$\boxed{\text{EXERCÍCIOS DA SEGUNDA QUINZENA}}$

Problema 1.

i) $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ normados, $T: E \to F$ linear.

$\Rightarrow$ | Suponho T contínua $\Rightarrow$ em particular, T é contínua em $a = 0 \in E$, com $Ta = 0$.

Portanto:

"Dado $\varepsilon = 1$ $\exists\ \delta > 0$ t.q.:

$$\underbrace{\|x - a\|_E}_{= \|x\|} < \delta \Rightarrow \underbrace{\|Tx - Ta\|_F}_{= \|Tx\|_F} < \varepsilon \text{ ."}$$

(*) Definição de função contínua no pto. a

Agora, seja $x \in E \setminus \{0\}$, qualquer. Então, $y \overset{\text{def}}{=} \frac{\delta}{2\|x\|} x \in E$ satisfaz: $\|y\|_E = \frac{\delta}{2} < \delta$. Logo, por (*), $\|Ty\|_F < \varepsilon$. Mas:

$$\|Ty\|_F = \frac{\delta}{2\|x\|} \|Tx\|_F < \varepsilon \Rightarrow \|Tx\|_F < \frac{2\varepsilon}{\delta} \|x\| = \frac{2}{\delta} \|x\|.$$

Logo, tomando $C = \frac{2}{\delta} > 0$, temos:

$$\boxed{\|Tx\|_F \leq C \|x\|_E \ \forall x \in E}$$

(o caso $x = 0$ é imediato).

$\Leftarrow$ | Note que, como T é linear:

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|_F &= \|T(x-y)\|_F \\ &\underset{\text{hipótese}}{\leq} C \|x - y\|_E . \end{aligned}$$

Logo, T é Lipschtiziana e, portanto, contínua.

ii) Claro que $B(E,F)$ é espaço vetorial. Vejamos que $\|T\|_{B(E,F)}$ é de fato uma norma:

N1) Se $T \neq 0 \Rightarrow \|T\|_{B(E,F)} \neq 0$

Prova: Suponha $\|T\|_{B(E,F)} = 0$. Então; $\forall\, y \in E$ com $\|y\|_E = 1$:

$$0 \leq \|Ty\|_F \leq \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\| \overset{def}{=} \|T\|_{B(E,F)} = 0.$$

Conclusão: $\|Ty\|_F = 0$. Agora, seja $x \in E$. Se $x = 0$, $Tx = 0$. Se $x \neq 0$, $y \overset{def}{=} \frac{x}{\|x\|_E}$ satisfaz $\|y\|_E = 1$, d'onde:

$$0 \leq \|Tx\|_F = \|x\|_E \|Ty\|_F = 0.$$

Portanto, $\|Tx\|_F = 0\ \forall\, x \in E$. Assim, $T \equiv 0$. //

N2) $\|\lambda T\|_{B(E,F)} = |\lambda|\, \|T\|_{B(E,F)}$

Prova: $$\|\lambda T\|_{B(E,F)} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|(\lambda T)(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} |\lambda|\, \|Tx\|_F \underset{\substack{|\lambda| \geq 0 \\ \text{prop. do sup}}}{=} |\lambda| \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F = |\lambda|\, \|T\|_{B(E,F)}$$ //

N3) $\|S + T\|_{B(E,F)} \leq \|S\|_{B(E,F)} + \|T\|_{B(E,F)}$

Prova: $\forall\, x \in E$ com $\|x\|_E = 1$:

$$\|(S+T)x\|_F = \|Sx + Tx\|_F \leq \underbrace{\|Sx\|_F}_{\leq \sup_{\|y\|=1} \|Sy\|} + \underbrace{\|Tx\|_F}_{\leq \sup_{\|y\|=1} \|Ty\|} \leq \|S\|_{B(E,F)} + \|T\|_{B(E,F)}$$

como x era arbitrário e o lado direito ñ depende de x, temos:

$$\|S + T\|_{B(E,F)} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|(S+T)x\|_F \leq \|S\|_{B(E,F)} + \|T\|_{B(E,F)}. \ //$$

Obs: Por i), $\|\cdot\|_{B(E,F)}$ é finita, embora isto não entre em momento algum das demonstrações acima.

iii) Vamos lembrar que:

"d e $\tilde{d}$ são equivalentes $\Rightarrow Id: (E,d) \to (\tilde{E},\tilde{d})$ isomorfismo."

Note agora que Id é linear e $Id^{-1} = Id$. Logo:

① $Id: (E,d) \to (\tilde{E},\tilde{d})$ contínua $\overset{i)}{\Longrightarrow} \exists\, c>0$ t.q. $\|Id(x)\|_{\tilde{E}} \leqslant c\|x\|_E$.

Tome $c_1 = \frac{1}{c}$. Então: $c_1 \underbrace{\|Id(x)\|_{\tilde{E}}}_{=\|x\|_{\tilde{E}}} \leqslant \|x\|_E$.

② $Id: (\tilde{E},\tilde{d}) \to (E,d)$ contínua $\overset{i)}{\Longrightarrow} \exists\, c_2>0$ t.q. $\underbrace{\|Id(x)\|_E}_{\|x\|_E} \leqslant c_2\|x\|_{\tilde{E}}$.

Juntando ① e ② obtemos constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que:

$$\boxed{c_1\|x\|_{\tilde{E}} \leqslant \|x\|_E \leqslant c_2\|x\|_{\tilde{E}}}$$

iv) $T: E \to F$

$f \mapsto T[f]: [0,1] \to \mathbb{R}$

$T[f](t) = \frac{df}{dt}(t)$

Vou mostrar que T satisfaz à condição em i):

$$\|T[f]\|_F = \left\|\frac{df}{dt}\right\|_F = \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{df}{dt}(t)\right|.$$

$$\forall\, t\in[0,1],\quad \left|\frac{df}{dt}(t)\right| \leqslant \left|\frac{df}{dt}(t)\right| + |f(t)| \leqslant \|f\|_E \Rightarrow \sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{df}{dt}(t)\right| = \|T[f]\|_F \leqslant \|f\|_E$$

com $C=1$.

<u>Obs</u>. Seria legal, mas não obrigatório, verificar que $\|\cdot\|_E$ tb. é norma.

Problema 2.

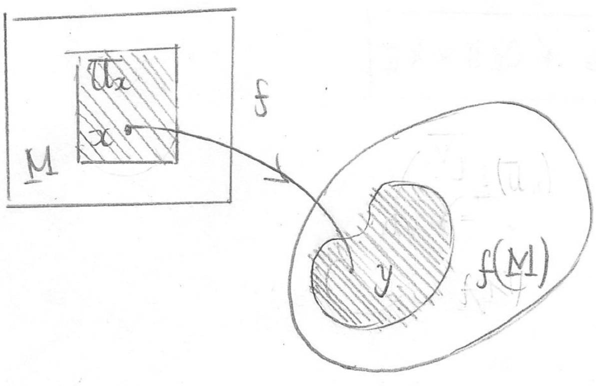
i) (M,d) localmente cpto. significa:

"$\forall x \in M \ \exists U_x$ aberto t.q: $x \in U_x$ e $\overline{U_x}$ é cpto." $(*)$

Sejam (M,d) localmente cpto. e $f: (M,d) \xrightarrow{\text{contínua}} (N,\tilde{d})$ aberta, i.e

"$U \subseteq M$ aberto $\Rightarrow f(U) \subseteq N$ aberto"

Quero provar que dado $y \in f(M)$ existe V_y aberto de $f(M)$ t.q. $y \in V_y$ e $\overline{V_y}$ cpto. em $f(M) \subseteq N$.



Dado $y \in f(M)$, seja $x \in M$ t.q. $f(x) = y$.

Tome U_x como em $(*)$. Então:

① $V_y \overset{\text{def}}{=} f(U_x) \subseteq f(M)$ é aberto de N, pois f é aberta,

② $f(\overline{U_x}) \subseteq f(M)$ é cpto. de N, pois f é contínua.

Afirmo que $\overline{V_y}$ é cpto. em N. De fato:

$$U_x \subseteq \overline{U_x} \Rightarrow f(U_x) \subseteq \underbrace{f(\overline{U_x})}_{\text{cpto.} \Rightarrow \text{fechado}} \Rightarrow \underbrace{\overline{f(U_x)}}_{\overline{V_y}} \subseteq f(\overline{U_x})$$

fechado em cpto. $\Rightarrow$ cpto.

Agora, como $\overline{V_y} \subseteq f(M)$, $\overline{V_y}$ é cpto. de $f(M)$. Isso conclui o desejado.

ii) Suponha que $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ seja localmente conexo.

Fixe $q \in \mathbb{Q}$. Então, $\exists V_q \subseteq \mathbb{Q}$ vizinhança aberta de q t.q. $\overline{V_q}$ é cpto. Existe um intervalo aberto I_q t.q. $q \in I_q \subseteq V_q$. Logo, $\overline{I_q}$ é cpto. Mas nenhum intervalo de $\mathbb{Q}$ pode ser cpto., pois não é completo.

iii) Seja (M,d) um espaço localmente uniformemente compacto. Preciso provar que (M,d) é localmente compacto. Ou seja, dado $x \in M$ $\exists$ $U_x \subseteq M$ aberto com $x \in U_x$ e $\overline{U_x}$ compacto.

Seja $x \in M$. Como M é aberto, $\exists$ $R>0$ t.q. $x \in B_R(x) \subseteq M$. Defino $U_x = B_R(x)$. Sabemos que $\underbrace{\overline{U_x}}_{\text{fechado}} \subseteq \underbrace{B_R[x]}_{\text{cpto.}} \Longrightarrow \overline{U_x}$ cpto.

Isso prova que (M,d) é localmente cpto.

Agora, um exemplo de espaço localmente cpto. que não é localmente uniformemente cpto.

Lema: "Seja (M,d) munido da métrica discreta $d(x,y) = \delta_{xy}$ $\forall x,y \in M$. Então, $K \subseteq M$ é cpto. $\Leftrightarrow$ K é finito."

Prova:

$\Rightarrow)$ Suponha que K é infinito. Então existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ t.q. $x_n \neq x_m$ $\forall n \neq m$. Logo, $\forall m,n \in \mathbb{N}$:

$$d(x_n, x_m) = 1.$$

Em particular, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não pode ter subsequência de Cauchy e, portanto, não pode ter subsequência convergente.

$\Leftarrow)$ óbvio. //

Agora, seja M conjunto infinito, e d a métrica discreta

▷ (M,d) é localmente cpto:

de fato, dado $x \in M$, tomo $U_x = \{x\}$.

▷ (M,d) ñ é uniformemente cpto:

de fato, $B_1[x] = M$ não é cpto., pois é infinito.

iv) F será um espaço localmente compacto se:

"$\forall x \in F\ \exists\ U_x$ aberto de F t.q. $\overline{U_x}^F$ é cpto. em F",

onde $\overline{}^F$ denota o fecho em F.

Dado $x \in F$, $x \in M$. Logo, existe $V_x \subseteq M$ aberto t.q. $x \in V_x$ e $\overline{V_x}$ é cpto. Tomo: $U_x = V_x \cap F$.

Então: ① $x \in U_x$

② U_x é aberto em F

Resta mostrar que $\overline{U_x}^F$ é cpto. Mas:

$$\overline{U_x}^F = \overline{U_x} \cap F = (\overline{V_x \cap F}) \cap F \subseteq (\overline{V_x} \cap \underbrace{\overline{F}}_{=F}) \cap F = \underbrace{\overline{V_x} \cap F}_{\text{cpto. em } F}$$

fechado em cpto. $\Rightarrow$ cpto.

Problema 3.

i) (M, d) localmente conexo significa:

"$\forall x \in M, \forall\ U_x \subseteq M$ aberto com $x \in U_x\ \exists\ V_x$ aberto conexo $x \in V_x \subseteq U_x$."

$\Rightarrow$) Seja C uma componente conexa de M localmente conexo. Vou provar que todo pto. $x \in C$ é pto. interior de C. Se (M, d) é localmente conexo, x tem uma vizinhança aberta conexa V_x. Mas C é a componente conexa de x, portanto contém todo conjunto conexo contendo x. Em particular, encontramos aberto V_x com:

$$\boxed{x \in V_x \subseteq C}$$

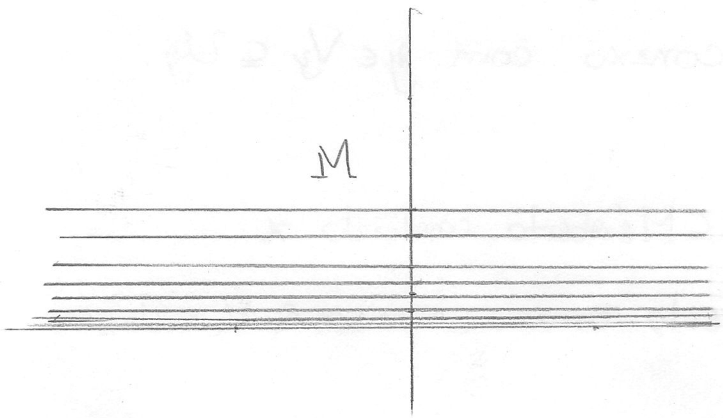
Como x era qualquer, C é aberto.

$\Leftarrow$) A recíproca é falsa em geral. P/ obter um contra-exemplo, é suficiente exibir um espaço conexo M que não seja localmente conexo. De fato, sendo M conexo, é sua única componente conexa, portanto aberta.

Seja:

$$M = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{R} \times \{\tfrac{1}{n}\} \right) \cup \left(\mathbb{R} \times \{0\} \right) \cup \left(\{0\} \times \mathbb{R} \right) \subseteq \mathbb{R}^2,$$

munido da métrica euclidiana induzida. Evidentemente, M é conexo, pois é conexo por poligonais.



Porém, M não é localmente conexo. De fato, todo ponto da forma $(x,0)$, possui uma vizinhança U que não contém nenhum aberto conexo contendo o ponto.

Mais especificamente, tome $U = B_r((x,0)) \cap M$, r qqer. Se $V \subseteq U$ é um aberto contendo $(x,0)$, existe $\varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon((x,0)) \cap M \subseteq V$. Seja $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Os pontos $(x, \frac{1}{n})$ e $(x, \frac{1}{n+1})$ pertencem a V. Agora, tome $q \in \mathbb{Q}$ t.q. $\frac{1}{n+1} < q < \frac{1}{n}$ e sejam:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > q\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < q\},$$

abertos de $\mathbb{R}^2$. Então $A = A \cap M$, $B = B \cap M$ são abertos de M, disjuntos. Temos:

$$\left(x, \tfrac{1}{n}\right) \in \underbrace{A \cap V}_{\substack{\text{aberto} \\ \text{em } V}} \neq \emptyset, \quad \left(x, \tfrac{1}{n+1}\right) \in \underbrace{B \cap V}_{\substack{\text{aberto} \\ \text{em } V}} \neq \emptyset.$$

Assim, $V = (A \cap V) \cup (B \cap V)$ determina uma cisão não-trivial de V.

A recíproca que de fato vale é:

"Para todo aberto $A \subseteq M$ as componentes conexas de A são subconjuntos abertos $\Rightarrow M$ é localmente conexo."

Neste caso, basta tomar como V_x a componente conexa de U_x contendo x.

ii) Note que como os únicos subconjuntos conexos do espaço métrico $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ são os subconjuntos unitários, que não são abertos neste espaço, $\mathbb{Q}$ não pode ser localmente conexo.

iii) Preciso provar que, dados $y \in f(M)$ e $\mathcal{U}_y \subseteq f(M)$ aberto contendo y, existe $V_y \subseteq f(M)$ aberto conexo com $y \in V_y \subseteq \mathcal{U}_y$.

Seja $x \in M$ t.q. $f(x) = y$.

f contínua $\Rightarrow \mathcal{U}_x \overset{def}{=} f^{-1}(\mathcal{U}_y) \subseteq M$ é aberto contendo x

$\underset{\substack{\uparrow \\ M \text{ localmente} \\ \text{conexo}}}{\Rightarrow} \exists\, V_x \subseteq M$ aberto conexo com $x \in V_x \subseteq \mathcal{U}_x$.

Seja $V_y = f(V_x)$. Temos:

① f aberta $\Rightarrow V_y \subseteq f(M)$ é aberto de $f(M)$.

② f contínua $\Rightarrow V_y$ é conexo de $f(M)$

Por ① e ② vemos que V_y satisfaz à condição desejada. Logo, $f(M) \subseteq N$ é localmente conexo.

iv) Seja (M, d) espaço métrico localmente conexo por caminhos. Ou seja, dados $x \in M$ e $\mathcal{U}_x \subseteq M$ um conjunto aberto, existe um conjunto aberto conexo por caminhos V_x t.q. $x \in V_x \subseteq \mathcal{U}_x$.

Fixado $x \in M$, defino:

$$\lambda_x = \{ y \in M : \exists \text{ caminho em } M \text{ ligando } x \text{ a } y \}.$$

<u>Lema 1.</u> $\lambda_x \subseteq M$ é um subconjunto aberto.

<u>Prova:</u>

Seja $y \in \lambda_x$. Então $\exists$ caminho em M ligando x a y. Como M é localmente conexo por caminhos, $\exists\, V_y$ um conjunto conexo por caminhos aberto, contendo y.

Assim, se $z \in V_y$, $\exists$ caminho ligando y a z. A concatenação destes caminhos é um caminho ligando x a z. Logo, $z \in A_x$. Como z era arbitrário, $V_y \subseteq A_x$. Isso mostra que y é pto interior de A_x, e A_x é aberto //

Lema 2. $A_x \subseteq M$ é um subconjunto fechado.

Prova:

Vou provar que A_x^c é aberto. Seja $y \in A_x^c$. Se y ñ for pto. interior de A_x^c, toda vizinhança aberta de y intercepta A_x. Em particular, se V_y é uma vizinhança aberta de y conexa por caminhos, $V_y \cap A_x \neq \phi$. Mas, neste caso, um raciocínio análogo ao utilizado na prova do Lema 1 mostra que $y \in A_x$, contradizendo $y \in A_x^c$. Logo, y é pto. interior de A_x^c, e A_x^c é aberto. //

Agora, sejam C uma componente conexa de M e $x \in C$. Pelos Lema 1 e 2 o conjunto:

$$A = A_x \cap C = \{y \in C : \exists \text{ caminho em } M \text{ ligando } x \text{ a } y\}$$

é aberto e fechado em C. Como C é conexa, ou $A = \phi$ ou $A = C$. Mas $x \in A$. Logo, $A = C$. Mas, se $y \in C$ e $\gamma : I \to M$ é caminho em M ligando x a y, temos:

① $x \in \gamma(I)$; ② $\gamma(I)$ é conexo.

Logo, $\gamma(I) \subseteq C$. Ou seja, γ é de fato um caminho em C. Segue que C é conexo por caminhos.