em E e $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, x e y em E.

Exercício 5 (E.M.1.12)
Mostre que em todo espaço métrico M temos

$$B_R[x] = \cap_{n=1}^{\infty} B_{R+\frac{1}{n}}[x] = \cap_{s>R} B_s[x],$$
$$\{x\} = \cap_{r>0} B_r(x) = \cap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(x).$$

Analogamente, exprima cada bola aberta de M como união de bolas fechadas de M.
Lembremos que $B_R[x] := \{y \in M;\, d(y, x) \leq R\}$ e $B_R(x) := \{y \in M;\, d(y, x) < R\}$

Exercício 6 (E.M.1.17)
Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que se $y \notin B_R[x]$, então existe $s > 0$ tal que $B_R[x] \cap B_s[y] = \emptyset$.

Exercício 7 (E.M.1.29)
Seja $F := B_r(x)^c$ o complementar de uma bola aberta em um espaço métrico (M, d), em que $x \in M$ e $r > 0$. Mostre que se $d(x, F) = 0$, então $x \in F$.

Exercício 8 (E.M.3.1)
Mostre que a fronteira de um conjunto aberto tem interior vazio. Reciprocamente, todo subconjunto fechado $X \subset M$ com interior vazio é fronteira de algum aberto em M.

Exercício 9 (E.M.3.6)
Seja E um espaço vetorial normado. Se $X \subset E$ é convexo, então $\text{int}(X)$ é convexo.

Observação: Dizemos que um subconjunto X de um espaço vetorial é convexo se para todo x, $y \in X$ e $t \in [0,1]$, temos $tx + (1-t)\,y \in X$.

Exercício 10 (E.M.3.16)
Mostre que não é verdade que $X \subset Y$ implica que $\partial X \subset \partial Y$. Entretanto, mostre que $\partial\,(\mathrm{int}\,(X)) \subset \partial X$.

Exercício 11 (E.M.3.34)
Seja (M,d) um espaço métrico e $X, Y \subset M$. Mostre que $\mathrm{int}\,(X \cap Y) = \mathrm{int}\,(X) \cap \mathrm{int}\,(Y)$ e que $\mathrm{int}\,(X \cup Y) \supset \mathrm{int}\,(X) \cup \mathrm{int}\,(Y)$. Dê um exemplo mostrando que $\mathrm{int}\,(X \cup Y) = \mathrm{int}\,(X) \cup \mathrm{int}\,(Y)$ não vale em geral.

Exercício 12 (E.M.3.43)
Seja (M,d) um espaço métrico e $X, Y \subset M$. Mostre que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e que $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê um exemplo mostrando que $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ não vale em geral.

Exercício 13 (E.M.3.55)
Seja (M,d) um espaço métrico e $A \subset M$ um conjunto aberto. Se $X \subset M$ é um conjunto denso em M, então $X \cap A$ é um conjunto denso em A.

Exercício 14 (E.M.3.57)
Seja (M,d) um espaço métrico. Prove que $A \subset M$ é um conjunto aberto se, e somente se, $A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X}$ para todo $X \subset M$.

Exercício 15 (E.M.3.58)
Dê um exemplo na reta em que A seja aberto e os três conjuntos $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ e $\overline{A \cap B}$ sejam distintos.

Exercício 16 (E.M.4.1)
Seja (M,d) um espaço métrico. Sejam X, $Y \subset M$ tais que $M = X \cup Y$ e $X \cap Y = \emptyset$. Mostre que $M = X \cup Y$ é uma cisão se, e somente se, $X \cap \overline{Y} = \overline{X} \cap Y = \emptyset$, ou seja, se $x \in X$, então $d\,(x, Y) > 0$ e se $y \in Y$, então $d\,(y, X) > 0$.

Exercício 17 (E.M.4.5)
Seja (M,d) um espaço métrico. Sejam X, $Y \subset M$ conjuntos conexos. Se $\partial X \subset Y$, então $X \cup Y$ é conexo.

Exercício 18 (E.M.4.10)
Seja (M,d) um espaço métrico, x e $y \in M$. Suponha que exista um subconjunto aberto e fechado em M tal que $x \in X$ e $y \in X^c$. Mostre que nenhum subconjunto conexo de M pode conter x e y simultaneamente.

Exercício 19 (E.M.4.39)
Um espaço métrico diz-se localmente conexo quando, para todo $x \in M$ e todo aberto $U \ni x$, existe um aberto conexo V, tal que $x \in V \subset U$. Prove que M é localmente conexo se, e somente se, para todo aberto $A \subset M$, as componentes conexas de A são subconjuntos abertos.

Exercício 20 (E.M.4.43)
Seja (M,d) um espaço métrico desconexo e localmente conexo. Se A, B são conexos, disjuntos, não vazios e tais que $M = A \cup B$, então A e B são abertos em M.