MAP0217 – CÁLCULO DIFERENCIAL
MAT0311 – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL V

Exercícios da terceira quinzena

☞ **Soluções** ☜

Problema 1

item i)

Dado (M,d) espaço métrico compacto, definimos em $C(M,\mathbb{R})$ a função $\|\cdot\| : C(M,\mathbb{R}) \to [0,+\infty[$ por

$$\|f\| = \sup_{x\in M} |f(x)| \ .$$

Note que de fato $\|f\| < +\infty$ para toda $f \in C(M,\mathbb{R})$, pois M é compacto. Além disso, vale que:

$$\forall\, x \in M\ ,\ 0 \le |f(x)| \le \|f\| \ . \tag{1}$$

A fim de provar que $\|\cdot\|$ é uma norma em $C(M,\mathbb{R})$, é preciso mostrar as propriedades:

N 1 (5 pontos)**.** $\|f\| = 0 \Rightarrow f \equiv 0$

Demonstração. Seja $f \in C(M,\mathbb{R})$ com $\|f\| = 0$. Por (1),

$$\forall\, x \in M\ ,\ 0 \le |f(x)| \le \|f\| = 0.$$

Assim, $|f(x)| = 0\, \forall\, x \in M$ e, portanto, $f(x) = 0\, \forall\, x \in M$. □

N 2 (10 pontos)**.** Para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in C(M,\mathbb{R})$, $\|\lambda f\| = |\lambda|\, \|f\|$

Demonstração. Temos que:

$$\|\lambda f\| = \sup_{x\in M} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in M} |\lambda|\, |f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in M} |f(x)| = |\lambda|\, \|f\| \ ,$$

pois sabemos de Análise na Reta que se $\alpha \ge 0$, $\sup \alpha A = \alpha \sup A$. □

N 3 (15 pontos)**.** Para todas $f,g \in C(M,\mathbb{R})$, $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$.

Demonstração. Para todo $x \in M$ vale que $|(f+g)(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$. Assim, (1) implica que:

$$\forall\, x \in M\ ,\ |(f+g)(x)| \le \|f\| + \|g\| \ , \tag{2}$$

e a cota superior do lado direito não depende de x. Portanto,

$$\|f+g\| = \sup_{x\in M} |(f+g)(x)| \le \|f\| + \|g\| \ .$$

□

item ii) (15 pontos)

Seja $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C(M,\mathbb{R})$. Veja que, para cada $x \in M$ fixado, $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. De fato, por hipótese, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \big\| f_n - f_m \big\| < \varepsilon \,. \tag{3}$$

Mas, por (1), isto implica:

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \big| f_n(x) - f_m(x) \big| < \varepsilon \,. \tag{4}$$

Assim, como $\mathbb{R}$ é completo, para cada $x \in M$ existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Defina $f : M \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \,.$$

Então, f automaticamente satisfaz à condição pedida.

item iii) (35 pontos)

Seja $a \in M$. Vamos ver que:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,,\, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \big| f(x) - f(a) \big| \leq \varepsilon \text{ sempre que } d(x,a) < \delta \,,$$

provando que f é contínua em a. Seja, então, $\varepsilon > 0$. Como $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $C(M,\mathbb{R})$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\big\| f_n - f_m \big\| < \varepsilon/3$ quando $m, n \geq n_0$. Em particular, se $m > n_0$:

$$\begin{aligned}
\big| f_m(x) - f_m(a) \big| &\leq \big| f_m(x) - f_{n_0}(x) \big| + \big| f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a) \big| + \big| f_{n_0}(a) - f_m(a) \big| \\
&\leq \big\| f_m - f_{n_0} \big\| + \big| f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a) \big| + \big\| f_{n_0} - f_m \big\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \big| f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a) \big| + \frac{\varepsilon}{3} \,.
\end{aligned}$$

Agora, como $f_{n_0} \in C(M,\mathbb{R})$, f_{n_0} é contínua no ponto a. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que $\big| f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a) \big| < \varepsilon$ sempre que $d(x,a) < \delta$. Assim, se $d(x,a) < \delta$ as desigualdades acima implicam:

$$\big| f_m(x) - f_m(a) \big| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Mas $m > n_0$ era arbitrário e o lado direito da desigualdade não depende de m. Portanto, podemos tomar o limite $m \to \infty$, obtendo $\big| f(x) - f(a) \big| \leq \varepsilon$ sempre que $d(x,a) < \delta$. Como o ponto $a \in M$ era arbitrário, f é contínua em M, isto é, $f \in C(M,\mathbb{R})$.

item iv) (20 pontos)

É preciso mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\big\| f_n - f \big\| \leq \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Como $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $C(M,\mathbb{R})$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\big\| f_n - f_m \big\| < \varepsilon$ quando $m, n \geq n_0$. Assim, por (1), se $m, n \geq n_0$:

$$\forall\, x \in M \,,\; \big| f_m(x) - f_n(x) \big| < \varepsilon.$$

Como o lado direito da desigualdade não depende de m, podemos tomar o limite $m \to \infty$, obtendo:

$$\forall\, x \in M \,,\; \big| f(x) - f_n(x) \big| \leq \varepsilon.$$

Agora, como o lado direito da desigualdade não depende de x, concluímos que, se $n \geq n_0$:

$$\big\| f_n - f \big\| = \sup_{x\in M} \big| f(x) - f_n(x) \big| \leq \varepsilon \,.$$

Ou seja, de fato $f_n \to f$ em $C(M,\mathbb{R})$. Logo toda sequência de Cauchy em $C(M,\mathbb{R})$ tem limite em $C(M,\mathbb{R})$ e, portanto, $C(M,\mathbb{R})$ é completo.

Problema 2

item i) (25 pontos)

Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma cobertura aberta de K, isto é, $K \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ e cada U_α é aberto. Então, existe α_0 tal que $x \in U_{\alpha_0}$. Mas $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Logo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_{\alpha_0}$ para todo $n > N$. Além disso, para cada $n \in \{1, \ldots, N\}$ existe α_n tal que $x_n \in U_{\alpha_n}$. Logo,

$$K \subseteq \bigcup_{n=0}^{N} U_{\alpha_n} .$$

Como $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ era arbitrária, concluímos que toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita e, portanto, K é compacto.

item ii) (25 pontos)

Há duas implicações a provar:

($\Rightarrow$)

Suponha que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, isto é, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não tem subsequência convergente, e seja K um conjunto compacto qualquer. Assuma que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\}$ é infinito, digamos

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\} = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_m < \ldots\} .$$

Então, $\left(x_{n_m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ define uma sequência em K. Pela compacidade de K, tal sequência tem uma subsequência convergente. Mas esta subsequência seria, também, subsequência convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, contradizendo a hipótese. Portanto, $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\}$ precisa ser finito.

($\Leftarrow$)

É preciso mostrar que se para todo $K \subseteq M$ compacto o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\}$ é finito, então $x_n \to \infty$. Equivalentemente, vamos ver que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem alguma subsequência convergente, então existe um compacto $K \subseteq M$ tal que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\}$ é infinito. Suponha, então, que $\left(x_{n_m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\lim_{m\to\infty} x_{n_m} = x$ para algum $x \in M$. Tome $K = \left\{x_{n_m} : m \in \mathbb{N}\right\} \cup \{x\}$. Pelo item i), K é compacto. Além disso,

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\} = \{n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots\}$$

é infinito, por definição de K. Isso mostra o desejado.

item iii)

Há duas implicações a provar:

I $\Rightarrow$ II) (25 pontos)

Sejam $K \subseteq N$ compacto e $L = f^{-1}(K) \subseteq M$. É preciso mostrar que L é compacto. Tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em L. Então, $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em K. Mas, como K é compacto, $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente. Segue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também tem subsequência convergente. De fato, se não fosse assim, por I) valeria que $f(x_n) \to \infty$, uma contradição.

Em resumo, concluímos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente, digamos $\left(x_{n_m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ com $\lim_{m\to\infty} x_{n_m} = x \in M$. Agora, como f é contínua e K é fechado (pois é compacto), L é fechado. Portanto, $x \in L$, pois é limite de uma sequência de elementos de L. Isso mostra que toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em L tem uma subsequência convergente a um elemento de L. Ou seja, L é compacto.

II $\Rightarrow$ I) (25 pontos)

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em M tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. É preciso mostrar que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. Seja $K \subseteq N$ compacto, arbitrário. Veja que o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\}$ é finito. De fato,

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\} = \left\{n \in \mathbb{N} : x_n \in f^{-1}(K)\right\} .$$

Mas, por hipótese, $f^{-1}(K)$ é compacto. Logo, o conjunto da direita é finito, pelo item ii). Segue que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\}$ também é finito. Assim, novamente pelo item ii), concluímos que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Problema 3

item i) (20 pontos)

É suficiente considerar o caso de dois subespaços, e o caso geral segue por indução. Sejam, então, $M_1, M_2 \subseteq N$ completos e $M = M_1 \cup M_2$. Tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de Cauchy em M e defina:

$$J_1 = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in M_1\}$$
$$J_2 = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in M_2\} .$$

Ao menos um dentre J_1, J_2 é infinito. Suponha, sem perda de generalidade, que seja J_1. Então $(x_n)_{n\in J_1}$ é sequência de Cauchy em M_1, pois é subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mas M_1 é completo. Logo, existe $\lim_{n\in J_1} x_n := x \in M_1$. Agora, lembre que se uma sequência de Cauchy tem uma subsequência convergente, é ela mesma convergente. Assim, existe $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M$. Portanto, M é completo.

item ii) (15 pontos)

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em M. Então, para todo $\alpha \in \Lambda$, $x_n \in M_\alpha$. Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em M_α para todo $\alpha \in \Lambda$. Como cada M_α é completo, para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $x_\alpha := \lim_{n\to\infty} x_n \in M_\alpha$. Pela unicidade do limite, existe um único $x \in M$ tal que $x = x_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Em particular, $x \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha = M$. Logo, M é completo.

item iii) (20 pontos)

Seja $x \in \overline{F}$. Então, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em F com $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, em particular é de Cauchy. Logo, pela completude de F, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a um elemento de F. Pela unicidade do limite, $x \in F$. Portanto, $\overline{F} \subseteq F$ e F é fechado.

item iv) (45 pontos)

Seja $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de Cauchy em $f(N) \subseteq P$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $x_n \in N$ tal que $f(x_n) = y_n$. Então, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em N. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d'(y_n, y_m) < C\varepsilon$ para todos $m, n \geq n_0$. Assim, se $m, n \geq n_0$:

$$d(x_n, x_m) \leq C^{-1} d'\left(f(x_n), f(x_m)\right) = C^{-1} d'\left(y_n, y_m\right) < \varepsilon \, .$$

Agora, como N é completo, existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Seja $y = f(x) \in f(N)$. A continuidade de f implica que $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Assim, concluímos que toda sequência de Cauchy em $f(N)$ é convergente a um elemento de $f(N)$. Portanto, $f(N)$ é subespaço completo de P. Para concluir, temos:

$$\begin{aligned} F \subseteq N \text{ fechado} \;&\Rightarrow\; F \text{ completo em } N \\ &\Rightarrow\; f(F) \text{ completo em } f(N) \\ &\Rightarrow\; f(F) \text{ fechado em } f(N) \\ &\Rightarrow\; f(F) \text{ fechado em } P \text{ (pois } f(N) \text{ é um fechado de } P). \end{aligned}$$