

Notas de Aula TMA 2020

Pedro Tavares Paes Lopes

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

As notas abaixo foram usadas no curso: MAP2313 - Tópicos de Matemática Aplicada no primeiro semestre de 2020. Elas correspondem ao que foi dado remotamente.

Nossa principal referência foi:

Folland, Gerald B. Fourier analysis and its applications. Vol. 4. American Mathematical Soc., 2009.

Antes dessa parte, abordamos os seguintes tópicos:

Exemplos de equações da física matemática: Poisson, calor, onda. Dedução da equação da onda (de uma corda unidimensional, usamos o livro do Djairo) e do calor (usamos o livro do Folland). Condições de contorno e condições iniciais.

Recordação da definição e das propriedades de transformações lineares em espaços vetoriais e algumas de suas propriedades (em particular, o princípio da superposição). Equação de Poisson e do calor vistas como transformações lineares em espaços vetoriais de funções. Introdução ao Método de Separação de Variáveis.

Mais um exemplo de separação de variáveis (equação de onda com condições de Dirichlet) e sistematização do Método de Separação de Variáveis. Série de Fourier real e complexa e suas relações.

Definição precisa de série e coeficientes de Fourier. Exemplo de cálculo de série. Desigualdade de Bessel.

Demonstração da convergência pontual das séries de Fourier de funções suaves por partes. Exemplos e relações interessantes obtidos através da série de Fourier: Uma série para o cálculo do número pi.

Integração e derivação de séries de Fourier.

Sumário

Capítulo 1. Aula do dia 25 de março	6
Comparação entre convergência pontual e uniforme	6
1.1. Séries	7
Capítulo 2. Aula do dia 27 de março	9
Série de Fourier em Intervalos $] -L, L]$ e $[0, L]$.	9
2.1. Funções $f :] -\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$.	9
2.2. Funções $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$.	9
2.3. Funções $f :] -L, L] \rightarrow \mathbb{C}$.	10
2.4. Funções $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$.	11
Aplicação à Equação do Calor.	12
Capítulo 3. Aula do dia 1 de abril	14
Equação da Onda	14
3.1. A dedução da equação de onda.	14
3.2. Condições de Dirichlet	15
3.3. Condições de Neumann	17
Capítulo 4. Aula do dia 3 de abril	19
Bases ortonormais e Série de Fourier	19
4.1. Revisão de álgebra linear	19
4.2. Voltando às séries de Fourier	21
Capítulo 5. Aula do dia 8 de abril	25
Convergência L^2 de séries de Fourier	25
5.1. Comparação entre tipos de convergência	27
5.2. A fórmula de Parseval.	28
5.3. Convergência em L^2 nos intervalos $[-L, L]$, $[0, L]$	30
Capítulo 6. Aula do dia 15 de abril	32
Equação do calor: Técnicas de resolução para equações não homogêneas	32
6.1. Exemplo 1 (Fontes de calor independentes do tempo)	32
6.2. Exemplo 2 (Fontes de calor dependentes do tempo)	33
Capítulo 7. Aula do dia 17 de abril	39
Equação da onda não homogênea e outras condições de contorno	39
7.1. Exemplo 3 (Exemplo de equação da onda não homogênea)	39
7.2. Outras condições de contorno	40
Capítulo 8. Aula do dia 22 de abril	44
Problema de Sturm-Liouville regular	44
8.1. Motivação	44
8.2. A equação diferencial	45
8.3. O Teorema principal	48
8.4. Aplicação	49
Capítulo 9. Aula do dia 24 de abril	51

Exemplos do Problema de Sturm-Liouville	51
9.1. Condições de contorno auto-adjuntas	51
9.2. Exemplos de autovalores e autovetores	53
9.3. Aplicação	55
Capítulo 10. Aula do dia 6 de maio	56
A equação do calor e da onda em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$	56
10.1. O método de separação de variáveis para dimensões maiores do que 1	56
10.2. O problema de autovalores em $\Omega =]0, L_1[\times]0, L_2[$	60
Capítulo 11. Aula do dia 8 de maio	62
A equação de Laplace	62
11.1. Segmento de reta	62
11.2. Retângulo	62
11.3. Bola	65
11.4. Apêndice: O laplaciano em coordenadas polares	67
Capítulo 12. Aula do dia 13 de maio	69
Mais um exemplo de equação de Laplace em coordenadas polares	69
Capítulo 13. Aula do dia 15 de maio	75
Funções de Bessel	75
13.1. A equação de onda na bola $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$	75
13.2. As funções de Bessel	76
13.3. Voltando à equação de onda	77
13.4. A equação do calor	79
Capítulo 14. Aula do dia 20 de maio	81
Transformada de Fourier	81
14.1. Motivação	81
14.2. Definição de Transformada de Fourier	82
14.3. Propriedades básicas	84
Capítulo 15. Aula do dia 22 de maio	87
Inversa da Transformada de Fourier e fórmula de Plancherel	87
15.1. Fórmula de inversão	87
15.2. Fórmula de Plancherel	89
15.3. Analogias entre a série e a transformada de Fourier	91
15.4. Apêndice (Para quem quiser um pouco mais de detalhes matemáticos)	91
Capítulo 16. Aula do dia 27 de maio	94
Convolução	94
16.1. Convolução e Transformada de Fourier	96
16.2. Aplicação	98
Capítulo 17. Aula do dia 3 de junho	99
A equação do calor em \mathbb{R}	99
17.1. Resolvendo a equação por transformada de Fourier	99
17.2. Algumas observações sobre a equação do calor	101
Capítulo 18. Aula do dia 5 de junho	104
A equação da onda em \mathbb{R} e de Laplace no semiplano	104
18.1. A equação da onda em \mathbb{R}	104
18.2. Equação de Laplace	106
Capítulo 19. Aula do dia 10 de junho	110
Transformada de Fourier seno e cosseno	110

Capítulo 20. Aula do dia 12 de junho	118
Funções de Green	118
Capítulo 21. Aula do dia 17 de junho	123
Funções de Green para problemas de valor de contorno de EDOs	123

Aula do dia 25 de março

A partir de agora vamos usar a seguinte notação.

A série de Fourier real é definida como a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta),$$

com os coeficientes a_n e b_n definidos nas aulas anteriores.

A série de Fourier complexa é definida como a série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta},$$

com os coeficientes c_n definidos nas aulas anteriores.

Vimos que se permitirmos coeficientes a_n , b_n e c_n complexos, ambas as séries são equivalentes.

Comparação entre convergência pontual e uniforme

DEFINIÇÃO 1. (Tipos de convergência) Seja S é um intervalo (finito ou infinito) de \mathbb{R} . Sejam $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções, $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que:

1) (f_n) converge pontualmente a f , se $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in S$.

Note que $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$

2) (f_n) converge uniformemente a f , se $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)|) = 0$ ¹

OBSERVAÇÃO 2. 1) Se (f_n) converge uniformemente a f , então converge pontualmente para f .

De fato, para $x \in S$, temos $0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)|$. Logo, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)|) = 0,$$

então $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

2) Poderíamos considerar funções com valores complexos também. A definição de convergência pontual e uniforme é igual a dada anteriormente.

3) Convergência pontual não implica convergência uniforme.

Seja $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^n$ e $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Logo para cada $x \in [0, 1]$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

No entanto, $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(y) - f(y)|$ para qualquer $y \in [0, 1]$ pela definição de sup. Mas $|f_n(y) - f(y)| = y^n$, se $y < 1$. Como y^n se aproxima cada vez mais de 1, quando $y \rightarrow 1$ (ou seja, $\lim_{y \rightarrow 1^-} y^n = 1$), concluímos que $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$. Assim, não temos convergência uniforme.

¹Para quem não conhece, *sup* indica supremo. É muito semelhante a o máximo. Para entender, consideremos I um subconjunto de \mathbb{R} (no caso acima $I = \{|f_n(x) - f(x)|; x \in S\}$). Se existe $x_0 \in I$ tal que $x \leq x_0$ para todo $x \in I$, então dizemos que x_0 é o máximo do conjunto I . Se existir um número real $C > 0$ tal que $x \leq C$ para todo $x \in I$, então dizemos que C é um limitante superior de I . O supremo é definido como o menor limitante superior de I . Se existe um máximo x_0 , então x_0 também é o supremo de I . Pode ocorrer de existir o supremo sem existir o máximo. Por exemplo, seja $I = [0, 1[$. Logo I tem um supremo, que é igual a 1. Mas I não tem um máximo. De fato, não existe $x_0 \in [0, 1[$ tal que $x \leq x_0$ para todo $x \in [0, 1[$ (este x_0 deveria ser igual a 1 que não pertence a $[0, 1[$).

Se tudo isso estiver muito confuso, pense no *sup* como sendo o máximo. Não é muito preciso, mas é semelhante.

1.1. Séries

Vamos agora entender a convergência pontual e uniforme de séries.

DEFINIÇÃO 3. Seja S é um intervalo (finito ou infinito) de \mathbb{R} . Sejam $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções $g_n : S \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que

1) A série $\sum_{j=1}^{\infty} g_j$ converge pontualmente a g se a sequência $\left(\sum_{j=1}^n g_j\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente a g , isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n g_j(x) = g(x)$ para todo $x \in S$.

2) A série $\sum_{j=1}^{\infty} g_j$ converge uniformemente a g se a sequência $\left(\sum_{j=1}^n g_j\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a g , isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in S} \left|\sum_{j=1}^n g_j(x) - g(x)\right|\right) = 0$.

3) A série $\sum_{j=1}^{\infty} g_j$ converge absolutamente em $x_0 \in S$ se $\sum_{j=1}^{\infty} |g_j(x_0)| < \infty$.

Podemos enunciar então o seguinte critério de convergência de séries.

PROPOSIÇÃO 4. Seja $\sum_{j=1}^{\infty} g_j$ uma série de funções $g_j : S \rightarrow \mathbb{R}$. Logo

1) Se para um certo $x_0 \in S$ a série converge absolutamente, então a série converge no ponto x_0 , isto é,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |g_j(x_0)| < \infty \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n g_j(x_0).$$

2) (Teste M de Weierstrass) Se existem constantes $M_j > 0$ tais que $|g_j(x)| \leq M_j$ para todo $x \in S$ e $\sum_{j=1}^{\infty} M_j < \infty$, então existe $g : S \rightarrow \mathbb{C}$ tal que a série $\sum_{j=1}^{\infty} g_j$ converge uniformemente a g .

OBSERVAÇÃO 5. Todos os resultados acima continuam valendo para séries do tipo $\sum_{j=0}^{\infty} g_j$ (começando por zero) e $\sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j$ (indo de $-\infty$ a ∞). A convergência neste último caso é definida pelo limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n g_j$. As definições e os resultados são os mesmos para funções com valores complexos.

Podemos provar agora o principal teorema.

TEOREMA 6. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, suave por partes e 2π -periódica. Logo a série de Fourier real e a série de Fourier complexa convergem uniformemente.

DEMONSTRAÇÃO. Basta aplicar o teste M de Weierstrass para essas séries.

Vamos começar com a série complexa. Neste caso, temos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n e^{in\theta}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|.$$

Assim, basta provar que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$.

Porém sabemos que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua e suave por partes, então f' é contínua por partes e seus coeficientes são $c'_n = inc_n$. Como f' é contínua por partes, sabemos pela desigualdade de Bessel que

$$(1.1.1) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |inc_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c'_n|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

Concluimos que para qualquer $N \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N |c_n| &= |c_0| + \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \left| \frac{1}{in} inc_n \right| = |c_0| + \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \left| \frac{1}{n} nc_n \right| \\ &\stackrel{(1)}{\leq} |c_0| + \left(\sum_{n=-N, n \neq 0}^N \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-N}^N |nc_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{(2)}{\leq} |c_0| + C \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Note que em (1) usamos a desigualdade de Cauchy Schwartz:²

$$\sum_{j=1}^M |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^M |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^M |b_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Na desigualdade (2), usamos que $\sum_{n=-N, n \neq 0}^N \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} < \infty$, já que $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty$, e também usamos a desigualdade 1.1.1. \square

Principais resultados e ideias dessa seção:

- 1) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função 2π -periódica suave por partes. Logo a série de Fourier converge pontualmente a $\frac{1}{2}(f(\theta^+) + f(\theta^-))$. Em particular, converge para $f(\theta)$ quando f é contínua em θ .
- 2) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função 2π -periódica suave por partes e contínua. Logo a série de Fourier converge uniformemente a f .

²Lembrando de álgebra linear que toda vez que temos um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ num espaço vetorial V , vale a desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}, \forall u, v \in V.$$

Se $V = \mathbb{R}^M$, $a = (a_1, \dots, a_M)$ e $b = (b_1, \dots, b_M)$ e o produto interno é $\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^M a_j b_j$, então

$$\left| \sum_{j=1}^M a_j b_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^M |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^M |b_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Escolhendo $a = (|a_1|, \dots, |a_M|)$ e $b = (|b_1|, \dots, |b_M|)$, obtemos a desigualdade que queremos para usar na demonstração.

Aula do dia 27 de março

Série de Fourier em Intervalos $] -L, L]$ e $[0, L]$.

Vamos agora entender como definir a série de Fourier em intervalos. Todas as funções abaixo serão consideradas como sendo suave por partes.

2.1. Funções $f :] -\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$.

Vamos inicialmente considerar funções $f :] -\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ suave por partes e tais que os limites

$$\lim_{\theta \rightarrow -\pi^-} f(\theta) \text{ e } \lim_{\theta \rightarrow -\pi^-} f'(\theta)$$

existem.

Para definir a série de Fourier deste tipo de funções, basta definir uma função 2π -periódica $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{f}|_{]-\pi, \pi]} = f$. Isto pode ser feito da seguinte forma. Definimos

$$\tilde{f}(\theta + 2n\pi) = f(\theta),$$

em que $\theta \in] -\pi, \pi]$ e $n \in \mathbb{Z}$. De fato, se $x \in \mathbb{R}$, então $x = 2\pi n + \theta$, em que $n \in \mathbb{Z}$ e $\theta \in] -\pi, \pi]$ são determinados de maneira única.

Calculando a série de Fourier de \tilde{f} , concluímos que $f = \tilde{f}|_{]-\pi, \pi]}$ e, portanto, as mesmas fórmulas valem para essa função. Assim temos:

AFIRMAÇÃO 7. A série de Fourier de uma função $f :] -\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \text{sen}(n\theta)),$$

em que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \text{sen}(n\theta) d\theta.$$

2.2. Funções $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$.

Neste caso, procedemos em duas etapas. Primeiro estendemos f a uma função $f_1 :] -\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$. Depois, usamos o resultado da seção 2.1 para estender f_1 a uma função 2π -periódica, que denotaremos por f_2 .

No entanto, existem infinitas maneiras de estender f a uma função f_1 de $] -\pi, \pi]$ a \mathbb{C} . Duas formas são bastante úteis.

2.2.1. Extensão par. A extensão par é feita definindo uma função $f_1 :] -\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ da seguinte forma:

$$f_1(\theta) = f(-\theta), \text{ para } \theta \in] -\pi, 0].$$

Depois estendemos f_1 a uma função 2π -periódica, denotada por $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Esta função f_2 é uma função par tal que $f = f_2|_{[0, \pi]}$. Assim a expansão de Fourier de f será mesma de f_2 . Como f_2 é par, temos o seguinte resultado:

AFIRMAÇÃO 8. A série de Fourier par de uma função $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta),$$

em que

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta.$$

2.2.2. Extensão ímpar. A extensão ímpar é feita definindo uma função $f_1 :]-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ da seguinte forma:

$$f_1(\theta) = \begin{cases} f(\theta), & \text{para } \theta \in]0, \pi[\\ 0, & \text{para } \theta = 0 \text{ ou } \pi \\ -f(-\theta), & \text{para } \theta \in]-\pi, 0[\end{cases}.$$

Depois estendemos f_1 a uma função 2π -periódica, denotada como $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. A função f_2 é uma função ímpar tal que $f = f_2|_{[0, \pi]}$. Assim a expansão de Fourier de f será mesma de f_2 . Como f_2 é ímpar, temos o seguinte resultado:

AFIRMAÇÃO 9. A série de Fourier ímpar de uma função $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\theta),$$

em que

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \text{sen}(n\theta) d\theta.$$

A convergência das séries de Fourier definidas acima ocorre da mesma forma que a série de Fourier de f_2 .

2.3. Funções $f :]-L, L] \rightarrow \mathbb{C}$.

Vamos considerar agora uma função $f :]-L, L] \rightarrow \mathbb{C}$ suave por partes tais que os seguintes limites existem:

$$\lim_{\theta \rightarrow -L^-} f(\theta) \text{ e } \lim_{\theta \rightarrow -L^-} f'(\theta).$$

Como podemos escrevê-la como uma série de Fourier?

Inicialmente, definimos $f_1 :]-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ como $f_1(\theta) = f\left(\frac{L}{\pi}\theta\right)$. Note que se $\theta \in]-\pi, \pi]$, então $\frac{L}{\pi}\theta \in]-L, L]$. Logo f_1 está bem definida. Assim,

$$f_1(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \text{sen}(n\theta)),$$

em que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta) \text{sen}(n\theta) d\theta.$$

Observando que como $f_1(\theta) = f\left(\frac{L}{\pi}\theta\right)$, concluímos que $f(\theta) = f_1\left(\frac{\pi}{L}\theta\right)$. Logo

$$f(\theta) = f_1\left(\frac{\pi}{L}\theta\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi\theta}{L}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) \right),$$

em que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}\theta\right) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\theta) e^{-i\frac{n\pi\theta}{L}} d\theta.$$

Fazendo o mesmo argumento com a_n e b_n , obtemos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\theta) \cos\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) d\theta$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\theta) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi\theta}{L} \right) d\theta.$$

2.4. Funções $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$.

Vamos considerar agora uma função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$ suave por partes. Vamos repetir os argumentos anteriores.

Inicialmente, definimos $f_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ como $f_1(\theta) = f\left(\frac{L}{\pi}\theta\right)$. Note que se $\theta \in [0, \pi]$, então $\frac{L}{\pi}\theta \in [0, L]$. Logo f_1 está bem definida. Assim, podemos expandir f_1 como série em senos e série em cossenos. Obtemos a seguinte expressão:

$$f_1(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta),$$

em que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(\theta) \cos(n\theta) d\theta.$$

A expressão em senos é

$$f_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\theta),$$

em que

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(\theta) \operatorname{sen}(n\theta) d\theta.$$

Observando que $f_1(\theta) = f\left(\frac{L}{\pi}\theta\right)$, concluímos que $f(\theta) = f_1\left(\frac{\pi}{L}\theta\right)$. Logo

$$f(\theta) = f_1\left(\frac{\pi}{L}\theta\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right),$$

em que

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(\theta) \cos(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}\theta\right) \cos(n\theta) d\theta = \frac{2}{L} \int_0^L f(\theta) \cos\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) d\theta.$$

Fazendo o mesmo argumento com a expansão em senos obtemos

$$f(\theta) = f_1\left(\frac{\pi}{L}\theta\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right),$$

em que

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) d\theta.$$

Principais resultados e ideias dessa seção:

1) Toda função $f :]-L, L[$ suave por partes e cujos limites $\lim_{\theta \rightarrow L^-} f(\theta)$ e $\lim_{\theta \rightarrow L^-} f'(\theta)$ existem, possui uma série de Fourier (real e complexa). Ela é dada por

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi\theta}{L}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) \right),$$

em que

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\theta) e^{-i \frac{n\pi\theta}{L}} d\theta, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\theta) \cos\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) d\theta, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) d\theta.$$

2) Toda função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$ suave por partes admite uma expansão de Fourier seno dada por:

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right),$$

em que

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) d\theta.$$

3) Toda função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$ suave por partes admite uma expansão de Fourier cosseno dada por:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right),$$

em que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(\theta) \cos\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) d\theta.$$

Aplicação à Equação do Calor.

Vamos agora usar os resultados para finalmente resolver a equação do calor.

2.4.1. Condições de Dirichlet. Considere a seguinte equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \end{cases}.$$

Vimos que a solução é da forma

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

em que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Pelo que vimos acima, isto é sempre possível. Basta usar a expansão de Fourier seno. Temos

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Assim,

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \left(\int_0^L f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

2.4.2. Condições de Neumann. Considere a seguinte equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \end{cases}$$

Vimos que a solução é da forma

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

em que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Pelo que vimos acima, isto é sempre possível. Basta usar a expansão de Fourier cosseno. Temos

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Assim,

$$u(t, x) = \frac{1}{L} \int_0^L f(y) dy + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \left(\int_0^L f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

OBSERVAÇÃO 10. Note que a solução do calor com condições de Dirichlet é tal que todos os termos da somatória vão a zero. Não é difícil de concluir que isto implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0.$$

Os termos da somatória da solução do calor com condições de Neumann também vão a zero. No entanto, o primeiro termo fora da somatória é constante. Assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = \frac{1}{L} \int_0^L f(y) dy.$$

Nossa conclusão é:

Se uma barra tem temperatura constante igual a zero nas extremidades, a temperatura de toda a barra irá para zero para tempos grandes. No entanto, se a barra é isolada (não tem fluxo de calor nas extremidades), então a temperatura da barra tende a média da temperatura inicial, que é dada por $\frac{1}{L} \int_0^L u(0, y) dy = \frac{1}{L} \int_0^L f(y) dy$.

Aula do dia 1 de abril

Equação da Onda

3.1. A dedução da equação de onda.

Vamos fazer uma rápida dedução da equação de onda. Consideremos uma onda numa corda. O deslocamento transversal da corda (perpendicular a corda em repouso) será denotado por $u(x, t)$. O ponto $x \in I \subset \mathbb{R}$, I um intervalo, corresponde a um ponto da corda. A variável t corresponde ao tempo. Faremos as seguintes suposições:

- i) A corda é perfeitamente flexível (assim, um ponto da corda sobe e desce, mas sempre se mantém na coordenada x).
 - ii) A massa da corda por unidade de comprimento é constante. Sua densidade será denotada por ρ .
 - iii) Os deslocamentos u são pequeno comparados com o comprimento da corda.
 - iv) A inclinação da corda é pequena em todos os pontos.
 - v) A tensão atua tangencialmente à corda e seu módulo T é o mesmo em todos os pontos.
 - vi) A gravidade e outras forças externas são desprezadas.
- Veja a figura abaixo:aulatma142020.jpg

FIGURA 3.1.1

Note que no segmento Δs , que ocupa o intervalo $[x, x + \Delta x]$, temos:

Massa do pedaço: $\Delta s \approx \rho \Delta x$. Como a corda é perfeitamente flexível, a massa da corda em Δx se mantém a mesma, pois pedaços da corda não mudam de posição na coordenada x .

Aceleração vertical do pedaço $\Delta s \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x)$.

Força sobre o pedaço Δs é igual a $T \text{sen}(\theta_2) - T \text{sen}(\theta_1)$.

Agora observamos que, pela série de Taylor, temos

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta) &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \\ \text{tg}(\theta) &= \theta + \frac{\theta^3}{3} + \dots \end{aligned}$$

Note que o primeiro termo da série de Taylor de ambos é 0. O segundo é θ e o terceiro (correspondente a θ^2) é zero. Logo ambas as funções têm os três primeiros termos da série iguais. Assim é razoável supor que $\text{sen}(\theta) \approx \text{tg}(\theta)$ para θ pequeno.

Porém $\text{tg}(\theta_1) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$ e $\text{tg}(\theta_2) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x)$. Usando a segunda lei de Newton (Força é igual a massa vezes aceleração), concluímos que

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = T \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right).$$

Assim

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = T \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)}{\Delta x}.$$

Supondo Δx suficientemente pequeno, concluímos que uma boa aproximação da segunda lei para a corda é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x).$$

Usualmente, denotamos a constante $\frac{T}{\rho}$ por v^2 . Esse v corresponde a velocidade da onda.

3.1.1. Diferenças entre onda e calor (Importante). Existe diversas diferenças importantes entre as duas equações. Vamos aqui focar apenas em uma, que é essencial para a boa colocação do problema: A equação da onda tem derivadas de ordem dois no tempo e a do calor tem derivada de ordem um.

Vamos agora pensar em termos de equações diferenciais ordinárias. Todos conhecem as equações abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) &= f(t) \\ \frac{d^2f}{dt^2}(t) &= f(t) \end{aligned} .$$

A primeira equação é de primeira ordem. A solução geral é da forma ae^t . Para determinar a devemos conhecer $f(0)$. Já a segunda equação é de segunda ordem. A solução geral é da forma $ae^t + be^{-t}$. Para determinar a e b devemos conhecer $f(0)$ e $f'(0)$, ou seja, precisamos de duas condições iniciais: na função f e em sua derivada.

Com a equação da onda e do calor o mesmo fenômeno ocorre. Vamos considerá-las no intervalo $[0, L]$. Para determinar a solução da equação do calor, precisamos conhecer a função $u(0, x)$ para $x \in [0, L]$. Para a equação da onda precisamos conhecer a função $u(0, x)$, para $x \in [0, L]$, e a função $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$, para $x \in [0, L]$. Fisicamente isto faz sentido. Na dedução usamos a segunda lei de Newton. Para sua resolução, espera-se que se conheça a posição inicial, correspondente a $u(0, x)$, e a velocidade inicial, que corresponde a $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$.

Vamos agora ver como podemos usar o método de separação de variáveis para resolver a equação de onda com duas condições de contorno: as condições de Dirichlet e as condições de Neumann.

3.2. Condições de Dirichlet

Considere a seguinte equação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad t > 0 \\ u(0, x) = f(x), \quad x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), \quad x \in [0, L] \end{array} \right. .$$

Vamos resolver usando os três passos, seguindo o método de separação de variáveis.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ da forma $u(t, x) = T(t)X(x)$. Substituindo esta forma na equação da onda, temos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(T(t)X(x)) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(T(t)X(x)).$$

Logo

$$T''(t)X(x) = v^2 T(t)X''(x).$$

Concluimos assim que

$$\frac{T''(t)}{v^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Portanto, existe uma constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\frac{T''(t)}{v^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Note que como $\lambda \in \mathbb{C}$, a constante $-\lambda^2$ pode ser qualquer número complexo. Apenas escrevemos assim, pois irá nos ajudar depois. Concluimos, assim, que

$$T''(t) = -\lambda^2 v^2 T(t) \quad \text{e} \quad X''(x) = -\lambda^2 X(x).$$

Logo, se $\lambda \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} T(t) &= A \operatorname{sen}(\lambda vt) + B \cos(\lambda vt) \\ X(x) &= C \operatorname{sen}(\lambda x) + D \cos(\lambda x) \end{aligned} .$$

Portanto

$$u(t, x) = (A \operatorname{sen}(\lambda vt) + B \cos(\lambda vt))(C \operatorname{sen}(\lambda x) + D \cos(\lambda x)).$$

Se $\lambda = 0$, temos

$$\begin{aligned} T(t) &= At + B \\ X(x) &= Cx + D \end{aligned} .$$

Portanto

$$u(t, x) = (At + B)(Cx + D).$$

Segundo Passo

Vamos agora usar as condições de contorno

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad t > 0.$$

Para $\lambda = 0$, temos

$$u(t, 0) = (At + B)D = 0.$$

Logo se quisermos evitar $u = 0$, devemos ter $D = 0$. Por outro lado,

$$u(t, L) = (At + B)CL = 0.$$

Novamente, devemos ter $C = 0$. Assim, $u = 0$ é a única solução possível.

Vamos considerar a partir de agora somente $\lambda \neq 0$. Assim, temos

$$u(t, 0) = (A \operatorname{sen}(\lambda vt) + B \cos(\lambda vt))D = 0.$$

Como isto deve valer para todo $t > 0$, devemos ter $D = 0$.

Por outro lado, temos

$$u(t, L) = (A \operatorname{sen}(\lambda vt) + B \cos(\lambda vt))C \operatorname{sen}(\lambda L) = 0.$$

Logo devemos ter $C \operatorname{sen}(\lambda L) = 0$. Se $C = 0$, então $u = 0$. Assim, deveremos ter

$$\operatorname{sen}(\lambda L) = 0 \implies \lambda L = n\pi, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

As soluções obtidas, portanto, são

$$u_n(t, x) = \left(A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Terceiro Passo

Somando as soluções particulares, obtemos a seguinte expressão para uma solução geral

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Para determinar A_n e B_n vamos usar as condições iniciais

$$\begin{cases} u(0, x) = f(x), & , x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & , x \in [0, L] \end{cases}.$$

Obtemos, assim,

$$f(x) = u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

e, como

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi v}{L} A_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) - \frac{n\pi v}{L} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

obtemos

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{L} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Podemos determinar os coeficientes A_n e B_n através da expansão seno de Fourier. Temos

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy$$

e

$$A_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^L g(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Concluimos que

$$u(t, x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{n\pi v} \int_0^L g(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L} \right) dy \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi vt}{L} \right) + \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L} \right) dy \right) \cos \left(\frac{n\pi vt}{L} \right) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right).$$

3.3. Condições de Neumann

Novamente, vamos resolver pelo método de separação de variáveis.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ na forma $u(t, x) = T(t)X(x)$. O argumento é o mesmo que o com condições de Dirichlet. Assim, temos

$$u(t, x) = (A \operatorname{sen}(\lambda vt) + B \cos(\lambda vt))(C \operatorname{sen}(\lambda x) + D \cos(\lambda x))$$

ou

$$u(t, x) = (At + B)(Cx + D).$$

Segundo Passo

Vamos agora usar as condições de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0, \quad t > 0.$$

Vamos primeiro considerar $\lambda = 0$, ou seja,

$$u(t, x) = (At + B)(Cx + D).$$

Usando as condições de contorno, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = (At + B)C = 0.$$

Logo devemos ter $C = 0$. As soluções neste caso devem ser da forma:

$$u_0(t, x) = A_0 t + B_0.$$

Agora, consideremos $\lambda \neq 0$.

Vemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \lambda (A \operatorname{sen}(\lambda vt) + B \cos(\lambda vt))(C \cos(\lambda x) - D \operatorname{sen}(\lambda x)) = 0$$

Assim, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = (A \operatorname{sen}(\lambda vt) + B \cos(\lambda vt)) \lambda C = 0.$$

Assim, $\lambda C = 0$. Como $\lambda \neq 0$, devemos ter $C = 0$.

Por outro lado, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = \lambda (A \operatorname{sen}(\lambda vt) + B \cos(\lambda vt)) D \operatorname{sen}(\lambda L) = 0.$$

Logo devemos ter $\lambda D \operatorname{sen}(\lambda L) = 0$. Se $\lambda D = 0$, então $u = 0$. Assim, deveremos ter

$$\operatorname{sen}(\lambda L) = 0 \implies \lambda L = n\pi, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Assim, as soluções obtidas são

$$u_n(t, x) = \left(B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi vt}{L} \right) + A_n \cos \left(\frac{n\pi vt}{L} \right) \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right).$$

Terceiro Passo

Somando as soluções particulares, obtemos a seguinte expressão para uma solução geral

$$u(t, x) = \frac{A_0}{2} + \frac{B_0}{2} t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi vt}{L} \right) + A_n \cos \left(\frac{n\pi vt}{L} \right) \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

em que A_n e B_n são constantes para determinar. Escrevemos $\frac{A_0}{2}$ e $\frac{B_0}{2}$, pois o termo $\frac{1}{2}$ irá nos ajudar em breve.

Para determinar A_n e B_n vamos usar as condições iniciais

$$\begin{cases} u(0, x) = f(x), & , x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & , x \in [0, L] \end{cases} .$$

Obtemos, assim,

$$f(x) = u(0, x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

e, como

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi v}{L}\right) \left(B_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) - A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi vt}{L}\right)\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

obtemos

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{n\pi v}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Podemos determinar os coeficientes A_n e B_n através da expansão seno de Fourier. Temos

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy, \quad n \geq 0.$$

e

$$B_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^L g(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy, \quad n \geq 1 \quad \text{e} \quad B_0 = \frac{2}{L} \int_0^L g(y) dy.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} & u(t, x) \\ &= \left(\frac{1}{L} \int_0^L f(y) dy\right) + \left(\frac{1}{L} \int_0^L g(y) dy\right) t \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{n\pi v} \int_0^L g(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy\right) \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO 11. Observamos que $\left(\frac{1}{L} \int_0^L f(y) dy\right)$ é a posição média da corda e $\left(\frac{1}{L} \int_0^L g(y) dy\right)$ é a velocidade média da corda. Assim, a corda caminha com essa velocidade e posição média inicial. Isto faz sentido fisicamente, pois as condições de Neumann aqui significam que a corda não está presa nas extremidades.

Principais resultados e ideias dessa seção:

- 1) Para a solução da equação de onda, precisamos, além da equação, uma condição de contorno (tipicamente Dirichlet, Neumann ou Robin) e **duas** condições iniciais: $u(0, x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$ para $x \in [0, L]$.
- 2) A equação da onda é tipicamente oscilatória. Se não tiver forças externas, só aparecem senos e cossenos em sua solução (Dirichlet) e termos lineares (Neumann).

Aula do dia 3 de abril

Bases ortonormais e Série de Fourier

Vamos começar lembrando um pouco de vetores e geometria. Sabemos que em \mathbb{R}^3 podemos definir a seguinte base canônica $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, em que $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Assim, todo elemento $v \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito de maneira única como combinação dos vetores da base da seguinte forma:

$$v = (v_1, v_2, v_3) = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}.$$

Sabemos também que podemos sempre definir um produto interno em \mathbb{R}^3 da seguinte maneira: Sejam $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ elementos de \mathbb{R}^3 . Logo

$$\langle v, w \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

Mas o que isto tem a ver com séries de Fourier???

A ideia é simples. Seja $f :]-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ uma função suave por partes. O que gostaríamos de mostrar é que as funções $e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ funcionam como elementos de uma base. Assim, do mesmo jeito que todo $v \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como $v = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$, temos que toda função “razoável” f pode ser escrita como uma soma $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k$, em que c_k são números complexos. Ou seja, as funções e_k fazem o papel dos vetores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} . Para deixar tudo mais claro, vamos inicialmente fazer uma revisão de álgebra linear.

4.1. Revisão de álgebra linear

Um dos conceitos mais importantes que vemos em álgebra linear é o de produto interno. Vamos aqui lembrar a definição.

DEFINIÇÃO 12. Seja V um espaço vetorial complexo. Um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função (que leva dois elementos de V em um número complexo) tal que

- 1) $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}$, para todo $u \in V$ e $\langle u, u \rangle > 0$, se $u \neq 0$.
- 2) $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$, para todo $u, v, w \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- 3) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, para $u, v \in V$.

Associado ao produto interno, sempre podemos definir uma norma $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

OBSERVAÇÃO 13. As propriedades acima implicam que se $u = 0$, então $\langle u, u \rangle = 0$. Além disso, as propriedades 2 e 3 dizem que

$$\langle w, \alpha u + \beta v \rangle = \overline{\alpha} \langle w, u \rangle + \overline{\beta} \langle w, v \rangle, \text{ para todo } u, v, w \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Observamos também que a mesma definição de produto interno se aplica a um espaço vetorial real. Neste caso, a condição 3) se torna $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, para $u, v \in V$.

EXEMPLO 14. Consideremos \mathbb{C}^n o espaço vetorial dos elementos da forma (z_1, \dots, z_n) , em que cada $z_j \in \mathbb{C}$. A soma e a multiplicação por $\lambda \in \mathbb{C}$ é definida como

$$(z_1, \dots, z_n) + (w_1, \dots, w_n) = (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n)$$

$$\lambda (z_1, \dots, z_n) = (\lambda z_1, \dots, \lambda z_n).$$

Neste caso, podemos definir o seguinte produto interno:

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = z_1 \overline{w_1} + \dots + z_n \overline{w_n}.$$

A norma é dada por

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j|^2}.$$

EXEMPLO 15. Seja $PC[a, b]$ o conjunto das funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ contínua por partes. Definimos o seguinte produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

A norma é dada por

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}.$$

Para nós, serão muito importantes os espaços $PC[-L, L]$ e $PC[0, L]$, com $L > 0$.

4.1.1. Ortogonalidade e ortonormalidade. Uma vez que dispomos de um produto interno, podemos definir um conceito fundamental: o de ortogonalidade.

DEFINIÇÃO 16. Seja V um espaço vetorial com produto interno. Dizemos que dois vetores u e v são ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$. Dizemos que um conjunto $S = \{e_j; j \in J\} \subset V$, em que $J \subset \mathbb{Z}$ é um conjunto finito ou infinito, é ortogonal se $\langle e_j, e_k \rangle = 0$ para $j \neq k$. Dizemos que o conjunto S é ortonormal se for ortogonal ($\langle e_j, e_k \rangle = 0$ para $j \neq k$) e se as normas dos vetores de S forem todas iguais a 1, isto é, $\|e_j\| = 1$. Podemos escrever isto como $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$, em que $\delta_{jk} = 0$, se $j \neq k$, e $\delta_{jk} = 1$, se $j = k$. A função δ_{ij} é chamada de delta de Krönicker.

EXEMPLO 17. O conjunto $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é ortonormal em \mathbb{R}^2 . Já o conjunto $\{(1, 1), (1, -1)\}$ é ortogonal, mas não é ortonormal. De fato,

$$\langle (1, 1), (1, -1) \rangle = 1 - 1 = 0.$$

No entanto, $\|(1, 1)\| = \|(1, -1)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Uma vez que definimos o que são vetores ortogonais, podemos recordar a ideia de base ortonormal:

DEFINIÇÃO 18. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Um conjunto $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ é chamado de:

1) Base de V se todo elemento $u \in V$ pode ser escrito de maneira única como combinação linear de elementos de S , ou seja, todo elemento u pode ser escrito como

$$u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n,$$

em que α_j são números (reais ou complexos, de acordo com V ser real ou complexo) unicamente determinados.¹ Em particular, os elementos de S são todos diferentes do elemento nulo.

2) Base ortonormal de V se S for uma base e um conjunto ortonormal.

EXEMPLO 19. Os conjuntos $S_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $S_2 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$ são bases ortonormais de \mathbb{R}^2 . O conjunto $S_3 = \{(1, 0), (1, 1)\}$ é uma base, mas não é uma base ortonormal.

EXEMPLO 20. O conjunto $S = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$ de \mathbb{C}^n é uma base ortonormal.

Bases ortonormais são muito úteis, pois permitem que um elemento possa ser escrito de maneira fácil em termos de seus coeficientes. De fato, temos o seguinte resultado:

TEOREMA 21. *Seja V um espaço vetorial (real ou complexo) com produto interno. Seja $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de V . Logo todo elemento $u \in V$ pode ser escrito como*

$$u = \sum_{j=1}^n \langle u, e_j \rangle e_j.$$

¹O conceito de base foi visto por todos vocês no curso de álgebra linear. Em alguns livros de álgebra linear, a base é definida como um conjunto linearmente independente que gera todo o espaço V . Esta definição coincide com a que demos acima.

A norma de u pode ser calculada como

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |\langle u, e_j \rangle|^2}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Como S é uma base, então todo elemento $u \in V$ pode ser escrito de maneira única como

$$u = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j,$$

em que α_j são números reais ou complexos. Logo

$$\langle u, e_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle e_j, e_k \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{jk} = \alpha_k.$$

Portanto

$$u = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j = \sum_{j=1}^n \langle u, e_j \rangle e_j.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \left\langle \sum_{j=1}^n \langle u, e_j \rangle e_j, \sum_{k=1}^n \langle u, e_k \rangle e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{\langle u, e_k \rangle} \langle u, e_j \rangle \langle e_j, e_k \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{\langle u, e_k \rangle} \langle u, e_j \rangle \delta_{jk} = \sum_{j=1}^n \overline{\langle u, e_j \rangle} \langle u, e_j \rangle = \sum_{j=1}^n |\langle u, e_j \rangle|^2. \end{aligned}$$

□

4.2. Voltando às séries de Fourier

Vamos agora voltar as séries de Fourier. Primeiramente, precisamos provar os seguintes fatos:

TEOREMA 22. Consideremos o conjunto $PC[-\pi, \pi]$ das funções contínuas por partes em $[-\pi, \pi]$. O produto interno é definido como

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Neste caso:

- 1) O conjunto $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}; n \in \mathbb{Z} \right\}$ é ortonormal.
- 2) O conjunto $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx); n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nx); n \in \mathbb{N} \right\}$ é ortonormal.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos começar com 1)

Temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx. \end{aligned}$$

Se $n = m$, então

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1.$$

Se $n \neq m$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}}{n-m} \\ &= \frac{2i}{2\pi(n-m)} \frac{e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}}{2i} = \frac{i}{\pi(n-m)} \operatorname{sen}((n-m)\pi) = 0. \end{aligned}$$

Agora vamos provar 2).

Temos $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx); n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen}(nx); n \in \mathbb{N} \right\}$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1.$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0.$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen}(nx) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) dx = 0.$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(2nx)}{2} \right) dx = 1.$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen}(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen}(nx) \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 - \cos(2nx)}{2} \right) dx = 1.$$

Note que

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen}(mx) \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \text{sen}(mx) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\text{sen}((m+n)x) + \text{sen}((m-n)x)] dx = 0.$$

Por fim, se $n \neq m$, então

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx) \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)] dx = 0.$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen}(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen}(mx) \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)] dx = 0.$$

□

TEOREMA 23. Consideremos o conjunto $PC[0, \pi]$ das funções contínuas por partes em $[0, \pi]$. O produto interno é definido como

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Neste caso:

- 1) O conjunto $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx); n \in \mathbb{N} \right\}$ é ortonormal.
- 2) O conjunto $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen}(nx); n \in \mathbb{N} \right\}$ é ortonormal.

DEMONSTRAÇÃO. A prova é semelhante à anterior. □

4.2.1. Série de Fourier em $[-\pi, \pi]$. Vamos agora denotar as funções $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ por e_n . Assim, e_n são vetores do espaço vetorial $PC[-\pi, \pi]$. A expansão de Fourier de uma função f suave por partes é dada por

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) e^{-in\psi} d\psi \right) e^{in\theta}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-in\psi} d\psi \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Note que a igualdade só vale quando f é contínua em θ , além de ser suave por partes.

Conclusão:

As funções $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}; n \in \mathbb{Z} \right\}$ são funções ortonormais no espaço $PC[-\pi, \pi]$. Além disso, toda função f , suave por partes, pode ser escrita como

$$(4.2.1) \quad f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Isto é análogo ao que ocorre num espaço vetorial de dimensão finita complexo V com produto interno. Neste caso, se $\{e_1, \dots, e_N\}$ for uma base ortonormal de V , então todo vetor $u \in V$ pode ser escrito como

$$(4.2.2) \quad u = \sum_{n=1}^N \langle u, e_n \rangle e_n.$$

Note que as Equações (4.2.1) e (4.2.2) acima são muito semelhantes. A diferença é que a série de Fourier (4.2.2) temos uma soma infinita. Isto nos leva a crer que as funções $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}; n \in \mathbb{Z} \right\}$ são, de certa maneira, uma base do espaço $PC[-\pi, \pi]$. Isto matematicamente não é ainda muito preciso. Tentaremos deixar isto ou pouco mais preciso na aula seguinte. Mas a ideia é que a analogia existe e a que **expansão de uma função em série de Fourier pode ser pensada como a expansão da função em termos de uma base ortonormal**.

Vamos ver outros exemplos em que conseguimos essa analogia.

Consideremos agora a série de Fourier real.

Denotando por c_0 a função $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, c_n a função $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\theta)$ e por s_n a função $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\theta)$, para $n \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos(n\psi) d\psi \right) \cos(n\theta) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin(n\psi) d\psi \right) \sin(n\theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos(n\psi) d\psi \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\theta) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin(n\psi) d\psi \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\theta) \\ &= \langle f, c_0 \rangle c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, c_n \rangle c_n + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, s_n \rangle s_n. \end{aligned}$$

Novamente a fórmula acima é análoga a (4.2.2). Assim, a série de Fourier real também corresponde a escrever uma função em termos de uma base ortonormal.

4.2.2. Série de Fourier em $[0, \pi]$. Para a séries de Fourier em $[0, \pi]$, podemos usar o mesmo argumento. De fato, denotando por c_0 a função $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ e por c_n a função $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n\theta)$, para $n \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\psi) d\psi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\psi) \cos(n\psi) d\psi \right) \cos(n\theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(\psi) d\psi \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(\psi) \cos(n\psi) d\psi \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n\theta) \\ &= \langle f, c_0 \rangle c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, c_n \rangle c_n. \end{aligned}$$

Por outro lado, denotando por s_n a função $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{sen}(n\theta)$, para $n \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\theta) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\psi) \text{sen}(n\psi) d\psi \right) \text{sen}(n\theta) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(\psi) \text{sen}(n\psi) d\psi \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen}(n\theta) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, s_n \rangle s_n. \end{aligned}$$

4.2.3. Série de Fourier em $[-L, L]$ e $[0, L]$. Nestes casos a mesma análise feita acima se aplica. Para isto, temos

As bases ortonormais de $[-L, L]$ correspondentes à série de Fourier complexa e real, respectivamente, serão dadas por

- 1) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i \frac{n\pi x}{L}}; n \in \mathbb{Z} \right\}$.
- 2) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right); n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right); n \in \mathbb{N} \right\}$.

As bases ortonormais de $[0, L]$ correspondentes à série de Fourier seno e cosseno, respectivamente, serão dadas por

- 1) $\left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right); n \in \mathbb{N} \right\}$.
- 2) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right); n \in \mathbb{N} \right\}$.

Principais ideias e conceitos dessa seção:

- 1) Os conjuntos $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}; n \in \mathbb{Z} \right\}$ e $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx); n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen}(nx); n \in \mathbb{N} \right\}$ são ortonormais em relação ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

- 2) A série de Fourier pode ser vista como uma função sendo escrita em termos de uma base ortonormal (infinita).

Aula do dia 8 de abril

Convergência L^2 de séries de Fourier

Vamos começar a discussão considerando uma função contínua por partes $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$. Vimos que sempre podemos definir seus coeficientes de Fourier (para tanto, devemos ignorar o ponto $-\pi$ para trabalharmos com uma função de $] -\pi, \pi[$ a \mathbb{C}).

Se a função f for suave por partes, então vimos que

$$f(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)] \right)$$

para todos os pontos $\theta \in [-\pi, \pi]$ em que a extensão 2π -periódica de f for contínua. Isto ocorre para todos os pontos de $]-\pi, \pi[$, com exceção de finitos pontos (aqueles em que a função f não é contínua e os pontos da extremidade quando eles não coincidirem). Sabemos que uma função que é zero em todos os pontos de um intervalo, com exceção de um número finito de pontos, possui integral igual a zero. Deste fato, concluímos

PROPOSIÇÃO 24. *Seja $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ uma função suave por partes, então*

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\theta) - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} \right|^2 d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\theta) - \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)] \right) \right|^2 d\theta = 0. \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que

$$\left| f(\theta) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} \right|^2 = 0$$

a não ser por um número finito de pontos. □

Note que usamos o módulo ao quadrado nas expressões acima. Isto nos permitirá relacionar a expressão acima com o que vimos na aula passada.

Na última aula, definimos um produto interno para as funções contínuas por partes $PC[-\pi, \pi]$ da seguinte forma: Para $f, g \in PC[-\pi, \pi]$, temos

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Neste caso, a norma é dada por

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}.$$

Vamos também usar a notação

$$S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)).$$

Assim, a Proposição 24 nos diz que se f é uma função suave por partes, então

$$\left\| f - \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \right\| = 0,$$

em que o limite acima é pontual.

Mas e se a função f for só contínua por partes? (Não tem derivada, ou a derivada explode em alguns pontos, como a função $\sqrt{|x|}$?) O que podemos dizer sobre a sua convergência?

A convergência pontual de funções contínua por partes é algo delicado. Mesmo para funções contínuas não podemos garantir convergência pontual em todos os pontos. Note que, até o momento, todos os resultados de convergência obtidos precisavam de diferenciabilidade das funções (elas tinham que ser suaves por partes!).

Abaixo vamos enunciar um resultado de convergência que vale também para funções que não possuem derivadas:

TEOREMA 25. *Seja $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua por partes e*

$$S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\theta) + b_n \sen(n\theta)).$$

Logo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N\| = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração desse Teorema exige, infelizmente, uma teoria que não pode ser desenvolvidas neste curso. Aqui gostaríamos apenas que o enunciado do Teorema fosse entendido. \square

OBSERVAÇÃO 26. O Teorema vale para funções $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ainda mais gerais. De fato basta que uma função satisfaça¹

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

para que tenhamos $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N\| = 0$.

OBSERVAÇÃO 27. Denotando por e_n a função $\theta \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}$, concluímos que $S_N = \sum_{n=-N}^N \langle f, e_n \rangle e_n$, conforme vimos na aula passada. Assim, temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^N \langle f, e_n \rangle e_n \right\| = 0.$$

Note que isto é análogo ao que ocorre num espaço vetorial V de dimensão finita com produto interno. Neste caso, se $\{e_1, \dots, e_N\}$ é uma base ortonormal e $u \in V$, temos

$$\left\| u - \sum_{n=1}^N \langle u, e_n \rangle e_n \right\| = 0.$$

Se escrevermos em termos de integrais, obtemos

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\theta) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} \right|^2 d\theta \\ (5.0.1) \quad & = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\theta) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\theta) + b_n \sen(n\theta)) \right) \right|^2 d\theta = 0. \end{aligned}$$

Assim, primeiro integramos o quadrado do módulo da função $f - S_N$, depois tomamos o limite $N \rightarrow \infty$. Neste caso, dizemos que **a função S_N converge no sentido L^2 para f** . O nome L^2 se deve ao fato de que o módulo da diferença das funções está sendo elevado ao quadrado.

Vamos, por fim, comparar as expressões:

Na convergência da Proposição 24, o limite está dentro da integral e é no sentido pontual. Na expressão 5.0.1 o limite está fora da integral. Uma expressão não implica a outra. São tipos de convergência diferentes!

Na próxima seção vamos comparar os três tipos de convergência estudados no curso.

¹Uma observação para quem se interessar: Na verdade a integral aqui deveria ser vista no sentido de Lebesgue, uma noção mais poderosa de integral do que a de Riemann. Além disso, a função deve ser mensurável. No entanto, nesse curso não usaremos esses conceitos, que devem ser vistos com calma num curso de medida e integração.

5.1. Comparação entre tipos de convergência

Vamos aqui comparar três tipos de convergência. Para facilitar, vamos considerar funções definidas no intervalo $[0, 1]$. Seja (f_n) uma sequência de funções de $[0, 1]$ em \mathbb{C} e $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ todas contínuas por partes.

Convergência pontual: Dizemos que (f_n) converge pontualmente a f se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(\theta) - f(\theta)| = 0, \text{ para todo } \theta \in [0, 1].$$

Note que neste caso, para todo $\theta \in [0, 1]$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\theta) = f(\theta)$.

Convergência uniforme: Dizemos que (f_n) converge uniformemente a f se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in [0, 1]} |f_n(\theta) - f(\theta)| = 0.$$

Convergência no sentido L^2 : Dizemos que (f_n) converge a f no sentido L^2 se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(\theta) - f(\theta)|^2 d\theta = 0.$$

Já vimos que convergência uniforme implica pontual, mas que a volta não vale. Vamos agora ver como a convergência L^2 se relaciona com as outras duas.

TEOREMA 28. *Com as definições acima temos:*

- 1) *Convergência uniforme implica convergência L^2 .*
- 2) *Convergência pontual não implica convergência L^2 .*
- 3) *Convergência L^2 não implica pontual.*
- 4) *Convergência L^2 não implica convergência uniforme.*

Podemos construir o seguinte diagrama. Nenhuma outra seta é válida.

$$\begin{array}{ccc} \text{uniforme} & \implies & \text{pontual} \\ \downarrow & & \\ L^2 & & \end{array}$$

Abaixo vamos usar a notação:

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f(\theta)|^2 d\theta}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos mostrar 1).

Se (f_n) converge uniformemente a f , temos

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \sqrt{\int_0^1 |f_n(\theta) - f(\theta)|^2 d\theta} \\ &\leq \sqrt{\left(\sup_{\theta \in [0, 1]} |f_n(\theta) - f(\theta)| \right)^2 \int_0^1 d\theta} \leq \sup_{\theta \in [0, 1]} |f_n(\theta) - f(\theta)|. \end{aligned}$$

Logo, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{\theta \in [0, 1]} |f_n(\theta) - f(\theta)| \right) = 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$, ou seja, (f_n) converge a f no sentido L^2 .

Vamos mostrar 2).

Vamos considerar a seguinte sequência de funções

$$f_n(\theta) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \theta \in]0, \frac{1}{n}[\\ 0, & \theta \notin]0, \frac{1}{n}[\end{cases}.$$

Logo (f_n) converge pontualmente a zero, já que se $\theta \in [0, 1]$, então $\theta \notin]0, \frac{1}{n}[$ quando n é muito grande. Por outro lado, $\|f_n\| = 1$. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - 0\| = 1 \neq 0$, ou seja, (f_n) não converge para 0 no sentido L^2 .

Vamos mostrar 3).

Consideremos as funções

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= 1, \\ f_2(\theta) &= \begin{cases} 1, & \theta \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & \theta \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \quad f_3(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, & \theta \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \\ f_4(\theta) &= \begin{cases} 1, & \theta \in [0, \frac{1}{4}] \\ 0, & \theta \notin [0, \frac{1}{4}] \end{cases}, \quad f_5(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ 0, & \theta \notin [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \end{cases}, \\ f_6(\theta) &= \begin{cases} 1, & \theta \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 0, & \theta \notin [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \end{cases}, \quad f_7(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \in [\frac{3}{4}, 1] \\ 0, & \theta \notin [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}. \end{aligned}$$

e assim por diante (dividimos $[0, 1]$ em 8, depois em 16 e assim vai).

Note que a sequência de funções não converge pontualmente. De fato, dado um valor de $\theta \in [0, 1]$, vemos que os valores de $f_n(\theta)$ sempre variam entre 0 e 1, conforme n varia, mas nunca ficam constantes (embora o 0 apareça cada vez mais frequentemente). No entanto, temos que

$$\|f_1\| = 1, \quad \|f_2\| = \|f_3\| = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \|f_4\| = \|f_5\| = \|f_6\| = \|f_7\| = \sqrt{\frac{1}{4}}.$$

Vemos assim, que os valores ficam iguais a $\sqrt{\frac{1}{2^n}}$ e, portanto, vão a zero. Concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = 0.$$

Logo a sequência converge no sentido L^2 , mas não pontualmente

Por fim, note que se convergência L^2 não implica pontual, então ela também não pode implicar uniforme, já que uniforme implicaria pontual. Assim, concluimos que a afirmação 4) também é válida. \square

5.2. A fórmula de Parseval.

Vamos agora demonstrar algumas consequências da convergência L^2 . Para isto vamos usar um fato muito importante da aula passada:

As funções $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ são ortonormais e

$$S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} = \sum_{n=-N}^N \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Vamos agora demonstrar a fórmula de Parseval:

TEOREMA 29. (A fórmula de Parseval). Seja $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua por partes e

$$S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

sua série de Fourier. Logo

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente, observamos que

$$\|S_N\| = \|S_N - f + f\| \leq \|S_N - f\| + \|f\| \quad \text{e} \quad \|f\| = \|f - S_N + S_N\| \leq \|S_N - f\| + \|S_N\|.$$

Assim,

$$\| \|S_N\| - \|f\| \| \leq \|S_N - f\|.$$

Concluimos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \| \|S_N\| - \|f\| \| = \lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N - f\| = 0.$$

Logo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N\| = \|f\| \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N\|^2 = \|f\|^2.$$

Agora basta observar que

$$(5.2.1) \quad \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$$

e que

$$\begin{aligned} \|S_N\|^2 &= \langle S_N, S_N \rangle = \left\langle \sum_{n=-N}^N \langle f, e_n \rangle e_n, \sum_{m=-N}^N \langle f, e_m \rangle e_m \right\rangle \\ &= \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \langle f, e_n \rangle \langle f, e_m \rangle \langle e_n, e_m \rangle = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \langle f, e_n \rangle \langle f, e_m \rangle \delta_{mn} \\ &= \sum_{n=-N}^N |\langle f, e_n \rangle|^2. \end{aligned}$$

Lembramos que

$$\langle f, e_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-in\theta} d\theta = \sqrt{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \sqrt{2\pi} c_n.$$

Logo

$$(5.2.2) \quad \|S_N\|^2 = \sum_{n=-N}^N |\langle f, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=-N}^N \left| \sqrt{2\pi} c_n \right|^2 = 2\pi \sum_{n=-N}^N |c_n|^2.$$

A afirmação agora segue das Equações (5.2.1) e (5.2.2).

A demonstração de que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^N (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

pode ser provada da mesma maneira. De fato, basta usar a ortonormalidade de

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\theta), n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\theta), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

□

EXEMPLO 30. Vamos mostrar usando a fórmula de Parseval que

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Consideremos a função $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(\theta) = \theta$. Vimos em sala de aula que

$$f(\theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\theta).$$

Logo

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\theta|^2 d\theta = \pi \sum_{n=1}^N \left(\left| 2 \frac{(-1)^n}{n} \right|^2 \right) = 4\pi \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\theta|^2 d\theta = 2 \int_0^{\pi} \theta^2 d\theta = \frac{2}{3} \pi^3.$$

Portanto

$$\frac{2}{3} \pi^3 = 4\pi \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \implies \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}.$$

5.3. Convergência em L^2 nos intervalos $[-L, L]$, $[0, L]$

Tanto a convergência em L^2 como a fórmula de Parseval continuam valendo para as expansões de série de Fourier nos intervalos $[-L, L]$, $[0, L]$.

Vamos aqui apenas listar esses resultados:

Em $[-L, L]$ temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |f(\theta) - S_N(\theta)|^2 d\theta = 0,$$

em que

$$S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i \frac{n\pi\theta}{L}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right),$$

em que

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\theta) e^{-i \frac{n\pi\theta}{L}} d\theta, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\theta) \cos\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) d\theta \quad e \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\theta) \text{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) d\theta.$$

Além disso, temos

$$\int_{-L}^L |f(\theta)|^2 d\theta = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{L}{2} |a_0|^2 + L \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Em $[0, L]$ temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^L |f(\theta) - S_N^c(\theta)|^2 d\theta = 0,$$

em que

$$S_N^c(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right),$$

em que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(\theta) \cos\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) d\theta.$$

Além disso, temos

$$\int_0^L |f(\theta)|^2 d\theta = L |a_0|^2 + 2L \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2.$$

Por outro lado,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^L |f(\theta) - S_N^s(\theta)|^2 d\theta = 0,$$

em que

$$S_N^s(\theta) = \sum_{n=1}^N b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right),$$

em que

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(\theta) \text{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) d\theta.$$

Além disso, temos

$$\int_0^L |f(\theta)|^2 d\theta = 2L \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2.$$

Principais ideias e conceitos dessa seção:

1) Seja $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua por partes e

$$S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)).$$

Logo S_N converge a f no sentido L^2 , ou seja,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - S_N(\theta)|^2 d\theta = 0.$$

2) Seja $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua por partes. Logo vale a fórmula de Parseval:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Aula do dia 15 de abril

Equação do calor: Técnicas de resolução para equações não homogêneas

Hoje iremos discutir duas técnicas para resolver a equação do calor com termos não homogêneos, conforme explicado abaixo.

Já vimos como resolver a equação do calor com, por exemplo, condição de contorno de Dirichlet. Neste caso, a equação pode ser escrita como

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \end{cases}$$

Agora gostaríamos de resolver problemas mais gerais tais como

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + F_1(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = F_2(t), u(t, L) = F_3(t), & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \end{cases}.$$

Ao invés de fazer explicações ou procurar sistematizar, vamos tentar ilustrar as técnicas de resolução através de exemplos.

6.1. Exemplo 1 (Fontes de calor independentes do tempo)

Vamos começar com o seguinte problema:

$$(6.1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + F(x), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = a, u(t, L) = b, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \end{cases},$$

em que F e f são funções contínuas e a e b são números reais.

A estratégia que adotaremos aqui é a seguinte: Dividir o problema em dois problemas mais simples:

Primeiro problema: Determinar uma solução $u_2 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ das equações abaixo:

$$\begin{cases} 0 = k \frac{d^2 u_2}{dx^2}(x) + F(x), & x \in [0, L] \\ u_2(0) = a, u_2(L) = b \end{cases}.$$

Segundo problema: Determinar uma solução $u_1 : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ das equações abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ u_1(t, 0) = 0, u_1(t, L) = 0, & t > 0 \\ u_1(0, x) = f(x) - u_2(x), & x \in [0, L] \end{cases}.$$

Observe que devemos achar inicialmente u_2 e depois determinar u_1 .

Note que $u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(x)$ é uma solução do Problema (6.1.1). De fato, temos

Para $t > 0$ e $x \in [0, L]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{\partial u_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial u_2}{\partial t}(x) \\ &= k \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t, x) + k \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(x) + F(x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + F(x), \end{aligned}$$

em que usamos, claro, que $\frac{\partial u_2}{\partial t}(x) = 0$.

Para $t > 0$:

$$u(t, 0) = u_1(t, 0) + u_2(0) = a, \quad u(t, L) = u_1(t, L) + u_2(L) = b.$$

Para $x \in [0, L]$:

$$u(0, x) = u_1(0, x) + u_2(x) = f(x).$$

Nós sabemos como determinar u_1 uma vez conhecido u_2 (e f , que é um dado do problema). Vamos então achar u_2 , supondo que F é uma função contínua. Temos que resolver a seguinte equação:

$$\frac{d^2 u_2}{dx^2}(x) = -\frac{1}{k}F(x), \quad x \in [0, L].$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{dx}(x) &= \frac{du_2}{dx}(0) - \frac{1}{k} \int_0^x F(y) dy. \\ \implies u_2(x) &= u_2(0) + \frac{du_2}{dx}(0)x - \frac{1}{k} \int_0^x \left(\int_0^z F(y) dy \right) dz. \end{aligned}$$

Pelas condições de contorno, sabemos que $u_2(0) = a$. Vamos determinar agora $\frac{du_2}{dx}(0)$. Sabemos que

$$u_2(L) = b \implies a + \frac{du_2}{dx}(0)L - \frac{1}{k} \int_0^L \left(\int_0^z F(y) dy \right) dz = b.$$

Logo

$$\frac{du_2}{dx}(0) = \frac{1}{kL} \int_0^L \left(\int_0^z F(y) dy \right) dz + \frac{(b-a)}{L}.$$

Concluimos que

$$u_2(x) = a + \left(\frac{1}{kL} \int_0^L \left(\int_0^z F(y) dy \right) dz + \frac{(b-a)}{L} \right) x - \frac{1}{k} \int_0^x \left(\int_0^z F(y) dy \right) dz.$$

Agora que conhecemos u_2 , podemos determinar u_1 . No entanto, nas aulas anteriores já vimos que

$$u_1(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 kt}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad \text{em que } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L (f(y) - u_2(y)) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L} \right) dy.$$

Concluimos que a solução u é dada por

$$u(t, x) = u_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \left(\int_0^L (f(y) - u_2(y)) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L} \right) dy \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 kt}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

em que

$$u_2(x) = a + \left(\frac{1}{kL} \int_0^L \left(\int_0^z F(y) dy \right) dz + \frac{(b-a)}{L} \right) x - \frac{1}{k} \int_0^x \left(\int_0^z F(y) dy \right) dz.$$

6.2. Exemplo 2 (Fontes de calor dependentes do tempo)

Agora vamos discutir outra técnica para o caso em que F depende do tempo. Consideremos o seguinte problema:

$$(6.2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + F(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = a(t), \quad u(t, L) = b(t), & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \end{cases},$$

em que F , f , a e b são funções contínuas.

Vamos primeiro lidar com as funções a e b . Para isso, achamos $u_2(t, x)$ tal que

$$u_2(t, 0) = a(t), \quad u_2(t, L) = b(t).$$

Uma possível solução é

$$u_2(t, x) = a(t) + (b(t) - a(t)) \frac{x}{L}.$$

Agora consideremos $u_1(t, x) = u(t, x) - u_2(t, x)$. Como $u = u_1 + u_2$, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2(u_1+u_2)}{\partial x^2}(t, x) + F(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ (u_1 + u_2)(t, 0) = a(t), (u_1 + u_2)(t, L) = b(t), & t > 0 \\ (u_1 + u_2)(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \end{cases},$$

Logo

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t, x) + k \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(t, x) + F(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ u_1(t, 0) = 0, u_1(t, L) = 0, & t > 0 \\ u_1(0, x) = f(x) - [a(0) + (b(0) - a(0)) \frac{x}{L}], & x \in [0, L] \end{cases}.$$

Assim, chegamos a um problema do tipo

$$(6.2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t, x) + G(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ u_1(t, 0) = 0, u_1(t, L) = 0, & t > 0 \\ u_1(0, x) = g(x), & x \in [0, L] \end{cases},$$

em que

$$G(t, x) = k \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(t, x) + F(t, x)$$

e

$$g(x) = f(x) - \left[a(0) + (b(0) - a(0)) \frac{x}{L} \right].$$

Para vamos resolvê-lo, vamos adotar a seguinte estratégia: Sabemos que a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ v(t, 0) = 0, v(t, L) = 0, & t > 0 \\ v(0, x) = h(x), & x \in [0, L] \end{cases}$$

é dado por

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right),$$

em que

$$b_n = \frac{2}{L} \left(\int_0^L h(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi y}{L} \right) dy \right).$$

Vamos, então, procurar soluções da forma

$$u_1(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right)$$

para o problema (6.2.2).

Queremos que $\frac{\partial u_1}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t, x) + G(t, x)$. Substituindo na equação, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right) + G(t, x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial b_n(t)}{\partial t} e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} - b_n(t) \frac{n^2 \pi^2 k}{L^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) k \left(\frac{n \pi}{L} \right)^2 e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) + G(t, x). \end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial b_n(t)}{\partial t} e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) = G(t, x).$$

Supondo que G seja contínua ou de classe C^1 , podemos expandir G por série de Fourier seno em cada ponto t . Assim, obtemos

$$G(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \quad \bar{b}_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L G(t, y) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi y}{L} \right) dy.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial b_n(t)}{\partial t} e^{-\frac{n^2 \pi^2 kt}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Igualando os coeficientes, obtemos

$$\frac{\partial b_n(t)}{\partial t} = e^{-\frac{n^2 \pi^2 kt}{L^2}} \bar{b}_n(t) \implies b_n(t) = b_n(0) + \int_0^t e^{-\frac{n^2 \pi^2 ks}{L^2}} \bar{b}_n(s) ds.$$

Vamos agora usar as condições de contorno e iniciais. Sabemos que $u_1(t, 0) = 0$, $u_1(t, L) = 0$. Mas isso já sai direto, já que

$$\begin{aligned} u_1(t, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) e^{-\frac{n^2 \pi^2 kt}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi 0}{L}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) e^{-\frac{n^2 \pi^2 kt}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi L}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) 0 e^{-\frac{n^2 \pi^2 kt}{L^2}} = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, $u_1(0, x) = g(x)$, $x \in [0, L]$. Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x).$$

Fazendo a expansão em série seno de Fourier, concluímos que

$$b_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Assim,

$$b_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy + \frac{2}{L} \int_0^t \int_0^L e^{-\frac{n^2 \pi^2 ks}{L^2}} G(s, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy ds.$$

Concluímos com tudo isso que

$$u = u_1 + u_2 = a(t) + (b(t) - a(t)) \frac{x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) e^{-\frac{n^2 \pi^2 kt}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

em que

$$b_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy + \frac{2}{L} \int_0^t \int_0^L e^{-\frac{n^2 \pi^2 ks}{L^2}} G(s, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy ds,$$

com

$$G(t, x) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(a(t) + (b(t) - a(t)) \frac{x}{L} \right) + F(t, x)$$

e

$$g(x) = f(x) - \left[a(0) + (b(0) - a(0)) \frac{x}{L} \right].$$

6.2.1. Condições de Neumann. Vamos terminar fazendo uma pequena discussão sobre condições de Neumann. Neste caso devemos resolver

$$(6.2.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + F(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = a(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = b(t), & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \end{cases},$$

em que F e f são funções contínuas e a e b são números reais.

A estratégia que adotaremos aqui é diferente.

Vamos primeiro lidar com as funções a e b . Para isso, achamos $u_1(t, x)$ tal que

$$\frac{du_2}{dx}(t, 0) = a(t), \quad \frac{du_2}{dx}(t, L) = b(t).$$

Uma possível solução é

$$u_2(t, x) = a(t)x + (b(t) - a(t)) \frac{x^2}{2L}.$$

Agora consideremos $u_1(t, x) = u(t, x) - u_2(t, x)$. Como $u = u_1 + u_2$, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2(u_1+u_2)}{\partial x^2}(t, x) + F(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ \frac{\partial}{\partial x}(u_1 + u_2)(t, 0) = a(t), \quad \frac{\partial}{\partial x}(u_1 + u_2)(t, L) = b(t), & t > 0 \\ (u_1 + u_2)(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \end{cases},$$

Logo

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t, x) + k \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(t, x) + F(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}(t, L) = 0, & t > 0 \\ u_1(0, x) = f(x) - \left[a(t)x + (b(t) - a(t)) \frac{x^2}{2L} \right], & x \in [0, L] \end{cases}.$$

Assim, chegamos a um problema do tipo

$$(6.2.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t, x) + G(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}(t, L) = 0, & t > 0 \\ u_1(0, x) = g(x), & x \in [0, L] \end{cases},$$

em que

$$G(t, x) = k \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(t, x) + F(t, x)$$

e

$$g(x) = f(x) - \left[a(t)x + (b(t) - a(t)) \frac{x^2}{2L} \right].$$

Para vamos resolvê-lo, vamos adotar a seguinte estratégia: Sabemos que a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(t, L) = 0, & t > 0 \\ v(0, x) = h(x), & x \in [0, L] \end{cases}$$

é dado por

$$v(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \cos\left(\frac{n \pi x}{L}\right),$$

em que

$$a_n = \frac{2}{L} \left(\int_0^L h(y) \cos\left(\frac{n \pi y}{L}\right) dy \right).$$

Vamos, então, procurar soluções da forma

$$u_1(t, x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \cos\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

para o problema (6.2.4).

Queremos que $\frac{\partial u_1}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t, x) + G(t, x)$. Substituindo na equação, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \cos\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \right) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \cos\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \right) + G(t, x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial a_0(t)}{\partial t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial a_n(t)}{\partial t} e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} - a_n(t) \frac{n^2 \pi^2 k}{L^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \right) \cos\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \\ & = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) k \left(\frac{n \pi}{L}\right)^2 e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \cos\left(\frac{n \pi x}{L}\right) + G(t, x) \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{1}{2} \frac{\partial a_0(t)}{\partial t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n(t)}{\partial t} e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \cos\left(\frac{n \pi x}{L}\right) = G(t, x).$$

Supondo que G seja contínua ou de classe C^1 , podemos expandir G por série de Fourier seno em cada ponto t . Assim, obtemos

$$G(t, x) = \frac{\bar{a}_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \bar{a}_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L G(t, y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial a_0(t)}{\partial t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n(t)}{\partial t} e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{\bar{a}_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Igualando os coeficientes, obtemos

$$\frac{\partial a_n(t)}{\partial t} = e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \bar{a}_n(t) \implies a_n(t) = a_n(0) + \int_0^t e^{-\frac{n^2 \pi^2 k s}{L^2}} \bar{a}_n(s) ds.$$

Vamos agora usar as condições de contorno e iniciais. Sabemos que $\frac{\partial u_1}{\partial x}(t, 0) = 0$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}(t, L) = 0$. Mas isso já sai direto, já que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x}(t, 0) &= - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi 0}{L}\right) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi L}{L}\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) 0 e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, $u_1(0, x) = g(x)$, $x \in [0, L]$. Portanto

$$\frac{a_0(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x).$$

Fazendo a expansão em série cosseno de Fourier, concluímos que

$$a_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Assim,

$$a_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy + \frac{2}{L} \int_0^t \int_0^L e^{-\frac{n^2 \pi^2 k s}{L^2}} G(s, y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy ds.$$

Concluimos com tudo isso que

$$u = u_1 + u_2 = a(t)x + (b(t) - a(t)) \frac{x^2}{2L} + \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

em que

$$a_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy + \frac{2}{L} \int_0^t \int_0^L e^{-\frac{n^2 \pi^2 k s}{L^2}} G(s, y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy ds,$$

com

$$G(t, x) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(a(t)x + (b(t) - a(t)) \frac{x^2}{2L} \right) + F(t, x)$$

e

$$g(x) = f(x) - \left[a(t)x + (b(t) - a(t)) \frac{x^2}{2L} \right].$$

Principais ideias e conceitos dessa seção:

Vimos dois métodos para resolver a equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + F(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = a(t), u(t, L) = b(t), & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \end{cases} .$$

1) Se F , a e b não dependem do tempo, então podemos escrever $u = u_1 + u_2$, em que u_2 resolve a equação:

$$\begin{cases} k \frac{d^2 u_2}{dx^2}(t, x) + F(x) = 0, & x \in [0, L] \\ u_2(0) = a, u_2(L) = b, & t > 0 \end{cases}$$

e u_1 resolve a equação do calor com F , a e b iguais a 0 e $f - u_2$ ao invés de f .

2) Se F , a e b dependem do tempo, então podemos escrever $u = u_1 + u_2$, em que $u_2(t, x) = a(t) + \frac{(b(t)-a(t))}{L}x$ e $u_1 = \sum_{n=1} b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é solução da equação com $a = b = 0$ e $-\frac{\partial}{\partial t} \left(a(t) + \frac{(b(t)-a(t))}{L}x \right) + F(t, x)$ ao invés de F e $f(x) - \left[a(0) + (b(0) - a(0)) \frac{x}{L} \right]$ ao invés de f .

Aula do dia 17 de abril

Equação da onda não homogênea e outras condições de contorno

Vamos hoje começar com mais um exemplo de equação com termos não homogêneos. Desta vez, no entanto, estudaremos a equação da onda.

Na segunda parte dessa aula, vamos mostrar como podemos usar o método de separação de variáveis para o estudo de outras condições de contorno.

7.1. Exemplo 3 (Exemplo de equação da onda não homogênea)

Seja $F : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e considere a equação da onda definida abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + F(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & x \in [0, L] \end{cases}.$$

Vimos nas aulas passadas que se $F = 0$, então

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{n\pi v} \int_0^L g(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L} \right) dy \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi vt}{L} \right) + \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L} \right) dy \right) \cos \left(\frac{n\pi vt}{L} \right) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right).$$

Vamos, então, nos basear na expressão acima e procurar uma solução da forma

$$(7.1.1) \quad u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

em que b_n são funções que devemos determinar. Note que as condições de contorno $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ são automaticamente satisfeitas. De fato, como $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$, para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$u(t, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi 0}{L} \right) = 0,$$

$$u(t, L) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi L}{L} \right) = 0.$$

Substituindo a expressão (7.1.1) na equação da onda, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2}(t) + \left(\frac{n\pi v}{L} \right)^2 b_n(t) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, expandindo a função F , para cada tempo t fixo, em séries de Fourier seno, obtemos

$$F(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F(t, y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L} \right) dy.$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2}(t) + \left(\frac{n\pi v}{L} \right)^2 b_n(t) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right).$$

Assim, concluímos que

$$(7.1.2) \quad \frac{d^2 b_n}{dt^2}(t) + \left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2 b_n(t) = F_n(t).$$

Com um pouco de trabalho (nós iremos ver como podemos resolver esse tipo de equação quando formos estudar funções de Green no final do curso), podemos ver que a solução geral da equação (7.1.2) é dada por

$$(7.1.3) \quad b_n(t) = b_n(0) \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) + \frac{b'_n(0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi v}{L}t\right)}{\left(\frac{n\pi v}{L}\right)} + \frac{L}{n\pi v} \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{nv\pi(t-s)}{L}\right) F_n(s) ds.$$

(Mini exercício: Verifiquem diretamente que a Equação (7.1.3) é solução de (7.1.2)).

Para determinar $b_n(0)$ e $b'_n(0)$, vamos usar as condições iniciais: Note que

$$u(0, x) = f(x) \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) \implies b_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x) \implies \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x) \implies b'_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Concluímos assim que

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{L} \int_0^L f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \right) \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) + \left(\frac{2}{L} \int_0^L g(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi v}{L}t\right)}{\left(\frac{n\pi v}{L}\right)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{L}{n\pi v} \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{nv\pi(t-s)}{L}\right) F_n(s) ds \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \end{aligned}$$

Note que se $F = 0$, então $F_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e obtemos a solução da equação de onda que tínhamos calculado numa das aulas anteriores.

7.2. Outras condições de contorno

Os métodos vistos até agora permitem o tratamento de inúmeros outras condições de contorno, tais como: condições periódicas, condições mistas (Dirichlet em uma parte e Neumann em outra) e condições de Robin.

Vamos aqui nos ater aos dois primeiros tipos. A interessante condição de Robin pode ser encontrada em diversas referências para aqueles que se interessarem. Para melhor ilustrar, vamos resolver um caso com a equação do calor e outro com a equação da onda.

7.2.1. Equação do calor com condições periódicas. Considere a seguinte equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L), & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \end{cases}.$$

Note que aqui não impomos valores de u nem de $\frac{\partial u}{\partial x}$ nos pontos extremos $x = 0$ e $x = L$. Apenas supomos que tanto u como $\frac{\partial u}{\partial x}$ coincidem nas extremidades. Essas são as condições periódicas. Fisicamente, esta equação pode descrever a equação do calor de uma barra circular de perímetro L . Assim, as condições são periódicas, pois os pontos $x = 0$ e $x = L$ representam um mesmo ponto da barra.

Vamos resolver usando os três passos, seguindo o método de separação de variáveis.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções de $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ da forma $u(t, x) = T(t)X(x)$. Substituindo esta forma na equação da onda, temos soluções da forma

$$u(t, x) = A + Bx$$

e, para $\lambda \neq 0$, temos

$$u(t, x) = e^{-\lambda^2 kt} (A \cos(\lambda x) + B \operatorname{sen}(\lambda x))$$

Segundo Passo

Vamos agora usar as condições de contorno

$$u(t, 0) = u(t, L) \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L).$$

Para $u(t, x) = A + Bx$, temos

$$A = A + BL \quad \text{e} \quad B = B.$$

Logo $B = 0$ e u é uma função constante.

Para $\lambda \neq 0$, $u(t, 0) = u(t, L)$ implica que

$$A = (A \cos(\lambda L) + B \sin(\lambda L))$$

Por outro lado, $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L)$ implica que

$$B = (-A \sin(\lambda L) + B \cos(\lambda L)).$$

Assim, devemos ter

$$\begin{pmatrix} 1 - \cos(\lambda L) & -\sin(\lambda L) \\ \sin(\lambda L) & 1 - \cos(\lambda L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para termos soluções não nulas, o determinante da matriz deve ser igual a zero. Logo

$$\begin{aligned} & (1 - \cos(\lambda L))^2 + \sin^2(\lambda L) \\ &= 1 - 2\cos(\lambda L) + \cos^2(\lambda L) + \sin^2(\lambda L) = 2(1 - \cos(\lambda L)) = 0. \end{aligned}$$

Assim, devemos ter $\cos(\lambda L) = 1$, ou seja $\lambda L = 2n\pi$. Concluimos que as soluções encontradas são

$$u_n(t, x) = e^{-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 kt} \left(A \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right), \quad n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Note que podemos escrever seno e cosseno usando apenas exponenciais. Obtemos dessa forma, que

$$u_n(t, x) = c_n e^{-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 kt} e^{i\frac{2n\pi x}{L}}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

em que c_n são números complexos.

Poderíamos, de forma equivalente, considerar soluções da forma:

$$u_0(t, x) = \frac{a_0}{2}, \quad u_n(t, x) = a_n e^{-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 kt} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), \quad u_n(t, x) = b_n e^{-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 kt} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\},$$

Terceiro Passo

Somando as soluções particulares, obtemos a seguinte expressão para uma solução geral

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 kt} e^{i\frac{2n\pi x}{L}}.$$

Para determinar c_n vamos usar a condição inicial

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in [0, L].$$

Fazendo mudança de coordenadas¹, sabemos que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\frac{2n\pi x}{L}}, \quad f_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(y) e^{-i\frac{2n\pi y}{L}} dy.$$

Logo

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(y) e^{-i\frac{2n\pi y}{L}} dy.$$

¹Sabemos que para $h : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, temos $h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$, em que $c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L h(y) e^{-i\frac{n\pi y}{L}} dy$. Consideremos então $h(x) = f\left(\frac{x+L}{2}\right)$. Logo $f(x) = h(2x-L)$. Portanto

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L h(y) e^{-i\frac{n\pi y}{L}} dy \right) e^{i\frac{n\pi(2x-L)}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f\left(\frac{y+L}{2}\right) e^{-i\frac{n\pi y}{L}} dy \right) e^{i\frac{n\pi(2x-L)}{L}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_0^L f(y) e^{-i\frac{n\pi(2y-L)}{L}} 2dy \right) e^{i\frac{n\pi(2x-L)}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{L} \int_0^L f(y) e^{-i\frac{2n\pi y}{L}} dy \right) e^{i\frac{2n\pi x}{L}}. \end{aligned}$$

Juntando tudo, concluímos que

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{L} \int_0^L f(y) e^{-i \frac{2n\pi y}{L}} dy \right) e^{-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 kt} e^{i \frac{2n\pi x}{L}}.$$

7.2.2. Equação da onda com condições mistas de contorno. Consideremos, por fim, a seguinte equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & x \in [0, L] \end{cases}.$$

Fisicamente, essa condição de contorno tem a seguinte interpretação: A corda está fixa em $x = 0$, mas está solta em $x = L$.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ da forma $u(t, x) = T(t) X(x)$. As soluções encontradas são

$$u(t, x) = (At + B)(Cx + D).$$

e

$$u(t, x) = (A \operatorname{sen}(\lambda vt) + B \cos(\lambda vt))(C \operatorname{sen}(\lambda x) + D \cos(\lambda x)).$$

Segundo Passo

Vamos agora usar as condições de contorno

$$u(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0, \quad t > 0.$$

Para $u(t, x) = (At + B)(Cx + D)$, temos

$$u(t, 0) = (At + B)D = 0.$$

Logo se quisermos evitar $u = 0$, devemos ter $D = 0$. Por outro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = (At + B)C = 0.$$

Novamente, devemos ter $C = 0$. Assim, $u = 0$ é a única solução possível.

Vamos considerar a partir de agora somente $\lambda \neq 0$ e

$$u(t, x) = (A \operatorname{sen}(\lambda vt) + B \cos(\lambda vt))(C \operatorname{sen}(\lambda x) + D \cos(\lambda x)).$$

Assim, temos

$$u(t, 0) = (A \operatorname{sen}(\lambda vt) + B \cos(\lambda vt))D = 0.$$

Como isto deve valer para todo $t > 0$, devemos ter $D = 0$.

Por outro lado, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = (A \operatorname{sen}(\lambda vt) + B \cos(\lambda vt))\lambda C \cos(\lambda L) = 0.$$

Logo devemos ter $C \cos(\lambda L) = 0$. Se $C = 0$, então $u = 0$. Assim, deveremos ter

$$\cos(\lambda L) = 0 \implies \lambda L = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

As soluções obtidas, portanto, são

$$u_n(t, x) = \left(A_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n + 1) \pi vt}{2L} \right) + B_n \cos \left(\frac{(2n + 1) \pi vt}{2L} \right) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{(2n + 1) \pi x}{2L} \right).$$

Terceiro Passo

Somando as soluções particulares, obtemos a seguinte expressão para uma solução geral

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n + 1) \pi vt}{2L} \right) + B_n \cos \left(\frac{(2n + 1) \pi vt}{2L} \right) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{(2n + 1) \pi x}{2L} \right).$$

Para determinar A_n e B_n vamos usar as condições iniciais

$$\begin{cases} u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & x \in [0, L] \end{cases}.$$

Caso nós possamos escrever f e g na forma abaixo:

$$f(x) = u(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right)$$

e

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right).$$

Concluiríamos que

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi vt}{2L} \right) - \frac{2L}{(2n+1)\pi v} g_n \cos \left(\frac{(2n+1)\pi vt}{2L} \right) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right).$$

No entanto, como podemos determinar f_n e g_n ? Vamos responder essa questão nas aulas seguintes, ao estudar o Problema de Sturm-Liouville.

Principais ideias e conceitos dessa seção:

1) Vimos um métodos para resolver a equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + F(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = 0, u(t, L) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & x \in [0, L] \end{cases}.$$

Para tanto, procuramos soluções do tipo $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$.

2) Vimos que o método de separação funciona também para condições periódicas ($u(t, 0) = u(t, L)$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L)$) e mistas ($u(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0$).

Aula do dia 22 de abril

Problema de Sturm-Liouville regular

Hoje vamos estudar o problema de Sturm-Liouville regular.

8.1. Motivação

Para motivar os problemas de Sturm-Liouville, vamos novamente usar a equação do calor. Vimos na primeira aula que, ao deduzirmos a equação do calor sobre um corpo que ocupa uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, com densidade de calor específico $\sigma : \Omega \rightarrow]0, \infty[$ e condutividade térmica $k : \Omega \rightarrow]0, \infty[$, a equação do calor é dada por

$$\sigma(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (k(x) \nabla u(t, x)) + F(t, x).$$

Quando k e σ são constantes, obtemos a equação do calor, já que $\nabla \cdot \nabla u = \Delta u$. Mas o que ocorre quando k e σ não forem constantes?

Vamos considerar por simplicidade, a equação do calor com condições de Dirichlet, com $F = 0$ e em dimensão 1. Neste caso, devemos resolver:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \end{cases}.$$

Vamos fazer os três passos do método de separação de variáveis.

Primeiro Passo

Procuramos soluções da forma

$$u(t, x) = T(t) X(x).$$

Substituindo na equação do calor, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (T(t) X(x)) = \frac{1}{\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial}{\partial x} (T(t) X(x)) \right).$$

Assim,

$$\frac{\frac{dT}{dt}(t)}{T(t)} = \frac{\frac{1}{\sigma(x)} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dX}{dx}(x) \right)}{X(x)} = \lambda.$$

Obtemos as equações

$$T(t) = Ce^{\lambda t}$$

$$(8.1.1) \quad \frac{1}{\sigma(x)} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dX}{dx}(x) \right) = \lambda X(x).$$

Segundo Passo

Vamos usar as condições de Dirichlet. Assim, o passo 2 do método de separação de variáveis nos leva ao seguinte problema:

Ache todos os números $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, e todas as funções $X_n : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ que resolvem a equação

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma(x)} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dX_n}{dx}(x) \right) = \lambda_n X_n(x), & x \in [0, L] \\ X_n(0) = X_n(L) = 0 \end{cases}.$$

Terceiro Passo

Somando todas as soluções do segundo passo, temos

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\lambda_n t} X_n(x).$$

Devemos, por fim, determinar os coeficientes c_n através da condição inicial

$$u(0, x) = f(x).$$

A função f deve poder ser escrita como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X_n(x),$$

em que o limite deve ocorrer em algumas das formas estudadas (pontual, uniforme ou L^2).

Assim chegamos ao seguinte problema: Para resolver a equação do calor geral, devemos mostrar que o problema

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma(x)} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dX_n}{dx}(x) \right) = \lambda_n X_n(x), & x \in [0, L] \\ X_n(0) = X_n(L) = 0 \end{cases}$$

tem infinitas soluções que permitem escrever toda função f “razoável” (suave ou contínua por partes) como $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X_n(x)$, em que o limite deve ser interpretado como alguma das formas vistas no curso.

8.2. A equação diferencial

Não é possível, com as ferramentas que dispomos, dar provas completas dos resultados que enunciaremos. No entanto, podemos entender os próximos teoremas e deixá-los acessíveis através de analogias com álgebra linear.

Vamos relembrar um resultado (muito importante!) de álgebra linear.

TEOREMA 31. *Seja V um espaço vetorial (real ou complexo) de dimensão finita com produto interno $(u, v) \in V \times V \mapsto \langle u, v \rangle$ e $A : V \rightarrow V$ um operador linear auto-adjunto, ou seja, uma transformação linear que satisfaz*

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle, \quad \forall u, v \in V.$$

Logo existe um conjunto $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ tal que:

1) $Ae_j = \lambda_j e_j$.

2) $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

3) $u = \sum_{j=1}^n \langle u, e_j \rangle e_j$.

Dizemos que λ_j são os autovalores associados aos autovetores e_j .

EXEMPLO 32. Seja $V = \mathbb{R}^n$ com o produto interno

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

e $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear representado pela matriz A . Logo A é auto-adjunto se, e somente se, $A_{ij} = A_{ji}$, para todo i e j entre 1 e n , ou seja, A é uma matriz simétrica.

Neste caso existe uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n tais que $Ae_i = \lambda_i e_i$.

No caso em que $n = 2$ e

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

uma base ortonormal será dada por $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Note que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Logo os autovalores são 3 e 1.

Vamos permitir, a partir de agora, que as funções tenham valores complexos, a não ser quando deixamos explícito que elas tem valores reais. Isto facilitará a discussão.

Consideraremos o operador linear $\mathcal{L} : C^2([a, b]) \rightarrow C([a, b])$, em que $C([a, b])$ e $C^2([a, b])$ indicam as funções tomando valores complexos que são contínuas e que têm duas derivadas contínuas, respectivamente.

O operador $\mathcal{L} : C^2([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ é definido como

$$(8.2.1) \quad \mathcal{L}f(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{df}{dx}(x) \right) + p(x) f(x),$$

em que $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua estritamente positiva com valores reais, $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, com derivada contínua (ou seja, é C^1) que também é estritamente positiva e tem valores reais.

Note que se $p = 0$, $a = 0$, $b = L$, $w = \sigma$ e $r = k$, chegamos na mesma expressão do lado esquerdo da equação 8.1.1.

Vamos considerar o seguinte produto interno para funções em $C([a, b])$:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} w(x) dx.$$

Assim, temos

PROPOSIÇÃO 33. Dados f e g pertencentes a $C^2([a, b])$. O operador \mathcal{L} satisfaz

$$\langle \mathcal{L}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{L}g \rangle,$$

se e somente se,

$$\begin{aligned} & r \left(\frac{df}{dx} \bar{g} - f \frac{d\bar{g}}{dx} \right) \Big|_a^b \\ &= r(b) \left(\frac{df}{dx}(b) \bar{g}(b) - f(b) \frac{d\bar{g}}{dx}(b) \right) - r(a) \left(\frac{df}{dx}(a) \bar{g}(a) - f(a) \frac{d\bar{g}}{dx}(a) \right) = 0. \end{aligned}$$

Note que a condição $\langle \mathcal{L}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{L}g \rangle$ é análoga a condição $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ do Teorema 31.

DEMONSTRAÇÃO. Basta verificar que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}f, g \rangle &= \int_a^b \left(\frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{df}{dx}(x) \right) + p(x) f(x) \right) \overline{g(x)} w(x) dx \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{df}{dx}(x) \right) \overline{g(x)} dx + \int_a^b f(x) \overline{p(x) g(x)} w(x) dx \\ &= r(x) \frac{df}{dx}(x) \overline{g(x)} \Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{df}{dx}(x) \right) r(x) \frac{d\bar{g}}{dx}(x) dx + \int_a^b f(x) \overline{p(x) g(x)} w(x) dx \\ &= \left(r(x) \frac{df}{dx}(x) \overline{g(x)} - r(x) f(x) \frac{d\bar{g}}{dx}(x) \right) \Big|_a^b + \int_a^b f(x) \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{d\bar{g}}{dx}(x) \right) dx + \int_a^b f(x) \overline{p(x) g(x)} w(x) dx \\ &= r(x) \left(\frac{df}{dx}(x) \overline{g(x)} - f(x) \frac{d\bar{g}}{dx}(x) \right) \Big|_a^b + \int_a^b f(x) \left(\frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{d\bar{g}}{dx}(x) \right) + p(x) \overline{g(x)} \right) w(x) dx \\ &= r(x) \left(\frac{df}{dx}(x) \overline{g(x)} - f(x) \frac{d\bar{g}}{dx}(x) \right) \Big|_a^b + \langle f, \mathcal{L}g \rangle. \end{aligned}$$

□

Vamos agora estudar quais devem ser as condições de contorno adequadas que devemos impor às funções ao resolver uma equação que envolve o operador \mathcal{L} .

DEFINIÇÃO 34. Seja $[a, b]$ um intervalo.

1) Uma condição de contorno $B : C^2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função da forma:

$$Bf = \alpha f(a) + \alpha' \frac{df}{dx}(a) + \beta f(b) + \beta' \frac{df}{dx}(b),$$

em que α, α', β e β' são números reais.

2) Dizemos que duas condições de contorno B_1 e B_2 são independentes, se

$$B_1 f = \alpha_1 f(a) + \alpha'_1 \frac{df}{dx}(a) + \beta_1 f(b) + \beta'_1 \frac{df}{dx}(b),$$

$$B_2 f = \alpha_2 f(a) + \alpha'_2 \frac{df}{dx}(a) + \beta_2 f(b) + \beta'_2 \frac{df}{dx}(b)$$

e os vetores $(\alpha_1, \alpha'_1, \beta_1, \beta'_1)$ e $(\alpha_2, \alpha'_2, \beta_2, \beta'_2)$ forem linearmente independentes, ou seja, forem ambos não nulos e um não é múltiplo do outro.

3) Duas condições de contorno independentes B_1 e B_2 são chamadas de condições de contorno auto-adjuntas para o operador \mathcal{L} se

$$r \left(\frac{df}{dx} \bar{g} - f \frac{dg}{dx} \right) \Big|_a^b = 0,$$

para todos f e g que satisfazem $B_1 f = B_2 f = B_1 g = B_2 g = 0$.

PROPOSIÇÃO 35. Seja $\mathcal{L} : C^2([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ um operador dado pela Equação (8.2.1) e B_1 e B_2 condições de contorno auto-adjuntas. Vamos denotar $C_B^2([a, b])$ como o conjunto

$$C_B^2([a, b]) = \{f \in C^2([a, b]); B_1 f = B_2 f = 0\}.$$

Logo, para todos $f, g \in C_B^2([a, b])$, temos

$$\langle \mathcal{L}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{L}g \rangle.$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que

$$\langle \mathcal{L}f, g \rangle - \langle f, \mathcal{L}g \rangle = r \left(\frac{df}{dx} \bar{g} - f \frac{dg}{dx} \right) \Big|_a^b = 0,$$

pela Proposição 33. □

Vemos assim que $\mathcal{L} : C_B^2([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ é um operador linear análogo a um operador auto-adjunto em álgebra linear. Desta forma, não deve ser mais tanta surpresa que um resultado análogo ao Teorema 31 valha para esses operadores. E de fato isso é verdade!

Vamos, antes de enunciar o nosso principal resultado, definir autovalores e autofunções (ou autovetores) do operador \mathcal{L} .

DEFINIÇÃO 36. Dado o operador linear $\mathcal{L} : C^2([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ definido por (8.2.1), dizemos que uma função $f \neq 0$ em $C^2([a, b])$ é um autovetor (autofunção) de \mathcal{L} se existir $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\mathcal{L}f = \lambda f.$$

Neste caso, dizemos que λ é o autovalor associado a f .

Vamos provar duas propriedades úteis dos autovalores e autovetores. As demonstrações são iguais às encontradas em livros de álgebra linear.

PROPOSIÇÃO 37. Seja o operador linear $\mathcal{L} : C^2([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ definido por (8.2.1) e B_1 e B_2 duas condições de contorno auto-adjuntas.

1) Se $f \in C_B^2([a, b])$ é uma autofunção e $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor associado a f , ou seja, $\mathcal{L}f = \lambda f$, então λ é real.

2) Sejam $f_1, f_2 \in C_B^2([a, b])$ são duas autofunções e λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ os autovalores associados a f_1 e f_2 , respectivamente. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então

$$\langle f_1, f_2 \rangle = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. 1) Basta observar que

$$\lambda \langle f, f \rangle = \langle \lambda f, f \rangle = \langle \mathcal{L}f, f \rangle = \langle f, \mathcal{L}f \rangle = \langle f, \lambda f \rangle = \bar{\lambda} \langle f, f \rangle.$$

Logo

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \langle f, f \rangle = 0.$$

Como $f \neq 0$, temos $\lambda = \bar{\lambda}$ e λ é um número real.

2) O raciocínio é semelhante ao anterior. Já sabemos que λ_1 e λ_2 são números reais. Assim,

$$\lambda_1 \langle f_1, f_2 \rangle = \langle \lambda_1 f_1, f_2 \rangle = \langle \mathcal{L}f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, \mathcal{L}f_2 \rangle = \langle f_1, \lambda_2 f_2 \rangle = \lambda_2 \langle f_1, f_2 \rangle.$$

Assim,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle f_1, f_2 \rangle = 0.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, concluímos que $\langle f_1, f_2 \rangle = 0$. □

Vamos agora finalmente enunciar o Teorema de Sturm-Liouville.

8.3. O Teorema principal

Estamos agora finalmente em condições de enunciar o principal teorema dessa aula.

Vamos antes juntar as definições.

DEFINIÇÃO 38. Um problema de Sturm-Liouville regular (\mathcal{L}, B_1, B_2) consiste de:

1) Um operador $\mathcal{L} : C^2([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ definido como

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{df}{dx}(x) \right) + p(x) f(x),$$

em que $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua estritamente positiva com valores reais, $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, com derivada contínua (ou seja, é C^1) que também é estritamente positiva e tem valores reais.

2) Duas condições de contorno B_1 e B_2 dadas por

$$B_1 f = \alpha_1 f(a) + \alpha'_1 \frac{df}{dx}(a) + \beta_1 f(b) + \beta'_1 \frac{df}{dx}(b),$$

$$B_2 f = \alpha_2 f(a) + \alpha'_2 \frac{df}{dx}(a) + \beta_2 f(b) + \beta'_2 \frac{df}{dx}(b),$$

em que

i) Os vetores $(\alpha_1, \alpha'_1, \beta_1, \beta'_1)$ e $(\alpha_2, \alpha'_2, \beta_2, \beta'_2)$ são linearmente independentes, ou seja, forem ambos não nulos e um não é múltiplo do outro.

ii) Se f e g são funções que satisfazem $B_1 f = B_2 f = B_1 g = B_2 g = 0$, então

$$r \left(\frac{df}{dx} \bar{g} - f \frac{d\bar{g}}{dx} \right) \Big|_a^b = 0.$$

Essas condições de contorno são chamadas de auto-adjuntas.

O problema consiste em achar todas as soluções $f \in C^2([a, b])$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ da equação abaixo

$$(8.3.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}f &= \lambda f \\ B_1 f &= B_2 f = 0 \end{aligned}.$$

OBSERVAÇÃO 39. Note que, como visto na Proposição 37, os autovalores λ são reais. Desta maneira, impor no problema que os autovalores são reais não muda em nada.

OBSERVAÇÃO 40. Nas notações anteriores, o Problema (8.3.1) pode ser escrito como: Achar as funções em $C_B^2([a, b])$ e os números $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $\mathcal{L}f = \lambda f$. Assim, o problema de Sturm-Liouville é um problema de autovalores: encontrar autovalores e autovetores de uma transformação linear.

Nosso principal teorema dessa aula é o seguinte:

TEOREMA 41. *Seja (\mathcal{L}, B_1, B_2) um problema de Sturm-Liouville regular. Logo existe um conjunto infinito de funções não nulas $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$ em $C^2([a, b])$ uma sequência de números reais $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que:*

- 1) *Cada ϕ_n e λ_n resolvem o sistema de Sturm-Liouville, ou seja, $\mathcal{L}\phi_n = \lambda_n\phi_n$ e $B_1\phi_n = B_2\phi_n = 0$.*
- 2) *As funções são ortonormais, ou seja,*

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_a^b \phi_n(x) \overline{\phi_m(x)} w(x) dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}.$$

- 3) *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua por partes, então o seguinte limite vale:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\| = 0.$$

- 4) *O seguinte limite é válido: $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = -\infty$.*

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função de classe C^2 que satisfaz as condições de contorno $B_1f = B_2f = 0$, então $\sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ converge uniformemente para f .

Chamamos o conjunto $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$ de base ortonormal de autofunções (ou autovetores) do problema de Sturm-Liouville considerado. Os elementos da sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são chamados de autovalores do problema.

OBSERVAÇÃO 42. Lembramos que o item 3) acima nos diz que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^N \left(\int_a^b f(y) \overline{\phi_n(y)} w(y) dy \right) \phi_n(x) \right|^2 w(x) dx = 0.$$

A convergência uniforme, por sua vez, nos diz que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in [a, b]} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N \left(\int_a^b f(y) \overline{\phi_n(y)} w(y) dy \right) \phi_n(x) \right| \right) = 0.$$

É interessante notar como são similares os itens 1, 2 e 3 do Teorema 31 e do Teorema 41.

8.4. Aplicação

Vamos voltar a nossa motivação:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \end{cases}.$$

Usando o método de separação de variáveis, chegamos a seguinte problema:

Ache todos os números $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, e todas as funções $X_n : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ que resolvem a equação

$$(8.4.1) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sigma(x)} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dX_n}{dx}(x) \right) = \lambda_n X_n(x), & x \in [0, L] \\ X_n(0) = X_n(L) = 0 \end{cases}.$$

Note que temos um problema de Sturm-Liouville aqui.

De fato, temos:

- 1) Um operador $\mathcal{L} : C^2([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ definido como

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{df}{dx}(x) \right).$$

- 2) Duas condições de contorno definidas como $B_1f = f(0)$ e $B_2f = f(L)$ que são independentes e tais que

$$k \left(\frac{df}{dx} \bar{g} - f \frac{d\bar{g}}{dx} \right) \Big|_0^L =$$

$$k(L) \left(\frac{df}{dx}(L) \bar{g}(L) - f(L) \frac{d\bar{g}}{dx}(L) \right) - k(0) \left(\frac{df}{dx}(0) \bar{g}(0) - f(0) \frac{d\bar{g}}{dx}(0) \right) = 0,$$

sempre que $B_1f = B_2f = B_1g = B_2g = 0$.

Assim, concluímos que existe uma sequência $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$ de funções ortonormais em relação ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x) \overline{g(x)} \sigma(x) dx.$$

e uma sequência de números reais $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que a Equação (8.4.1) é satisfeita.

Assim, escrevendo a solução como

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n t} \phi_n(x),$$

temos, usando a condição inicial

$$u(0, x) = f(x),$$

que

$$(8.4.2) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x).$$

Porém, pelo Teorema 41, sabemos como determinar c_n . De fato, c_n é igual a

$$c_n = \langle f, \phi_n \rangle = \int_0^L f(x) \overline{\phi_n(x)} \sigma(x) dx$$

e o limite na Equação (8.4.2) é uniforme, se f é de classe C^2 e $f(0) = f(L)$, e é no sentido L^2 quando f for contínua por partes, ou seja,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\| = 0.$$

Concluímos que a solução da equação do calor é dada por

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle e^{\lambda_n t} \phi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} \left(\int_0^L f(y) \phi_n(y) \sigma(y) dy \right) \phi_n(x).$$

Principais ideias e conceitos dessa seção:

1) Vimos que o estudo da equação do calor:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \end{cases}$$

nos leva ao estudo do problema de Sturm-Liouville (\mathcal{L}, B_1, B_2) no intervalo finito $[a, b]$, em que

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{df}{dx}(x) \right) + p(x) f(x),$$

B_1 e B_2 são condições de contorno auto-adjuntas.

2) Vimos que existe uma sequência de números reais $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e um conjunto infinito de funções não nulas $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$ em $C^2([a, b])$ que são ortonormais em relação ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} w(x) dx$$

e tais que o seguinte limite vale para toda função f contínua por partes:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\| = 0.$$

Aula do dia 24 de abril

Exemplos do Problema de Sturm-Liouville

Esta aula será dedicada a exemplos do problema de Sturm-Liouville. Vamos ver como diversas equações vistas nas aulas anteriores se encaixam nesse tipo de problema e estudaremos alguns novos.

Lembramos das condições:

DEFINIÇÃO 43. Um problema de Sturm-Liouville regular (\mathcal{L}, B_1, B_2) consiste de:

1) Um operador $\mathcal{L} : C^2([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ definido como

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{df}{dx}(x) \right) + p(x) f(x),$$

em que $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua estritamente positiva com valores reais, $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, com derivada contínua (ou seja, é C^1) que também é estritamente positiva e tem valores reais.

2) Duas condições de contorno B_1 e B_2 dadas por

$$B_1 f = \alpha_1 f(a) + \alpha'_1 \frac{df}{dx}(a) + \beta_1 f(b) + \beta'_1 \frac{df}{dx}(b),$$

$$B_2 f = \alpha_2 f(a) + \alpha'_2 \frac{df}{dx}(a) + \beta_2 f(b) + \beta'_2 \frac{df}{dx}(b),$$

em que

i) Os vetores $(\alpha_1, \alpha'_1, \beta_1, \beta'_1)$ e $(\alpha_2, \alpha'_2, \beta_2, \beta'_2)$ são linearmente independentes, ou seja, forem ambos não nulos e um não é múltiplo do outro.

ii) Se f e g são funções que satisfazem $B_1 f = B_2 f = B_1 g = B_2 g = 0$, então

$$r \left(\frac{df}{dx} \bar{g} - f \frac{d\bar{g}}{dx} \right) \Big|_a^b = 0.$$

Essas condições de contorno são chamadas de auto-adjuntas.

Vamos abaixo ver alguns exemplos de problemas de Sturm-Liouville e, quando for possível, calcular explicitamente uma base ortonormal de autovetores e os autovalores, cujas existências são garantidas pelo Teorema 41.

9.1. Condições de contorno auto-adjuntas

Vamos ver abaixo alguns exemplos de condições auto-adjuntas.

EXEMPLO 44. (Dirichlet) Consideramos o seguinte problema (\mathcal{L}, B_1, B_2) , em que \mathcal{L} é o operador da Definição (43) e as condições de contorno são as definidas abaixo

$$(9.1.1) \quad \begin{aligned} B_1 f &= 1f(a) + 0 \frac{df}{dx}(a) + 0f(b) + 0 \frac{df}{dx}(b) = f(a), \\ B_2 f &= 0f(a) + 0 \frac{df}{dx}(a) + 1f(b) + 0 \frac{df}{dx}(b) = f(b). \end{aligned}$$

Note que $(\alpha_1, \alpha'_1, \beta_1, \beta'_1) = (1, 0, 0, 0)$ e $(\alpha_2, \alpha'_2, \beta_2, \beta'_2) = (0, 0, 1, 0)$ são linearmente independentes. Note também que se $B_1 f = B_2 f = B_1 g = B_2 g = 0$, temos

$$\begin{aligned} r \left(\frac{df}{dx} \bar{g} - f \frac{d\bar{g}}{dx} \right) \Big|_a^b &= r(b) \left(\frac{df}{dx}(b) \bar{g}(b) - f(b) \frac{d\bar{g}}{dx}(b) \right) - r(a) \left(\frac{df}{dx}(a) \bar{g}(a) - f(a) \frac{d\bar{g}}{dx}(a) \right) \\ &= r(b) \left(\frac{df}{dx}(b) 0 - 0 \frac{d\bar{g}}{dx}(b) \right) - r(a) \left(\frac{df}{dx}(a) 0 - 0 \frac{d\bar{g}}{dx}(a) \right) = 0 \end{aligned}$$

Assim, as condições B_1 e B_2 são independentes e auto-adjuntas. Logo o problema (\mathcal{L}, B_1, B_2) é de Sturm-Liouville. A condição de contorno (B_1, B_2) definida em (9.1.1) é chamada de condição de Dirichlet. De fato, se $B_1 f = B_2 f = 0$, então

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Outra condição que vimos bastante até agora é a de Neumann:

EXEMPLO 45. (Condição de Neumann) Consideramos o problema (\mathcal{L}, B_1, B_2) , em que \mathcal{L} é o operador da Definição (43) e as condições de contorno são dadas por

$$(9.1.2) \quad \begin{aligned} B_1 f &= 0f(a) + 1 \frac{df}{dx}(a) + 0f(b) + 0 \frac{df}{dx}(b) = \frac{df}{dx}(a), \\ B_2 f &= 0f(a) + 0 \frac{df}{dx}(a) + 0f(b) + 1 \frac{df}{dx}(b) = \frac{df}{dx}(b). \end{aligned}$$

Note que $(\alpha_1, \alpha'_1, \beta_1, \beta'_1) = (0, 1, 0, 0)$ e $(\alpha_2, \alpha'_2, \beta_2, \beta'_2) = (0, 0, 0, 1)$ são linearmente independentes. Note também que se $B_1 f = B_2 f = B_1 g = B_2 g = 0$, temos

$$\begin{aligned} r \left(\frac{df}{dx} \bar{g} - f \frac{d\bar{g}}{dx} \right) \Big|_a^b &= r(b) \left(\frac{df}{dx}(b) \bar{g}(b) - f(b) \frac{d\bar{g}}{dx}(b) \right) - r(a) \left(\frac{df}{dx}(a) \bar{g}(a) - f(a) \frac{d\bar{g}}{dx}(a) \right) \\ &= r(b)(0\bar{g}(b) - f(b)0) - r(a)(0\bar{g}(a) - f(a)0) = 0. \end{aligned}$$

Assim, as condições B_1 e B_2 são independentes e auto-adjuntas. Logo o problema (\mathcal{L}, B_1, B_2) é de Sturm-Liouville. A condição de contorno (B_1, B_2) definida em (9.1.1) é chamada de condição de Neumann. De fato, se $B_1 f = B_2 f = 0$, então

$$\frac{df}{dx}(a) = \frac{df}{dx}(b) = 0.$$

Podemos generalizar as condições acima, considerando as seguinte condição

EXEMPLO 46. (Condições de Robin e mistas) Novamente, consideramos o problema (\mathcal{L}, B_1, B_2) , em que \mathcal{L} é o operador da Definição (43) e as condições de contorno

$$(9.1.3) \quad \begin{aligned} B_1 f &= \alpha_1 f(a) + \alpha'_1 \frac{df}{dx}(a) + 0f(b) + 0 \frac{df}{dx}(b) = \alpha_1 f(a) + \alpha'_1 \frac{df}{dx}(a), \\ B_2 f &= 0f(a) + 0 \frac{df}{dx}(a) + \beta_2 f(b) + \beta'_2 \frac{df}{dx}(b) = \beta_2 f(b) + \beta'_2 \frac{df}{dx}(b). \end{aligned}$$

Vamos supor que $\alpha_1, \alpha'_1, \beta_2$ e β'_2 são números reais tais que $|\alpha_1| + |\alpha'_1| \neq 0$ e $|\beta_2| + |\beta'_2| \neq 0$. Neste caso, $(\alpha_1, \alpha'_1, \beta_1, \beta'_1) = (\alpha_1, \alpha'_1, 0, 0)$ e $(\alpha_2, \alpha'_2, \beta_2, \beta'_2) = (0, 0, \beta_2, \beta'_2)$ são linearmente independentes. Note também que se $B_1 f = B_1 g = 0$, então $B_1 \bar{g} = 0$ e temos o sistema

$$\begin{pmatrix} f(a) & \frac{df}{dx}(a) \\ g(a) & \frac{dg}{dx}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como $(\alpha_1, \alpha'_1) \neq (0, 0)$, o sistema acima tem solução não nula. Logo

$$0 = \det \begin{pmatrix} f(a) & \frac{df}{dx}(a) \\ g(a) & \frac{dg}{dx}(a) \end{pmatrix} = f(a) \frac{dg}{dx}(a) - \frac{df}{dx}(a) g(a).$$

Usando o mesmo argumento para funções tais que $B_2 f = B_2 g = 0$, concluímos que

$$0 = \det \begin{pmatrix} f(b) & \frac{df}{dx}(b) \\ g(b) & \frac{dg}{dx}(b) \end{pmatrix} = f(b) \frac{dg}{dx}(b) - \frac{df}{dx}(b) g(b).$$

Assim,

$$\begin{aligned} r \left(\frac{df}{dx} \bar{g} - f \frac{d\bar{g}}{dx} \right) \Big|_a^b &= r(b) \left(\frac{df}{dx}(b) \bar{g}(b) - f(b) \frac{d\bar{g}}{dx}(b) \right) - r(a) \left(\frac{df}{dx}(a) \bar{g}(a) - f(a) \frac{d\bar{g}}{dx}(a) \right) \\ &= r(b)0 - r(a)0 = 0. \end{aligned}$$

Assim, as condições B_1 e B_2 são independentes e auto-adjuntas. Logo o problema (\mathcal{L}, B_1, B_2) é de Sturm-Liouville. Quando $\alpha_1, \alpha'_1, \beta_2$ e β'_2 forem todos diferentes de zero, a condição de contorno (B_1, B_2) definida em (9.1.3) é chamada de condição de Robin. De fato, se $B_1 f = B_2 f = 0$, então

$$\alpha_1 f(a) + \alpha'_1 \frac{df}{dx}(a) = 0 \text{ e } \beta_2 f(b) + \beta'_2 \frac{df}{dx}(b) = 0.$$

Note que no caso que $\alpha_1 = 1$, $\alpha'_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ e $\beta'_2 = 0$ reobtemos a condição de Dirichlet. Quando $\alpha_1 = 0$, $\alpha'_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ e $\beta'_2 = 1$, obtemos a condição de Neumann. Vemos que também podemos misturar as condições, usando Dirichlet em a e Neumann em b : $\alpha_1 = 1$, $\alpha'_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ e $\beta'_2 = 1$, ou usando Neumann em a e Dirichlet em b , e assim por diante.

Um tipo interessante de condição ocorre quando temos condições que misturam propriedades no ponto a e no ponto b . Uma típica condição desse tipo é a condição periódica.

EXEMPLO 47. (Condição periódica) Consideramos o problema (\mathcal{L}, B_1, B_2) , em que \mathcal{L} é o operador da Definição (43) com $r(a) = r(b)$. Vamos definir as condições

$$(9.1.4) \quad \begin{aligned} B_1 f &= 1f(a) + 0 \frac{df}{dx}(a) - 1f(b) + 0 \frac{df}{dx}(b) = 1f(a) - 1f(b), \\ B_2 f &= 0f(a) + 1 \frac{df}{dx}(a) + 0f(b) - 1 \frac{df}{dx}(b) = 1 \frac{df}{dx}(a) - 1 \frac{df}{dx}(b). \end{aligned}$$

Note que $(\alpha_1, \alpha'_1, \beta_1, \beta'_1) = (1, 0, -1, 0)$ e $(\alpha_2, \alpha'_2, \beta_2, \beta'_2) = (0, 1, 0, -1)$ são linearmente independentes. Note também que se $B_1 f = B_2 f = B_1 g = B_2 g = 0$, temos

$$\begin{aligned} r \left(\frac{df}{dx} \bar{g} - f \frac{d\bar{g}}{dx} \right) \Big|_a^b &= r(b) \left(\frac{df}{dx}(b) \bar{g}(b) - f(b) \frac{d\bar{g}}{dx}(b) \right) - r(a) \left(\frac{df}{dx}(a) \bar{g}(a) - f(a) \frac{d\bar{g}}{dx}(a) \right) \\ &= r(a) \left(\frac{df}{dx}(a) \bar{g}(a) - f(a) \frac{d\bar{g}}{dx}(a) \right) - r(a) \left(\frac{df}{dx}(a) \bar{g}(a) - f(a) \frac{d\bar{g}}{dx}(a) \right) = 0 \end{aligned}$$

Assim, as condições B_1 e B_2 são independentes e auto-adjuntas. Logo o problema (\mathcal{L}, B_1, B_2) é de Sturm-Liouville. A condição de contorno (B_1, B_2) definida em (9.1.1) é chamada de condição periódica. De fato, se $B_1 f = B_2 f = 0$, então

$$f(a) = f(b) \text{ e } \frac{df}{dx}(a) = \frac{df}{dx}(b).$$

9.2. Exemplos de autovalores e autovetores

Vamos agora considerar o caso em que $w = r = 1$ e $p = 0$. Além disso, vamos considerar o intervalo $[0, L]$. Assim,

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2}.$$

Vamos agora retomar todos os exemplos anteriores:

EXEMPLO 48. (Condição de Dirichlet) Neste caso, o problema de Sturm-Liouville se torna achar as soluções do problema abaixo:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda u, \quad u(0) = u(L) = 0.$$

Já vimos que, neste caso, temos:

$$\begin{aligned} \text{Autovalores: } \lambda_n &= -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \in \{1, 2, \dots\} \\ \text{Autovetores: } \phi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

O Teorema de Sturm-Liouville 41 nos diz que toda função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$ contínua por partes pode ser escrita como

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(y) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

em que o limite é no sentido L^2 . Essa é justamente a série de Fourier seno de f .

EXEMPLO 49. (Condição de Neumann) Neste caso, o problema de Sturm-Liouville se torna achar as soluções do problema abaixo:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda u, \quad \frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(L) = 0.$$

Já vimos que neste caso temos:

$$\begin{aligned} \text{Autovalores: } \lambda_0 &= 0 \text{ e } \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \in \{1, 2, \dots\} \\ \text{Autovetores: } \phi_0(x) &= \sqrt{\frac{1}{L}} \text{ e } \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in \{1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

O Teorema de Sturm-Liouville 41 nos diz que toda função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$ contínua por partes pode ser escrita como

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n = \left(\frac{1}{L} \int_0^L f(y) dy \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

em que o limite é no sentido L^2 . Essa é justamente a série de Fourier cosseno de f .

EXEMPLO 50. (Condição de Periódica) Neste caso, o problema de Sturm-Liouville se torna achar as soluções do problema abaixo:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda u, u(0) = u(L) \text{ e } \frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(L).$$

Já vimos que neste caso temos:

$$\begin{aligned} \text{Autovalores: } \quad \lambda_n &= -\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2, n \in \mathbb{Z} \\ \text{Autovetores: } \quad \phi_n(x) &= \sqrt{\frac{1}{L}} e^{i\frac{2\pi n x}{L}}, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

O Teorema de Sturm-Liouville 41 nos diz que toda função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$ contínua por partes pode ser escrita como

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{L}} \int_0^L f(y) e^{i\frac{2\pi n y}{L}} dy \right) e^{i\frac{2\pi n x}{L}},$$

em que o limite é no sentido L^2 . Essa é justamente a série de Fourier complexa, após uma mudança de coordenadas.

EXEMPLO 51. (Condição de Mista) Neste caso, o problema de Sturm-Liouville se torna achar as soluções do problema abaixo:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda u, u(0) = \frac{du}{dx}(L) = 0.$$

Já vimos que neste caso temos:

$$\begin{aligned} \text{Autovalores: } \quad \lambda_n &= -\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)^2, n \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ \text{Autovetores: } \quad \phi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right), n \in \{0, 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

Note que o termo $\sqrt{\frac{2}{L}}$ foi colocado de forma que as funções ϕ_n tenham norma igual a 1:

$$\begin{aligned} \int_0^L \text{sen}^2\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right) dx &= \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right)\right) dx \\ &= \frac{L}{2} + \frac{\text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right)}{2\frac{(2n+1)\pi}{L}} \Bigg|_0^L = \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

Sempre que estamos resolvendo um problema de Sturm-Liouville, não podemos deixar de multiplicar as funções por uma constante que as torna ortonormais. Caso contrário, aparecerão novas constante na expansão dada pelo Teorema de Sturm-Liouville 41.

O Teorema de Sturm-Liouville 41 aplicado ao problema acima nos diz que toda função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$ contínua por partes pode ser escrita como

$$(9.2.1) \quad f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(y) \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2L}\right) dy \right) \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right),$$

em que o limite é no sentido L^2 .

9.3. Aplicação

Vamos agora usar os conhecimentos acima para resolver o problema do dia 17 de abril. Queríamos resolver o problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & x \in [0, L] \end{cases}.$$

Vimos que a solução é dada por

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi vt}{2L} \right) - \frac{2L}{(2n+1)\pi v} g_n \cos \left(\frac{(2n+1)\pi vt}{2L} \right) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right),$$

em que f_n e g_n são determinados pelas expansões abaixo:

$$(9.3.1) \quad f(x) = u(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right)$$

e

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right).$$

Usando a expansão 9.3.1 e 9.2.1, vemos que

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sqrt{\frac{L}{2}} \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sqrt{\frac{L}{2}} \phi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} f_n &= \sqrt{\frac{2}{L}} \langle f, \phi_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L f(y) \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi y}{2L} \right) dy \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi y}{2L} \right) dy. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi y}{2L} \right) dy \text{ e } g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi y}{2L} \right) dy.$$

Principais ideias e conceitos dessa seção:

- 1) Vimos diversos exemplos de problemas de Sturm-Liouville, mostrando que muitos deles já haviam aparecido naturalmente nas aulas passadas.
- 2) Vimos que o Teorema de Liouville, ao garantir que uma função pode ser escrita em termos de autovetores, permite resolver diversas equações diferenciais, como a equação da onda com condição de contorno mista.

Aula do dia 6 de maio

A equação do calor e da onda em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Esta aula será dedicada ao estudo da equação do calor e da onda em dimensões $n \geq 2$. Até então só estudamos as equações definidas em um intervalo de \mathbb{R} , ou seja, em dimensão 1. Vamos agora entender os métodos e resultados necessários para a resolução de problemas em dimensões maiores do que 1.

Começaremos estudando a equação do calor e da onda com condições de Dirichlet em um aberto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, em que $n \in \mathbb{N}$. Na segunda etapa da aula, vamos usar o que aprendemos sobre o caso geral para obter soluções explícitas quando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um retângulo da forma

$$\Omega =]0, L_1[\times]0, L_2[.$$

10.1. O método de separação de variáveis para dimensões maiores do que 1

Abaixo vamos estudar a equação do calor e da onda em domínios gerais. Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e limitado com fronteira $\partial\Omega$. Intuitivamente, um aberto é conexo se ele consiste de apenas um pedaço e a fronteira $\partial\Omega$ é a beirada desse conjunto. A figura abaixo ilustra um típico exemplo.

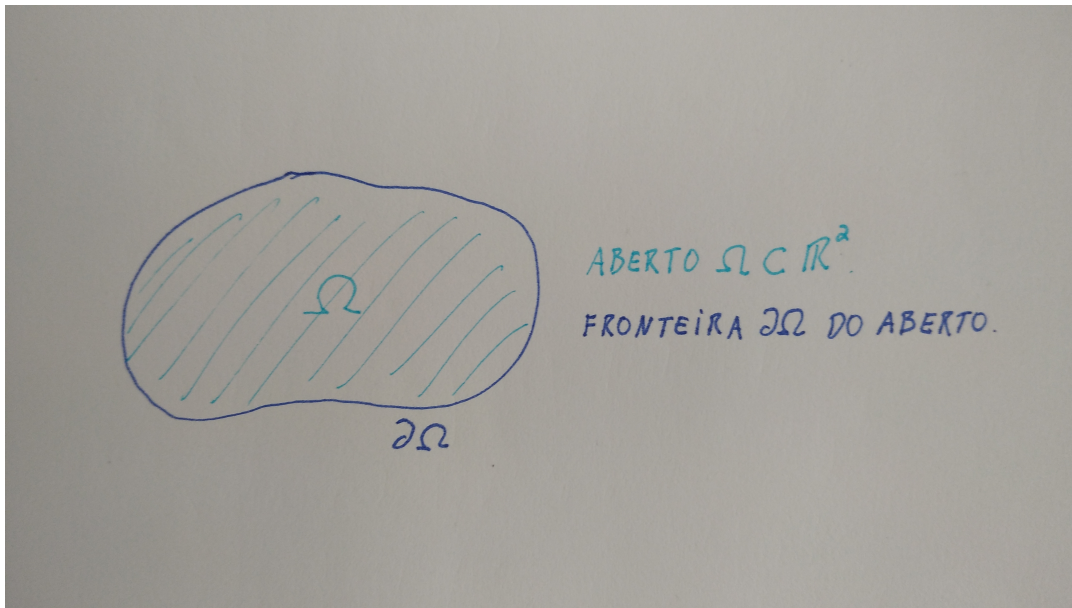


FIGURA 10.1.1

10.1.1. Equação do Calor. Consideremos a equação do calor abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \Delta u(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \\ u(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = f(x), & x \in \Omega \end{cases},$$

em que $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Vamos resolver a equação acima seguindo os três passos do método de separação de variáveis:

Primeiro Passo

Procuramos soluções da forma

$$u(t, x) = T(t) X(x),$$

em que $T : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Substituindo na equação do calor, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (T(t) X(x)) = \Delta (T(t) X(x)).$$

Assim, dividindo tudo por $T(t) X(x)$,

$$\frac{\frac{dT}{dt}(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} = \lambda$$

e obtemos as equações

$$\frac{dT}{dt}(t) = \lambda T(t),$$

$$\Delta X(x) = \lambda X(x).$$

Resolvendo as equações, concluímos que $T(t) = Ce^{\lambda t}$. Mas e quanto a X ? Precisamos ir ao segundo passo.

Segundo Passo

Vamos usar as condições de Dirichlet. Sabemos que $u(t, x) = 0$ quando $x \in \partial\Omega$. Logo quando $x \in \partial\Omega$, temos

$$T(t) X(x) = 0 \implies Ce^{\lambda t} X(x) = 0 \implies X(x) = 0.$$

Concluímos que o método de separação de variáveis nos leva ao seguinte problema: Ache todas as soluções $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e todas as constantes λ_n tais que:

$$(10.1.1) \quad \begin{cases} \Delta X_n &= \lambda_n X_n(x), & x \in \Omega \\ X_n(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}.$$

Terceiro Passo

Somando todas as soluções do segundo passo, temos

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n t} X_n(x),$$

em que $c_n \in \mathbb{R}$.

Devemos, por fim, determinar os coeficientes c_n através da condição inicial

$$u(0, x) = f(x).$$

Suponha que a função f possa ser escrita como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x),$$

em que $f_n \in \mathbb{R}$ e o limite deve ocorrer em alguma das formas estudadas (pontual, uniforme ou L^2). Assim, concluímos que a solução é dada por

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{\lambda_n t} X_n(x).$$

Vimos que para resolver a equação do calor, **devemos ser capazes de resolver o Problema (10.1.1)**. Além disso, este problema deve ter um conjunto grande de soluções para que toda função “razoável” f (contínua ou suave) possa ser escrita como uma soma infinita dessas soluções. A soma deve convergir de alguma das formas vistas nas aulas anteriores.

10.1.2. Equação da Onda. Vamos agora estudar a equação de onda. Consideremos o problema abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \Delta u(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \\ u(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \\ u(0, x) = f(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & x \in \Omega \end{cases},$$

em que $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Novamente, vamos aplicar os três passos do método de separação de variáveis.

Primeiro Passo

Procuramos soluções da forma

$$u(t, x) = T(t)X(x),$$

em que $T : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Substituindo na equação da onda, obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (T(t)X(x)) = \Delta (T(t)X(x)).$$

Assim, dividindo tudo por $T(t)X(x)$,

$$\frac{d^2 T}{dt^2}(t) = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} = \lambda$$

e obtemos as equações

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dt^2}(t) &= \lambda T(t), \\ \Delta X(x) &= \lambda X(x). \end{aligned}$$

Resolvendo as equações, concluímos que $T(t) = A \cos(\sqrt{-\lambda}t) + B \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}t)$, se $\lambda \neq 0$, e $T(t) = At + B$, se $\lambda = 0$. Para resolver X , precisamos ir ao segundo passo.

Segundo Passo

Vamos usar as condições de Dirichlet. Sabemos que $u(t, x) = 0$ quando $x \in \partial\Omega$. Logo quando $x \in \partial\Omega$, temos

$$T(t)X(x) = 0 \implies \left(A \cos(\sqrt{-\lambda}t) + B \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}t) \right) X(x) = 0 \implies X(x) = 0.$$

Obteríamos a mesma conclusão usando $T(t) = At + B$, para A ou B diferentes de zero.

Concluímos que o método de separação de variáveis nos leva ao Problema (10.1.1). Veremos que o Problema (10.1.1) não tem solução não nula para $\lambda = 0$. Logo podemos ignorar a solução $T(t) = At + B$.

Terceiro Passo

Somando todas as soluções do segundo passo, temos

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\sqrt{-\lambda_n}t) + b_n \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_n}t) \right) X_n(x).$$

Devemos, por fim, determinar os coeficientes c_n através das condições iniciais

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x).$$

Suponha que as função f e g possam ser escritas como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x) \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n X_n(x),$$

em que $f_n, g_n \in \mathbb{R}$ e o limite deve ocorrer em algumas das formas estudadas (pontual, uniforme ou L^2). Assim, concluímos que a solução é dada por

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \cos(\sqrt{-\lambda_n}t) + \frac{g_n}{\sqrt{-\lambda_n}} \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_n}t) \right) X_n(x).$$

Novamente todo o problema se torna resolver (10.1.1).

10.1.3. A equação de autovalores. Vamos voltar então a grande questão: O estudo do “problema de autovalores”: Ache todas as funções X_n e todas as constantes reais $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, que resolvem a Equação (10.1.1).

Em relação a este problema, vamos enunciar, mas não provar, o seguinte resultado. Note que ele é totalmente análogo ao problema principal de Sturm-Liouville!

TEOREMA 52. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Logo existe um conjunto infinito de funções não nulas $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$ em $C^\infty(\Omega)$ uma sequência de números reais $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que:*

- 1) *Os vetores ϕ_n e λ_n resolvem o Problema (10.1.1).¹*
- 2) *As funções são ortonormais, ou seja,*

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_{\Omega} \phi_n(x) \overline{\phi_m(x)} dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} .$$

Note que a integral aqui é em \mathbb{R}^n . Logo é uma integral dupla se $n = 2$, tripla, se $n = 3$, e assim por diante.

3) *Se $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua, então $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ no sentido L^2 , em que $\langle f, \phi_n \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{\phi_n(x)} dx$. Isto significa que:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \right|^2 dx = 0.$$

4) *Os elementos λ_n são estritamente negativos e $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = -\infty$.*

Chamamos o conjunto $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$ de base ortonormal de autofunções (ou autovetores) do problema de Dirichlet. Os elementos da sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são chamados de autovalores do problema.

EXEMPLO 53. Seja $\Omega =]0, L[$. Logo o Problema (10.1.1) se torna

$$\begin{cases} \frac{d^2 X_n}{dx^2}(x) &= \lambda_n X_n(x), & x \in]0, L[\\ X_n(0) &= X_n(L) = 0 \end{cases} .$$

Este problema já foi estudado em aulas anteriores. Para este problema, temos

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & n \in \mathbb{N} \\ \lambda_n &= -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, & n \in \mathbb{N} \end{aligned} .$$

OBSERVAÇÃO 54. Se $\partial\Omega$ for suficientemente regular, o Teorema 52 também é válido quando consideramos condições de Neumann e de Robin. Para condição de Neumann, o primeiro autovalor é 0 e a primeira autofunção é igual a $\frac{1}{\sqrt{\int_{\Omega} dx}}$, em que $\int_{\Omega} dx$ é o volume de Ω .

Aplicando o Teorema 10.1.1, concluímos que

1) A solução da equação do calor é dada por:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle e^{\lambda_n t} \phi_n(x).$$

2) A solução da equação da onda é dada por:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\langle f, \phi_n \rangle \cos\left(\sqrt{-\lambda_n} t\right) + \frac{\langle g, \phi_n \rangle}{\sqrt{-\lambda_n}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\lambda_n} t\right) \right) \phi_n(x).$$

Acima, temos

$$\langle f, \phi_n \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{\phi_n(x)} dx$$

e o análogo vale para g .

Vamos terminar a aula estudando o caso em que $\Omega =]0, L_1[\times]0, L_2[$ é um retângulo.

¹Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tiver uma fronteira suficientemente regular, as funções ϕ_n serão contínuas em $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. A regularidade da fronteira pode ser definida usando gráfico de funções suaves. Não faremos uma discussão disso nestas notas, pois seria técnico e longo (para quem se interessar, consulte livros de EDP, como o do L. Evans). Quando a fronteira é pouco regular, a interpretação da condição de Dirichlet $u|_{\partial\Omega}$ é mais delicada.

10.2. O problema de autovalores em $\Omega =]0, L_1[\times]0, L_2[$

Gostaríamos de resolver o Problema (10.1.1) num retângulo $\Omega =]0, L_1[\times]0, L_2[$. Neste caso, o problema se torna:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x, y) = \lambda \phi(x, y), & (x, y) \in]0, L_1[\times]0, L_2[\\ \phi(0, y) = \phi(L_1, y) = \phi(x, 0) = \phi(x, L_2) = 0, & (x, y) \in]0, L_1[\times]0, L_2[\end{cases}.$$

Para a solução, vamos usar, novamente!, o nosso já tão conhecido método de separação de variáveis.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções da forma:

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y).$$

Substituindo na equação, obtemos

$$\frac{\partial^2 (X(x)Y(y))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (X(x)Y(y))}{\partial y^2} = \lambda X(x)Y(y).$$

Logo, dividindo tudo por $X(x)Y(y)$,

$$\frac{\frac{d^2 X(x)}{dx^2}}{X(x)} + \frac{\frac{d^2 Y(y)}{dy^2}}{Y(y)} = \lambda.$$

Concluimos que

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\sigma^2 X(x), \quad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\alpha^2 Y(y) \quad \text{e} \quad -\alpha^2 - \sigma^2 = \lambda.$$

Desta maneira, temos que

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos(\sigma x) + B \sin(\sigma x), \quad \text{se } \sigma \neq 0, \quad \text{ou } Ax + B, \quad \text{se } \sigma = 0, \\ Y(y) &= C \cos(\alpha y) + D \sin(\alpha y), \quad \text{se } \alpha \neq 0, \quad \text{ou } Ay + B, \quad \text{se } \alpha = 0. \end{aligned}$$

Segundo Passo

Vamos usar as condições de contorno. Primeiramente, como

$$\phi(0, y) = \phi(L_1, y) = 0,$$

temos

$$X(0)Y(y) = X(L_1)Y(y) = 0 \implies X(0) = X(L_1) = 0.$$

As condições acima para $X(x) = Ax + B$ mostram que $X = 0$. Para $\sigma \neq 0$, temos

$$X(0) = 0 \implies A = 0.$$

Por outro lado

$$X(L_1) = 0 \implies B \sin(\sigma L_1) = 0 \implies \sigma = \frac{n\pi}{L_1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Concluimos que

$$X(x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right).$$

Agora vamos usar que

$$\phi(x, 0) = \phi(x, L_2) = 0,$$

temos

$$X(x)Y(0) = X(x)Y(L_2) = 0 \implies Y(0) = Y(L_2) = 0.$$

As condições acima para $Y(y) = Ay + B$ mostram que $Y = 0$. Para $\alpha \neq 0$, temos

$$Y(0) = 0 \implies C = 0.$$

Por outro lado

$$Y(L_2) = 0 \implies D \sin(\alpha L_2) = 0 \implies \alpha = \frac{m\pi}{L_2}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Concluimos que

$$Y(y) = a_m \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right).$$

Assim, as soluções encontradas são da forma

$$u_{nm}(x, y) = a_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L_1} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{L_2} \right), \quad n, m \in \mathbb{N},$$

em que $a_{mn} \in \mathbb{R}$.

Para determinar as constantes a_{mn} , devemos impor que as autofunções são normalizados, ou seja,

$$\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} a_{mn}^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{n\pi x}{L_1} \right) \operatorname{sen}^2 \left(\frac{m\pi y}{L_2} \right) dx dy = 1 \implies \frac{L_1 L_2}{4} a_{mn}^2 = 1 \implies a_{mn} = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Para achar os autovalores, notamos que

$$\lambda = -\alpha^2 - \sigma^2.$$

Poderíamos também simplesmente calcular $\Delta u_{nm}(x, y) = \lambda_{mn} u_{nm}(x, y)$.

Concluimos que

$$\text{Autovalores: } \lambda_{mn} = - \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right], \quad n, m \in \{1, 2, \dots\}$$

$$\text{Autovetores: } \phi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L_1} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{L_2} \right), \quad n, m \in \{1, 2, \dots\}$$

Vamos aplicar agora estes resultados às equações da onda e do calor:

1) A solução da equação do calor é dada por:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, \phi_{mn} \rangle e^{\lambda_{mn} t} \phi_{mn}(x, y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(r, s) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi r}{L_1} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi s}{L_2} \right) dr ds \right) e^{- \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right] t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L_1} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{L_2} \right). \end{aligned}$$

2) A solução da equação da onda é dada por:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\langle f, \phi_{mn} \rangle \cos(\sqrt{-\lambda_{mn}} t) + \frac{\langle g, \phi_{mn} \rangle}{\sqrt{-\lambda_{mn}}} \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{mn}} t) \right) \phi_{mn}(x, y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(r, s) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi r}{L_1} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi s}{L_2} \right) dr ds \right) \cos \left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2} t \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L_1} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{L_2} \right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} g(r, s) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi r}{L_1} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi s}{L_2} \right) dr ds \right)}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2} t \right) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L_1} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{L_2} \right). \end{aligned}$$

Principais ideias e conceitos dessa seção:

1) Vimos que podemos usar o método de separação de variáveis para buscar soluções da equação da onda e do calor em um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, para qualquer $n \geq 1$.

2) A grande dificuldade é resolver o seguinte problema de autovalores:

$$\begin{cases} \Delta \phi = \lambda \phi(x), & x \in \Omega \\ \phi(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}.$$

3) Vimos que um teorema garante que o problema de autovalores acima tem infinitos autovetores e autovalores. Além disso, toda função pode ser escrita em termos desses autovetores. Por fim, calculamos explicitamente esses autovetores no caso de um retângulo para resolver as equações da onda e do calor neste caso.

Aula do dia 8 de maio

A equação de Laplace

Vamos supor que a temperatura de um corpo que ocupa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é conhecida em sua fronteira $\partial\Omega$ e é dada por uma função $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que não depende do tempo. Assim, a equação que descreve a temperatura é dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \Delta u(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \\ u(t, x) = g(x), & (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \\ u(0, x) = f(x), & x \in \Omega \end{cases} .$$

Se o corpo estiver em equilíbrio térmico, então a temperatura não depende do tempo ($\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = 0$). Logo a função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deve satisfazer a seguinte equação:

$$(11.0.1) \quad \begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} ,$$

em que, como sempre, $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

A existência e a unicidade de soluções da equação acima pode ser provada para condições bastante gerais. Nesta aula, mostraremos como resolver a Equação (11.0.1) nas seguintes condições:

- i) $\Omega =]0, L[$. Segmento de reta.
- ii) $\Omega =]0, L_1[\times]0, L_2[$. Retângulo.
- iii) $\Omega = B_1(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$. Bola de raio 1.

11.1. Segmento de reta

Este é o caso mais simples. Temos

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2}(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(0) = g_0 \quad \text{e} \quad u(L) = g_1, & x \in \partial\Omega \end{cases} .$$

Assim,

$$u(x) = Ax + B.$$

Usando as condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} u(0) = g_0 &\implies B = g_0 \\ u(L) = g_1 &\implies AL + g_0 = g_1 \implies A = \frac{g_1 - g_0}{L} . \end{aligned}$$

Concluimos que a solução é dada por

$$u(x) = \frac{g_1 - g_0}{L}x + g_0.$$

11.2. Retângulo

Vamos agora resolver o problema num retângulo:

$$(11.2.1) \quad \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in]0, L_1[\times]0, L_2[\\ u(x, 0) = f_1(x), & x \in]0, L_1[\\ u(x, L_2) = f_2(x), & x \in]0, L_1[\\ u(0, y) = g_1(y), & y \in]0, L_2[\\ u(L_1, y) = g_2(y), & y \in]0, L_2[\end{cases} .$$

Para resolver o problema acima, considere os dois problemas abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_1(x, y) = 0, \quad (x, y) \in]0, L_1[\times]0, L_2[\\ u_1(x, 0) = f_1(x), \quad x \in]0, L_1[\\ u_1(x, L_2) = f_2(x), \quad x \in]0, L_1[\\ u_1(0, y) = 0, \quad y \in]0, L_2[\\ u_1(L_1, y) = 0, \quad y \in]0, L_2[\end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_2(x, y) = 0, \quad (x, y) \in]0, L_1[\times]0, L_2[\\ u_2(x, 0) = 0, \quad x \in]0, L_1[\\ u_2(x, L_2) = 0, \quad x \in]0, L_1[\\ u_2(0, y) = g_1(y), \quad y \in]0, L_2[\\ u_2(L_1, y) = g_2(y), \quad y \in]0, L_2[\end{array} \right.$$

É simples ver (mostre isso! É fácil) que $u_1 + u_2$, em u_1 e u_2 são soluções dos problemas acima, é solução do Problema (11.2.1), ou seja, $u = u_1 + u_2$. Note também que as equações para u_1 e u_2 são muito semelhantes. Apenas trocamos o papel de x e de y . Vamos, portanto, nos restringir ao estudo da equação para u_1 .

Vamos usar novamente o método de separação de variáveis. Aqui os 3 passos serão ligeiramente diferentes. note que não temos condição inicial. Assim, os passos serão: procurar soluções da forma $X(x)Y(y)$. Depois usar as condições de contorno iguais a zero e, por fim, usar as condições de contorno diferentes de zero.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções da forma:

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Substituindo na equação, obtemos

$$\frac{\partial^2 (X(x)Y(y))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (X(x)Y(y))}{\partial y^2} = 0.$$

Logo, dividindo tudo por $X(x)Y(y)$,

$$\frac{\frac{d^2 X(x)}{dx^2}}{X(x)} = -\frac{\frac{d^2 Y(y)}{dy^2}}{Y(y)} = \lambda.$$

Concluimos que

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \lambda X(x), \quad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\lambda Y(y).$$

Assim, as soluções tanto de X e de Y serão da forma:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B \sin(\sqrt{-\lambda}x), \text{ se } \lambda \neq 0, \text{ ou } X(x) = Ax + B, \text{ se } \lambda = 0.$$

$$Y(y) = A \cos(\sqrt{\lambda}y) + B \sin(\sqrt{\lambda}y), \text{ se } \lambda \neq 0, \text{ ou } Y(y) = Ay + B, \text{ se } \lambda = 0.$$

Segundo Passo

Vamos usar agora as condições de contorno que dão zero, ou seja:

$$u_1(0, y) = 0, y \in]0, L_2[\text{ e } u_1(L_1, y) = 0, y \in]0, L_2[.$$

Logo

$$X(0)Y(y) = 0, y \in]0, L_2[\implies X(0) = 0,$$

$$X(L_1)Y(y) = 0, y \in]0, L_2[\implies X(L_1) = 0.$$

Se $X(x) = Ax + B$, as condições acima nos dizem que $X = 0$. Se $\lambda \neq 0$, então

$$X(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

Assim,

$$X(0) = 0 \implies A = 0.$$

$$X(L_1) = 0 \implies B \sin(\sqrt{-\lambda}L_1) = 0 \implies \lambda = -\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2.$$

Concluimos que

$$X_n(x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Vamos agora achar Y . Se $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2$, então

$$Y_n(y) = A \cosh\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right) + B \sinh\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right).$$

Note que acima usamos seno e cosseno hiperbólico.¹
Obtemos até agora funções da forma:

$$u_n(x, y) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \left(a_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right) \right).$$

Terceiro Passo

Vamos usar agora as condições de contorno não nulas, ou seja:

$$u_1(x, 0) = f_1(x), \quad x \in]0, L_1[$$

$$u_1(x, L_2) = f_2(x), \quad x \in]0, L_1[$$

Vamos procurar uma solução da forma:

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \left(a_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right) \right).$$

Usando as condições de contorno, temos

$$u_1(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) = f_1(x).$$

Assim, através de nosso conhecimento sobre série de Fourier seno, temos

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(s) \text{sen}\left(\frac{n\pi s}{L_1}\right) ds.$$

Por outro lado,

$$u_1(x, L_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \left(a_n \cosh\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right) \right) = f_2(x).$$

Logo

$$a_n \cosh\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right) = \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} f_2(s) \text{sen}\left(\frac{n\pi s}{L_1}\right) ds.$$

Portanto,

$$b_n = \frac{\frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} f_2(s) \text{sen}\left(\frac{n\pi s}{L_1}\right) ds - \left(\frac{2}{L} \int_0^L f_1(s) \text{sen}\left(\frac{n\pi s}{L_1}\right) ds\right) \cosh\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right)}.$$

Concluimos que

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \left[\left(\frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} f_2(s) \text{sen}\left(\frac{n\pi s}{L_1}\right) ds \right) \cosh\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right) + \frac{\frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} f_2(s) \text{sen}\left(\frac{n\pi s}{L_1}\right) ds - \left(\frac{2}{L} \int_0^L f_1(s) \text{sen}\left(\frac{n\pi s}{L_1}\right) ds\right) \cosh\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right)} \sinh\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right) \right].$$

¹Vamos lembrar do seno e do cosseno hiperbólico. Eles são definidos da seguinte forma:

$$\text{senh}(\theta) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \text{cosh}(\theta) = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}.$$

Assim, $\text{senh}(\theta) = -i \text{sen}(i\theta)$ e $\text{cosh}(\theta) = \cos(i\theta)$

11.3. Bola

Para estudar a equação numa bola é conveniente usar coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned}$$

Nestas coordenadas, podemos mostrar (veja o apêndice) que o laplaciano é escrito como

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Assim, o Problema (11.0.1) numa bola $B_1(0)$ é dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0, & (r, \theta) \in]0, 1[\times]-\pi, \pi[\\ u(1, \theta) = g(\theta), & \theta \in]-\pi, \pi[\end{cases}$$

Vamos agora usar o método de separação de variáveis. Note que os pontos em que $\theta = -\pi$ correspondem aos mesmos pontos em que $\theta = \pi$. Assim, devemos ter

$$(11.3.1) \quad u(r, -\pi) = u(r, \pi) \text{ e } \frac{du}{d\theta}(r, -\pi) = \frac{du}{d\theta}(r, \pi).$$

Além disso, gostaríamos de achar soluções contínuas no interior. Logo

$$(11.3.2) \quad \lim_{r \rightarrow 0} u(r, \theta)$$

deve existir.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções da forma $u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$. Assim, temos

$$\frac{d^2 R}{dr^2}(r) \Theta(\theta) + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr}(r) \Theta(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r) \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}(\theta) = 0.$$

Logo, dividindo tudo por $R(r) \Theta(\theta)$,

$$\frac{r^2 \frac{d^2 R}{dr^2}(r) + r \frac{dR}{dr}(r)}{R(r)} = -\frac{\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda.$$

Assim

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}(\theta) = -\lambda \Theta(\theta) \text{ e } r^2 \frac{d^2 R}{dr^2}(r) + r \frac{dR}{dr}(r) = \lambda R(r).$$

Logo

$$\Theta(\theta) = A\theta + B \text{ ou } \Theta(\theta) = Ae^{i\sqrt{\lambda}\theta} + Be^{-i\sqrt{\lambda}\theta}.$$

Poderíamos escrever $\Theta(\theta)$ em função de senos e cossenos e também obteríamos o resultado correto. Aqui vamos preferir usar exponenciais complexas, pois elas facilitam a prova da fórmula de Poisson, que será vista mais a frente.

Vamos agora resolver

$$(11.3.3) \quad r^2 \frac{d^2 R}{dr^2}(r) + r \frac{dR}{dr}(r) = \lambda R(r).$$

Vamos procurar soluções da forma r^α . Logo

$$r^2 \alpha(\alpha - 1) r^{\alpha-2} + r \alpha r^{\alpha-1} = \alpha r^\alpha \implies \alpha(\alpha - 1) r^\alpha + \alpha r^\alpha = \lambda r^\alpha.$$

Assim

$$\alpha^2 = \lambda \implies \alpha = \pm\sqrt{\lambda}$$

e

$$R(r) = Ar^{\sqrt{\lambda}} + Br^{-\sqrt{\lambda}}.$$

Quando $\lambda = 0$, temos que $\ln(r)$ também é solução da Equação (11.3.3), como se pode verificar facilmente.

Logo

$$R(r) = A + B \ln(r).$$

Segundo Passo

Vamos impor as Condições (11.3.1) e (11.3.2).

A Condição (11.3.1) implica que

$$u(r, -\pi) = u(r, \pi) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi) \iff \Theta(-\pi) = \Theta(\pi) \text{ e } \frac{d\Theta}{d\theta}(-\pi) = \frac{d\Theta}{d\theta}(\pi)$$

Se $\Theta(\theta) = A + B\theta$, então $A - \pi B = A + \pi B$, ou seja, $B = 0$ e Θ é uma função constante.

Se $\Theta(\theta) = Ae^{i\sqrt{\lambda}\theta} + Be^{-i\sqrt{\lambda}\theta}$, então

$$\begin{aligned} \Theta(-\pi) = \Theta(\pi) &\implies Ae^{-i\sqrt{\lambda}\pi} + Be^{i\sqrt{\lambda}\pi} = Ae^{i\sqrt{\lambda}\pi} + Be^{-i\sqrt{\lambda}\pi}, \\ \frac{d\Theta}{d\theta}(-\pi) = \frac{d\Theta}{d\theta}(\pi) &\implies Ai\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} - Bi\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}\pi} = Ai\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}\pi} - Bi\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}\pi}. \end{aligned}$$

Assim, devemos ter

$$\begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} - e^{i\sqrt{\lambda}\pi} & e^{i\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} \\ i\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} - i\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}\pi} & -i\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}\pi} + i\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -2i\frac{e^{i\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-i\sqrt{\lambda}\pi}}{2i} & 2i\frac{e^{i\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-i\sqrt{\lambda}\pi}}{2i} \\ 2\sqrt{\lambda}\frac{e^{i\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-i\sqrt{\lambda}\pi}}{2i} & 2\sqrt{\lambda}\frac{e^{i\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-i\sqrt{\lambda}\pi}}{2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{pmatrix} -2i\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) & 2i\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) \\ 2\sqrt{\lambda}\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) & 2\sqrt{\lambda}\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para existir uma solução (A, B) não nula, devemos ter

$$\det \begin{pmatrix} -2i\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) & 2i\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) \\ 2\sqrt{\lambda}\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) & 2\sqrt{\lambda}\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) \end{pmatrix} = 0 \implies -8i\sqrt{\lambda}\text{sen}^2(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

A condição acima é verdadeira se, e somente se, $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi \implies \lambda = n^2$.

Assim, as soluções encontradas são

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) = (Ar^n + Br^{-n})(Ce^{in\theta} + De^{-in\theta}), \quad n \neq 0,$$

e para $\lambda = n = 0$, temos

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) = (A + B \ln(r)).$$

Usando agora a Condição (11.3.2), devemos descartar os termos r^{-n} e $\ln(r)$. Logo, as soluções encontradas são

$$\begin{aligned} u_0(r, \theta) &= c_0 \\ u_n(r, \theta) &= r^n (c_n e^{in\theta} + c_{-n} e^{-in\theta}), \quad n \in \{1, 2, \dots\}, \end{aligned}$$

em que $c_n \in \mathbb{C}$, para $n \in \mathbb{Z}$.

Terceiro Passo

Nosso terceiro passo será o uso da condição de contorno

$$u(1, \theta) = g(\theta).$$

Somando todas as soluções particulares, obtemos

$$u(r, \theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n e^{in\theta} + c_{-n} e^{-in\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Logo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = g(\theta).$$

Logo usando a série de Fourier, concluímos que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Assim, a solução do problema é dada por

$$(11.3.4) \quad u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi \right) r^{|n|} e^{in\theta}.$$

11.3.1. Fórmula de Poisson. A solução que obtemos anteriormente para a equação de Laplace na bola unitária pode ser escrita numa forma muito simples, que chamamos de fórmula de Poisson. Nesta seção, vamos deduzir essa expressão. Partindo da Fórmula (11.3.4), vamos passar a soma para dentro da integral², e obter

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-\varphi)} \right) d\varphi.$$

Para simplificar a expressão acima, vamos usar a seguinte fórmula: para $|z| < 1$, $z \in \mathbb{C}$, temos

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\theta} \\ &= \frac{1}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}} = \frac{1-re^{-i\theta} + re^{-i\theta}(1-re^{i\theta})}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} = \frac{1-re^{-i\theta} + re^{-i\theta} - r^2}{1-re^{i\theta} - re^{-i\theta} + r^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta) + r^2}. \end{aligned}$$

Concluimos, por fim, que

$$(11.3.5) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi) + r^2} g(\varphi) d\varphi.$$

A Fórmula (11.3.5) é chamada de **fórmula de Poisson**.

11.4. Apêndice: O laplaciano em coordenadas polares

Nesta última parte, vamos deduzir o Laplaciano em coordenadas polares. Vamos usar $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ e a regra da cadeia para obter

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial y} = \cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial y} = -r \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial x} + r \cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Em termos matriciais, temos

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Invertendo a matriz quadrada acima, concluimos que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ r \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ &= \left(\cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2(\theta) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} - \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

²Isso é possível, devido à convergência uniforme em compactos do interior da bola. Mas não faremos uma justificativa detalhada aqui.

Principais resultados e ideias dessa seção:

1) Vimos que a equação de Laplace aparece naturalmente quando estudamos corpos em equilíbrio térmico. (Na verdade, também em muitos outros contextos).

2) Vimos como resolver a equação de Laplace com condições de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

nos seguintes casos: segmento de reta, retângulo e bola. Para tanto, novamente usamos o método de separação de variáveis.

3) Vimos que no caso da bola, devemos usar coordenadas polares. Escrevemos o Laplaciano nessas coordenadas e obtemos a solução, novamente pelo método de separação de variáveis. A solução pode ser escrita de forma simples através da fórmula de Poisson.

Aula do dia 13 de maio

Mais um exemplo de equação de Laplace em coordenadas polares

Nesta aula, estudaremos a equação de Laplace em mais uma região, onde as coordenadas polares são úteis. Descrevemos o espaço \mathbb{R}^2 usando as coordenadas r e θ definidas como $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$. A região considerada será descrita, por coordenadas polares, da seguinte maneira:

$$\Omega = \{(r, \theta) \in]r_0, r_1[\times]0, \beta[\},$$

em que $r_1 > r_0 > 0$ e $\beta \in]0, 2\pi[$. Nosso objetivo é resolver a equação de Laplace nesta região:

$$(12.0.1) \quad \begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} .$$

No caso em que $r_0 = 1$, $r_1 = 2$ e $\beta = \frac{\pi}{4}$, a região pode ser vista abaixo. Ela corresponde a região entre as linhas cheias. A linha pontilhada só mostra que o ângulo é $\frac{\pi}{4}$:

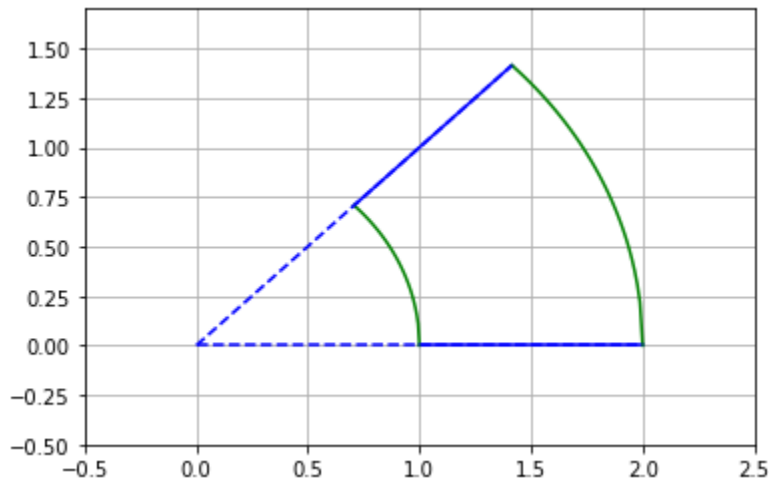


FIGURA 12.0.1

Nas coordenadas r e θ , a Equação (12.0.1) pode ser escrita como:

$$(12.0.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0, & (r, \theta) \in \Omega \\ u(r_0, \theta) = g(\theta), & \theta \in]0, \beta[\\ u(r_1, \theta) = f(\theta), & \theta \in]0, \beta[\\ u(r, 0) = h(r), & r \in]r_0, r_1[\\ u(r, \beta) = k(r), & r \in]r_0, r_1[\end{cases} .$$

O problema acima pode ser dividido em dois problemas mais simples, assim como fizemos com a equação de Laplace num retângulo. Vamos considerar os seguintes problemas:

$$(12.0.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0, \quad (r, \theta) \in \Omega \\ v(r_0, \theta) = g(\theta), \quad \theta \in]0, \beta[\\ v(r_1, \theta) = f(\theta), \quad \theta \in]0, \beta[\\ v(r, 0) = 0, \quad r \in]r_0, r_1[\\ v(r, \beta) = 0, \quad r \in]r_0, r_1[\end{array} \right. ,$$

$$(12.0.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0, \quad (r, \theta) \in \Omega \\ w(r_0, \theta) = 0, \quad \theta \in]0, \beta[\\ w(r_1, \theta) = 0, \quad \theta \in]0, \beta[\\ w(r, 0) = h(r), \quad r \in]r_0, r_1[\\ w(r, \beta) = k(r), \quad r \in]r_0, r_1[\end{array} \right. .$$

Logo, se v e w são soluções das equações acima, é simples (faça como exercício! É fácil.) verificar que

$$u = v + w$$

é solução da Equação (12.0.2). Aqui, no entanto, vemos que as equações de contorno para v e w levam realmente a situações diferentes. Não basta trocar r por θ , já que o laplaciano depende de r e de θ de maneiras diferentes. Vamos, então, precisar resolver as duas equações acima.

12.0.1. Resolvendo a equação para v . Nesta subseção vamos resolver a Equação (12.0.3). Nosso método é o de sempre: separação de variáveis. Vamos usar três passos. No primeiro procuramos soluções da forma $R(r)\Theta(\theta)$. No segundo usamos as condições de contorno iguais a zero. Por fim, no último, somamos todas as soluções particulares obtidas e usamos as condições de contorno diferentes de zero.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções da forma $v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Substituindo na equação de Laplace, temos

$$\frac{d^2 R}{dr^2}(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr}(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r) \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}(\theta) = 0.$$

Dividindo tudo por $R(r)\Theta(\theta)$, obtemos

$$\frac{r^2 \frac{d^2 R}{dr^2}(r) + r \frac{dR}{dr}(r)}{R(r)} = - \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}(\theta) = \lambda.$$

Assim,

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}(\theta) = -\lambda \Theta(\theta) \quad \text{e} \quad r^2 \frac{d^2 R}{dr^2}(r) + r \frac{dR}{dr}(r) = \lambda R(r).$$

Logo

$$\begin{array}{ll} \Theta(\theta) = A\theta + B, & \text{se } \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \Theta(\theta) = A \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B \sin(\sqrt{\lambda}\theta), \quad \text{se } \lambda \neq 0, \\ R(r) = A + B \ln(r), & \text{se } \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad R(r) = Ar^{\sqrt{\lambda}} + Br^{-\sqrt{\lambda}}, \quad \text{se } \lambda \neq 0. \end{array}$$

Segundo Passo

Vamos impor as condições de contorno que são iguais a zero:

$$\left\{ \begin{array}{l} v(r, 0) = 0, \quad r \in]r_0, r_1[\\ v(r, \beta) = 0, \quad r \in]r_0, r_1[\end{array} \right. .$$

Logo, devemos ter

$$R(r)\Theta(0) = R(r)\Theta(\beta) = 0, \quad \forall r \in]r_0, r_1[,$$

ou seja,

$$\Theta(0) = \Theta(\beta) = 0.$$

Assim, se $\Theta(\theta) = A\theta + B$, temos

$$\begin{array}{lll} \Theta(0) = 0 & \implies & A0 + B = 0 \implies B = 0 \\ \Theta(\beta) = 0 & \implies & A\beta = 0 \implies A = 0 \end{array} .$$

Portanto, não existe solução Θ não nula. Portanto, basta considerar $\Theta(\theta) = A \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\theta)$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \Theta(0) = 0 &\implies A = 0 \\ \Theta(\beta) = 0 &\implies B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\beta) = 0 \implies \lambda = \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2, n \in \{1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

As soluções particulares obtidas são:

$$v_n(r, \theta) = \left(a_n r^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} + b_n r^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right).$$

Terceiro Passo

Vamos agora somar todas as soluções obtidas

$$v(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} + b_n r^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right).$$

Usaremos as as condições de contorno que são diferentes de zero para determinar as constantes a_n e b_n :

$$\begin{cases} v(r_0, \theta) = g(\theta), & \theta \in]0, \beta[\\ v(r_1, \theta) = f(\theta), & \theta \in]0, \beta[\end{cases}.$$

Aplicando as condições acima, concluímos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r_0^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} + b_n r_0^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right) &= g(\theta) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r_1^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} + b_n r_1^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right) &= f(\theta) \end{aligned}.$$

Usando nosso conhecimento de séries de Fourier seno sobre o intervalo $]0, \beta[$, concluímos que

$$\begin{aligned} a_n r_0^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} + b_n r_0^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} &= \frac{2}{\beta} \int_0^\beta g(\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right) d\theta \\ a_n r_1^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} + b_n r_1^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} &= \frac{2}{\beta} \int_0^\beta f(\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right) d\theta \end{aligned}.$$

Resolvendo essa equação para a_n e b_n , concluímos que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\left(r_1^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} \frac{2}{\beta} \int_0^\beta g(\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right) d\theta - r_0^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} \frac{2}{\beta} \int_0^\beta f(\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right) d\theta \right)}{\left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} - \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}} \\ b_n &= \frac{\left(-r_1^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} \frac{2}{\beta} \int_0^\beta g(\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right) d\theta + r_0^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} \frac{2}{\beta} \int_0^\beta f(\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right) d\theta \right)}{\left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} - \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}}. \end{aligned}$$

12.0.2. Resolvendo a equação para w . Vamos agora resolver a Equação (12.0.4). Novamente faremos os mesmos passos.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções da forma $w(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Como visto anteriormente, temos soluções da forma

$$w(r, \theta) = (A\theta + B)(C + D \ln(r))$$

ou, para $\lambda \neq 0$, da forma

$$w(r, \theta) = \left(A \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\theta) \right) \left(Cr^{\sqrt{\lambda}} + Dr^{-\sqrt{\lambda}} \right).$$

Segundo Passo

Vamos impor as condições de contorno que são iguais a zero:

$$\begin{cases} w(r_0, \theta) = 0, & \theta \in]0, \beta[\\ w(r_1, \theta) = 0, & \theta \in]0, \beta[\end{cases}.$$

Logo, devemos ter

$$R(r_0)\Theta(\theta) = R(r_1)\Theta(\theta) = 0, \forall \theta \in]0, \beta[,$$

ou seja,

$$R(r_0) = R(r_1) = 0.$$

Assim, se $R(r) = C + D \ln(r)$, então

$$C + D \ln(r_0) = C + D \ln(r_1) = 0.$$

Logo

$$D(\ln(r_0) - \ln(r_1)) = 0 \implies D = 0.$$

Por outro lado,

$$0 = C + D \ln(r_0) = C.$$

Assim, não existe solução não nula. Portanto, basta considerarmos soluções da forma $R(r) = Cr^{\sqrt{\lambda}} + Dr^{-\sqrt{\lambda}}$, para $\lambda \neq 0$. Usando que $R(r_0) = R(r_1) = 0$, temos

$$Cr_0^{\sqrt{\lambda}} + Dr_0^{-\sqrt{\lambda}} = Cr_1^{\sqrt{\lambda}} + Dr_1^{-\sqrt{\lambda}} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} r_0^{\sqrt{\lambda}} & r_0^{-\sqrt{\lambda}} \\ r_1^{\sqrt{\lambda}} & r_1^{-\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para obter solução não nula, o determinante da matriz acima deve ser nulo:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} r_0^{\sqrt{\lambda}} & r_0^{-\sqrt{\lambda}} \\ r_1^{\sqrt{\lambda}} & r_1^{-\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} = 0 &\iff r_0^{\sqrt{\lambda}} r_1^{-\sqrt{\lambda}} = r_0^{-\sqrt{\lambda}} r_1^{\sqrt{\lambda}} \iff \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2\sqrt{\lambda}} = 1 \\ \iff e^{2\sqrt{\lambda} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} = 1 &\iff 2\sqrt{\lambda} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) = 2n\pi i, n \in \mathbb{N} \iff \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi i}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Para essas constantes λ , vamos procurar C e D adequados. Devemos ter¹

$$\begin{aligned} R(r) &= Cr^{-\frac{n\pi i}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}} + Dr^{\frac{n\pi i}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}} = Ce^{-i\frac{n\pi \ln(r)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}} + De^{i\frac{n\pi \ln(r)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}} \\ &= \tilde{C} \cos\left(\frac{n\pi(\ln(r) - \ln(r_0))}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) + \tilde{D} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(\ln(r) - \ln(r_0))}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right). \end{aligned}$$

Assim, $R(r_0) = 0$ implica que

$$0 = \tilde{C} \cos\left(\frac{n\pi(\ln(r_0) - \ln(r_0))}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) + \tilde{D} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(\ln(r_0) - \ln(r_0))}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) = \tilde{C}.$$

Concluimos que

$$R(r) = \tilde{D} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right).$$

Note que a equação acima automaticamente satisfaz $R(r_1) = 0$.

Assim, as soluções encontradas são

$$w_n(r, \theta) = \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) \left(\tilde{A}_n \cos\left(\frac{n\pi i}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\theta\right) + \tilde{B}_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi i}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\theta\right) \right)$$

¹Aqui estamos escrevendo $Ce^{i\theta} + De^{-i\theta}$ como $Ce^{i\varphi}e^{i(\theta-\varphi)} + De^{-i\varphi}e^{-i(\theta-\varphi)}$. Usando a fórmula de Euler, concluímos que dadas constantes C, D e φ , existem constantes \tilde{C} e \tilde{D} tais que

$$Ce^{i\theta} + De^{-i\theta} = \tilde{C} \cos(\theta - \varphi) + \tilde{D} \operatorname{sen}(\theta - \varphi).$$

Nas contas acima, usamos $\varphi = -\frac{n\pi \ln(r_0)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}$.

$$\operatorname{sen} \left(n\pi \frac{\ln \left(\frac{r}{r_0} \right)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \right) \left(A_n \cosh \left(\frac{n\pi}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \theta \right) + B_n \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \theta \right) \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Terceiro Passo

Vamos agora somar todas as soluções particulares obtidas e usar as condições de contorno que não são iguais a zero.

$$w(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(n\pi \frac{\ln \left(\frac{r}{r_0} \right)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \right) \left(A_n \cosh \left(\frac{n\pi}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \theta \right) + B_n \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \theta \right) \right).$$

Sabemos que

$$\begin{cases} w(r, 0) = h(r), & r \in]r_0, r_1[\\ w(r, \beta) = k(r), & r \in]r_0, r_1[\end{cases}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \left(n\pi \frac{\ln \left(\frac{r}{r_0} \right)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \right) &= h(r) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(n\pi \frac{\ln \left(\frac{r}{r_0} \right)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \right) \left(A_n \cosh \left(\frac{n\pi\beta}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \right) + B_n \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi\beta}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \right) \right) &= k(r). \end{aligned}$$

Como podemos determinar A_n e B_n ? Devemos usar nosso conhecimento sobre problemas de Sturm-Liouville. Consideremos o problema

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} (r) \right) &= \lambda R(r) \\ R(r_0) &= 0 \\ R(r_1) &= 0 \end{aligned}.$$

Note que $r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} (r) \right) = r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} (r) + r \frac{dR}{dr} (r)$ e a equação acima é exatamente a equação que resolvemos anteriormente. (Compare com a Equação (8.2.1) da aula do dia 22 de abril e note que aqui $a = r_0$, $b = r_1$, $w(x) = r(x) = x$ e $f(x) = 0$)

Vimos que as soluções são dadas por

$$R_n(r) = C_n \operatorname{sen} \left(n\pi \frac{\ln \left(\frac{r}{r_0} \right)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \right), \quad \lambda_n = - \left(\frac{n\pi}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \right)^2.$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{r_1} R_n(r) R_m(r) \frac{dr}{r} &= C_n C_m \int_{r_0}^{r_1} \operatorname{sen} \left(n\pi \frac{\ln \left(\frac{r}{r_0} \right)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \right) \operatorname{sen} \left(m\pi \frac{\ln \left(\frac{r}{r_0} \right)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \right) \frac{1}{r} dr \\ &\stackrel{(1)}{=} C_n C_m \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi y) \operatorname{sen}(m\pi y) dy = C_n C_m \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) \delta_{mn}. \end{aligned}$$

em que em (1) fizemos a mudança de coordenadas $y = \frac{\ln \left(\frac{r}{r_0} \right)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} dy = \frac{1}{r \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} dr$.

Se escolhermos $C_n = \frac{1}{\sqrt{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)}}$, para todo n , concluímos que R_n são funções ortonormais em relação ao produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{r_0}^{r_1} f(r) g(r) \frac{dr}{r}.$$

Pelo Teorema de Sturm-Liouville (Teorema 41 da aula do dia 22 de abril), toda função f contínua por partes pode ser escrita como

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle R_n, f \rangle R_n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} h(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) h(s) \frac{ds}{s} \right) \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} \left(\int_{r_0}^{r_1} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) h(s) \frac{ds}{s} \right) \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right). \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) = h(r) \implies A_n = \frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} \left(\int_{r_0}^{r_1} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) h(s) \frac{ds}{s} \right).$$

e

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) \left(A_n \cosh\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) + B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) \right) = k(r). \\ \implies &\left(A_n \cosh\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) + B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) \right) = \frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} \left(\int_{r_0}^{r_1} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) k(s) \frac{ds}{s} \right). \\ B_n &= \frac{\frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} \left[\left(\int_{r_0}^{r_1} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) k(s) \frac{ds}{s} \right) - \left(\int_{r_0}^{r_1} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) h(s) \frac{ds}{s} \right) \cosh\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) \right]}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)}. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} w(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) \left[\frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} \left(\int_{r_0}^{r_1} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) h(s) \frac{ds}{s} \right) \cosh\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\theta\right) \right. \\ &\left. + \frac{\frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} \left[\left(\int_{r_0}^{r_1} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) k(s) \frac{ds}{s} \right) - \left(\int_{r_0}^{r_1} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) h(s) \frac{ds}{s} \right) \cosh\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) \right]}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\theta\right) \right]. \end{aligned}$$

Principais resultados e ideias dessa seção:

- 1) Vimos mais um exemplo de equação de Laplace com coordenadas polares.
- 2) Para resolver o problema, dividimo-lo em 2 problemas mais simples.
- 3) A técnica de resolução para ambos os problemas foi a mesma: separação de variáveis. Os passos foram:
 Passo 1) Procuramos soluções da forma $R(r)\Theta(\theta)$.
 Passo 2) Usamos as condições de contorno que são iguais a zero.
 Passo 3) Somamos todas as soluções particulares que obtivemos no passo 2 e usamos as condições de contorno que não são nulas.

Aula do dia 15 de maio

Funções de Bessel

Nessa aula apresentaremos uma introdução (muito rápida!) das funções de Bessel. Elas aparecem naturalmente no estudo do problema de autovalores do laplaciano em coordenadas polares.

13.1. A equação de onda na bola $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$

Vamos começar com uma motivação: o estudo das vibrações da membrana de um tambor. Para isto, representamos o tambor pelo conjunto $B_1(0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ e estudamos a equação de onda sobre $B_1(0)$. A solução $u = u(t, x)$ da equação descreve o deslocamento transversal da membrana em relação ao tambor no instante t e no ponto $x = (x_1, x_2) \in B_1(0)$.

Lembramos que a equação da onda é dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \Delta u(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times B_1(0) \\ u(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \partial B_1(0) \\ u(0, x) = f(x), & x \in B_1(0) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & x \in B_1(0) \end{cases}.$$

Aqui usamos condições de Dirichlet, pois supomos que a membrana está presa na borda do tambor.

Usando o método de separação de variáveis, vimos na aula do dia 6 de maio que a solução da equação é dada por

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\langle f, \phi_n \rangle \cos(\sqrt{-\lambda_n} t) + \frac{\langle g, \phi_n \rangle}{\sqrt{-\lambda_n}} \text{sen}(\sqrt{-\lambda_n} t) \right) \phi_n(x),$$

em que λ_n e ϕ_n são soluções da equação de autovalores

$$\begin{cases} \Delta \phi(x) = \lambda \phi(x), & x \in B_1(0) \\ \phi(x) = 0, & x \in \partial B_1(0) \end{cases}.$$

As funções ϕ_n são escolhidas de forma que $\int_{B_1(0)} \phi_n(x) \phi_m(x) dx = \delta_{mn}$ e o produto interno é definido como

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{B_1(0)} \psi(x) \phi(x) dx$$

Usando coordenadas polares, podemos escrever a equação de autovalores como

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}(r, \theta) = \lambda \phi(r, \theta), & (r, \theta) \in (0, 1) \times (0, 2\pi) \\ \phi(1, \theta) = 0, & \theta \in (0, 2\pi) \end{cases}.$$

Para achar as soluções usaremos novamente o método de separação de variáveis.

Lembramos que, pelo Teorema 52, os autovalores λ são todos negativos.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções da forma $\phi(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$. Substituindo na equação de autovalores, obtemos

$$\frac{\partial^2 (R(r) \Theta(\theta))}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (R(r) \Theta(\theta))}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (R(r) \Theta(\theta))}{\partial \theta^2} = \lambda R(r) \Theta(\theta).$$

Dividindo tudo por $R(r) \Theta(\theta)$ e multiplicando por r^2 , concluímos que

$$\frac{r^2 \frac{d^2 R}{dr^2}}{R(r)} + \frac{r \frac{dR}{dr}}{R(r)} + \frac{\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}}{\Theta(\theta)} = \lambda r^2.$$

Assim,

$$\frac{r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \lambda r^2 R(r)}{R(r)} = -\frac{\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}}{\Theta(\theta)} = \sigma.$$

A constante σ aparece, pois um lado só depende de r e outro só de θ . Concluimos, assim, que

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} (r) + r \frac{dR}{dr} (r) &= (\lambda r^2 + \sigma) R(r) \\ \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} &= -\sigma \Theta(\theta) \end{aligned}.$$

Logo

$$\Theta(\theta) = A\theta + B, \quad \text{se } \sigma = 0 \quad \text{ou} \quad \Theta(\theta) = A \cos(\sqrt{\sigma}\theta) + B \sin(\sqrt{\sigma}\theta), \quad \text{se } \sigma \neq 0,$$

Como $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ e $\frac{d\Theta}{d\theta}(0) = \frac{d\Theta}{d\theta}(2\pi)$, concluimos que $\sqrt{\sigma} = m \implies \sigma = m^2$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ e as soluções mais gerais são dadas por

$$\Theta(\theta) = a_0, \quad \text{ou} \quad \Theta_m(\theta) = a_m \cos(m\theta) + b_m \sin(m\theta), \quad \text{para } m \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Note que em relação à equação R , sabemos que λ é negativo. Podemos, então, definir a função $f(x) = R\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right)$. Logo

$$(13.1.1) \quad \frac{df}{dx}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \frac{dR}{dr}\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right) \quad \text{e} \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = \frac{1}{-\lambda} \frac{d^2 R}{dr^2}\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right).$$

Sabemos que

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2}(r) + r \frac{dR}{dr}(r) - (\lambda r^2 + \sigma) R(r) = 0.$$

Se usarmos $r = \frac{x}{\sqrt{-\lambda}}$, obtemos

$$\frac{x^2}{-\lambda} \frac{d^2 R}{dr^2}\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right) + \frac{x}{\sqrt{-\lambda}} \frac{dR}{dr}\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right) - \left(\lambda \frac{x^2}{-\lambda} + \sigma\right) R\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right) = 0.$$

As relações entre f e R dadas pela Equação (13.1.1) implicam que

$$\frac{x^2}{-\lambda} (-\lambda) \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + \frac{x}{\sqrt{-\lambda}} \sqrt{-\lambda} \frac{df}{dx}(x) - \left(\lambda \frac{x^2}{-\lambda} + \sigma\right) f(x) = 0,$$

ou seja,

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + x \frac{df}{dx}(x) + (x^2 - \sigma) f(x) = 0.$$

Como $\sigma = m^2$, podemos considerar mais geralmente que $\sigma = \nu^2$, para $\nu \in \mathbb{R}$. Assim somos levados a seguinte equação:

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + x \frac{df}{dx}(x) + (x^2 - \nu^2) f(x) = 0.$$

A equação acima é chamada de **Equação de Bessel de ordem ν** .

13.2. As funções de Bessel

Nosso objetivo agora é enunciar alguns resultados sobre as soluções $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ da Equação de Bessel.

DEFINIÇÃO 55. Seja $\nu \in \mathbb{R}$.

1) A função de Bessel de ordem ν é a função $J_\nu :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu - 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \nu}.$$

A função acima também é chamada de função de Bessel de primeiro tipo.

2) A função de Weber ou Bessel de segundo tipo é a função $Y_\nu :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, & \text{se } \nu \notin \mathbb{Z} \\ \lim_{\tilde{\nu} \rightarrow \nu} \frac{\cos(\tilde{\nu}\pi) J_{\tilde{\nu}}(x) - J_{-\tilde{\nu}}(x)}{\sin(\tilde{\nu}\pi)}, & \text{se } \nu \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

OBSERVAÇÃO 56. A função Gamma é definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Ela pode ser estendida a uma função meromorfa em \mathbb{C} e satisfaz

$$\Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \implies \Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}.$$

PROPOSIÇÃO 57. 1) As soluções da Equação de Bessel de ordem ν são da forma

$$\alpha J_{\nu}(x) + \beta Y_{\nu}(x), \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

As funções J_{ν} e Y_{ν} são linearmente independentes, ou seja, são não nulas e uma não é múltipla da outra. 2) Se $\nu \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, então quando $x \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned} J_{\nu}(x) &\sim \frac{x^{\nu}}{2^{\nu}\nu!}, \\ Y_{\nu}(x) &\sim -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, \quad \nu \neq 0. \\ Y_0(x) &\sim \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{x}{2}\right), \end{aligned}$$

Observamos que $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow 0$, significa que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, ou seja, “ f se comporta como g quando x se aproxima a zero”.

DEMONSTRAÇÃO. Não faremos a demonstração nessas notas de aula. Ela pode ser encontrada em diversos livros, como no livro do Folland, que é nossa principal referência. \square

Observamos acima que as funções Y_{ν} não são contínuas em 0 para $\nu \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Assim, devemos considerar apenas as funções de Bessel em nossa solução. Abaixo, traçamos o gráfico dessas funções para ν igual a 0, 1 e 2. Note que as funções de Bessel de segunda tipo, Y_{ν} , vão a $-\infty$ quando $x \rightarrow 0$. As funções de Bessel de primeiro tipo, J_{ν} , são contínuas em 0. Temos $J_0(0) = 1$ e $J_m(0) = 0$, $m \in \{1, 2, \dots\}$. Observamos também que as funções J_{ν} possuem infinitos zeros.

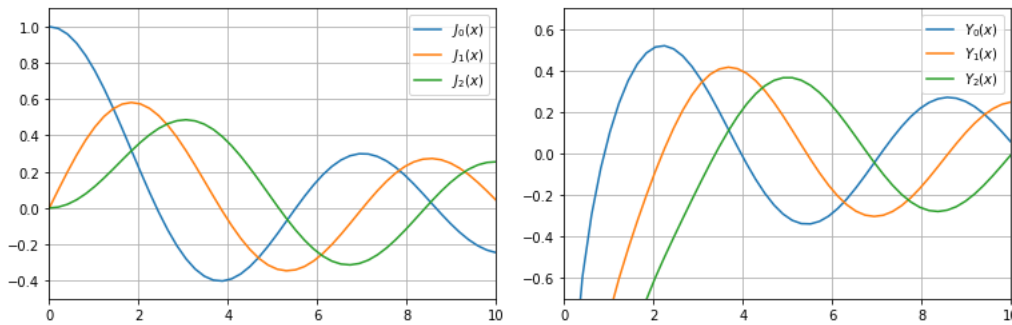


FIGURA 13.2.1

13.3. Voltando à equação de onda

Vamos como sempre, procurar autovetores do problema de autovalores que sejam contínuos na origem. As soluções de

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + x \frac{df}{dx}(x) + (x^2 - m^2) f(x) = 0$$

que não vão para infinito quando x vai para zero são as funções de Bessel de primeiro tipo, ou seja, $f(x) = \alpha J_m(x)$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$.

Assim, como $f(x) = R\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right)$, a função R que procurávamos será da forma

$$R(r) = \alpha J_m\left(\sqrt{-\lambda}r\right),$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Finalmente, as soluções particulares da forma $u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$ são da forma

$$u_{m,\lambda}(r, \theta) = (a_m \cos(m\theta) + b_m \operatorname{sen}(m\theta)) J_m(\sqrt{-\lambda}r), \quad m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Para determinar λ vamos ao segundo passo.

Segundo Passo

Vamos usar a condição de contorno agora. Sabemos que

$$u_{m,\lambda}(1, \theta) = 0, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Logo

$$(a_m \cos(m\theta) + b_m \operatorname{sen}(m\theta)) J_m(\sqrt{-\lambda}) = 0 \implies J_m(\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

Concluimos que $\sqrt{-\lambda}$ são os zeros da função de Bessel J_m .

Vamos denotar por $\lambda_{m,1}, \lambda_{m,2}, \lambda_{m,3}, \dots$ os zeros da função J_m . Juntando tudo concluimos que

TEOREMA 58. *Consideremos o problema de autovalores na bola*

$$\begin{cases} \Delta \phi(x) = \lambda \phi(x), & x \in B_1(0) \\ \phi(x) = 0, & x \in \partial B_1(0) \end{cases}.$$

Para este problema:

Os autovalores são dados por $\{-\lambda_{m,n}^2; m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}, n \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$.

As autofunções são dadas por $\{J_m(\lambda_{m,n}r) \cos(m\theta); m \geq 0, n \geq 1\} \cup \{J_m(\lambda_{m,n}r) \operatorname{sen}(m\theta); m \geq 1, n \geq 1\}$.

OBSERVAÇÃO 59. Lembramos que pelo Teorema 52, temos:

1) Os autovalores formam uma sequência cujo limite é $-\infty$.

2) As autofunções são tais que toda função contínua $f: \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser escrita como

$$f(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} J_m(\lambda_{m,n}r) \cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{m,n} J_m(\lambda_{m,n}r) \operatorname{sen}(m\theta),$$

em que o limite é no sentido L^2 , ou seja,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| f(r, \theta) - \sum_{m=0}^N \sum_{n=1}^N a_{m,n} J_m(\lambda_{m,n}r) \cos(m\theta) + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N b_{m,n} J_m(\lambda_{m,n}r) \operatorname{sen}(m\theta) \right|^2 r dr d\theta = 0.$$

Juntando tudo, concluimos que a solução geral da equação de onda é da forma

$$u(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_{m,n}t) (a_{m,n} J_m(\lambda_{m,n}r) \cos(m\theta) + b_{m,n} J_m(\lambda_{m,n}r) \operatorname{sen}(m\theta)) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\lambda_{m,n}t) (\tilde{a}_{m,n} J_m(\lambda_{m,n}r) \cos(m\theta) + \tilde{b}_{m,n} J_m(\lambda_{m,n}r) \operatorname{sen}(m\theta)).$$

As funções $a_{m,n}, b_{m,n}, \tilde{a}_{m,n}$ e $\tilde{b}_{m,n}$ são determinadas através de f e g .

A fim de ilustrar a solução, vamos ilustrar alguns autovetores do Laplaciano em $B_1(0)$. Abaixo estão as funções

$$u(r, \theta) = J_m(\lambda_{m,n}r) \cos(m\theta)$$

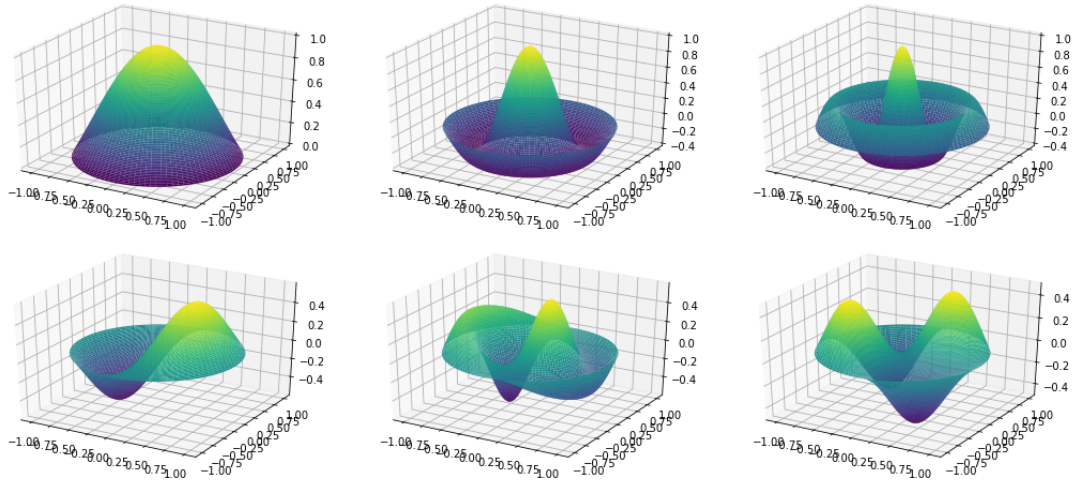


FIGURA 13.3.1. Da esquerda para a direita: na parte de cima, temos $(m, n) = (0, 1)$, $(0, 2)$ e $(0, 3)$. Na parte de baixo, temos $(m, n) = (1, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 1)$.

13.4. A equação do calor

Para terminar esta aula, vamos, rapidamente estudar a equação do calor. Já sabemos todas as informações que permitem escrever a sua solução. Consideremos a equação

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \Delta u(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times B_1(0) \\ u(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \partial B_1(0) \\ u(0, x) = f(x), & x \in B_1(0) \end{cases} .$$

Vimos na aula do dia 6 de maio que a solução da equação é dada por

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle e^{\lambda_n t} \phi_n(x).$$

em que λ_n e ϕ_n são soluções da equação de autovalores.

Usando o que vimos anteriormente, temos que

$$u(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_{m,n}^2 t} (a_{m,n} J_m(\lambda_{m,n} r) \cos(m\theta) + b_{m,n} J_m(\lambda_{m,n} r) \sin(m\theta)),$$

em que $a_{m,n}$ e $b_{m,n}$ são determinados através de f .

Recomendações:

1) Vejam as animações na Wikipedia da equação da onda (algumas foram mostradas na videoaula):

https://en.wikipedia.org/wiki/Vibrations_of_a_circular_membrane

As animações usadas na vídeoaula foram feitas no Python. Para tanto, fizemos pequenas modificações no código que pode ser encontrado no site:

<https://stackoverflow.com/questions/38406617/mplot3d-animation-with-transparent-background>

2) Também é muito interessante e rápido (**fortemente recomendado!**) que vocês vejam esse vídeo no Youtube:

<https://www.youtube.com/watch?v=v4ELxKKT5Rw>

Esse vídeo (Circular Membrane (drum head) Vibration) de apenas 1 minutos e 27 segundos mostra que as vibrações que calculamos e simulamos de fato ocorrem na natureza!

Principais resultados e ideias dessa seção:

- 1) Para resolver a equação da onda numa bola, usamos os resultados obtidos no dia 6 de maio via separação de variáveis e fomos levados ao estudo do problema de autovalores do Laplaciano com condição de Dirichlet na bola.
- 2) Para resolver o problema de autovalores, usamos coordenadas polares e novamente separação de variáveis. A equação da parte radial é, a não ser por uma mudança de variáveis, uma equação de Bessel.
- 3) Vimos brevemente algumas propriedades da função de Bessel de primeiro e segundo tipo. Em particular, apenas as de primeiro tipo são contínuas na origem.
- 4) Usando as funções de Bessel, obtivemos a solução geral da equação da onda e do calor na bola.

Aula do dia 20 de maio

Transformada de Fourier

Hoje começaremos um novo tópico: Transformada de Fourier. Esse importante conceito é fortemente relacionado com as séries de Fourier e diversas analogias podem ser vistas entre os dois tópicos.

Começaremos com um pouco de teoria e nas aulas seguintes usaremos as novas ferramentas para o estudo da equação da onda, calor e de Laplace no espaço \mathbb{R}^n .

14.1. Motivação

Até agora, definimos a série de Fourier para funções periódicas ou definidas em intervalos finitos. Mas e se quisermos estudar funções definidas em todo \mathbb{R} ? Qual deveria ser uma definição de série de Fourier ou algo análogo neste caso?

Vamos começar lembrando que dada uma função $f : [L, L] \rightarrow \mathbb{C}$ contínua por partes, temos

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}, \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i \frac{n\pi y}{L}} dy,$$

em que o limite ocorre no sentido L^2 .

Agora vamos considerar uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ contínua e definida em toda a reta. Para facilitar a discussão, vamos supor que a função f é diferente de zero apenas em um conjunto finito, isto é, existe $R > 0$ tal que $f(x) = 0$ para todo $|x| > R$. Assim, temos que em $|x| \leq R$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i \frac{n\pi y}{L}} dy \right) e^{i \frac{n\pi x}{L}},$$

para todo $L > R$, em que o limite ocorre no sentido L^2 no intervalo $[-L, L]$.

Vamos agora denotar por $\Delta\xi := \frac{\pi}{L}$ e $\xi_n := n\Delta\xi = \frac{n\pi}{L}$. Logo

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i\xi_n y} dy \right) e^{i\xi_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(y) e^{-i\xi_n y} dy \right) e^{i\xi_n x} \frac{\pi}{L} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(y) e^{-i\xi_n y} dy \right) e^{i\xi_n x} \Delta\xi. \end{aligned}$$

Como a função é igual a zero fora de $[-L, L]$, já que $L > R$, temos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(y) e^{-i\xi_n y} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi_n y} dy.$$

Vamos chamar de $\hat{f}(\xi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi_n y} dy$. Logo, para $x \in [-L, L]$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi_n) e^{i\xi_n x} \Delta\xi.$$

A somatória acima pode ser vista como a soma de Riemann usando a seguinte partição de \mathbb{R} .

$$\dots < -(n+1)\Delta\xi < -n\Delta\xi < \dots < 0 < \dots < n\Delta\xi < (n+1)\Delta\xi < \dots$$

Note que, quando $L \rightarrow \infty$, temos $\Delta\xi := \frac{\pi}{L} \rightarrow 0$. Usando o que conhecemos de integral de Riemann, é razoável intuir que o seguinte limite seja válido

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi_n) e^{i\xi_n x} \Delta\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

embora a justificativa teria que ser cuidadosa, já que estamos trabalhando com um intervalo não limitado (todo o \mathbb{R}).

Usando a discussão acima, nossa conclusão é que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tiver crescimento lento para $x \rightarrow \pm\infty$, então devemos esperar que as seguintes fórmulas sejam válidas

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad \text{em que} \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

14.2. Definição de Transformada de Fourier

Vamos agora definir rigorosamente a transformada de Fourier. Para tanto vamos usar duas novas classes de funções: L^1 e L^∞ .

DEFINIÇÃO 60. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que $f \in L^1(\mathbb{R})$ se $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Para essas funções definimos $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} := \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$. Dizemos que $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ se f é limitado. Para essas funções, definimos¹ $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

É fácil provar que os conjuntos $L^1(\mathbb{R})$ e $L^\infty(\mathbb{R})$ são espaços vetoriais complexos com a soma e multiplicação usual por escalar. Para provar isso, basta observar que se α e β são números complexos, então a função $\alpha f + \beta g$ é limitada, se f e g o forem. Isto mostra que $L^\infty(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial. Para o espaço $L^1(\mathbb{R})$, se f e g pertencem a $L^1(\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha f(x) + \beta g(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (|\alpha| |f(x)| + |\beta| |g(x)|) dx \\ &= |\alpha| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx + |\beta| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty. \end{aligned}$$

Portanto $\alpha f + \beta g \in L^1(\mathbb{R})$.

DEFINIÇÃO 61. A transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ é definida como

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

Também usaremos a notação $\hat{f} := \mathcal{F}(f)$.

Observamos que a transformada está bem definida, já que

$$|\mathcal{F}f(\xi)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Logo

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

É importante destacar a linearidade da transformada de Fourier.

PROPOSIÇÃO 62. A transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ é uma transformação linear, ou seja, para quaisquer α e β pertencentes a \mathbb{C} , f e g pertencentes a $L^1(\mathbb{R})$, temos

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g).$$

¹Uma discussão verdadeiramente rigorosa dessas classes de funções exigiria o conhecimento de integral de Lebesgue. Não faremos isso aqui. No entanto, observamos que se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então existe a integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, pelo menos como uma integral de Lebesgue (que é, de certa forma, mais geral que a integral de Riemann que aprendemos em cursos de cálculo). Também notamos que a definição rigorosa de $L^\infty(\mathbb{R})$ e de $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ é diferente da que apresentamos. Entretanto, para a maioria das funções usadas neste curso, a definição rigorosa coincide com a apresentada.

DEMONSTRAÇÃO. Basta usar a linearidade da integral:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} (\alpha f(x) + \beta g(x)) d\xi \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) d\xi + \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} g(x) d\xi = \alpha \mathcal{F}f(\xi) + \beta \mathcal{F}g(\xi).\end{aligned}$$

□

Não é difícil mostrar que $\mathcal{F}(f)$ é uma função contínua para todo $f \in L^1(\mathbb{R})$. Antes de provar outras propriedades da transformada de Fourier, vamos ver alguns exemplos.

EXEMPLO 63. Seja $a > 0$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx = \int_{-a}^a e^{-ix\xi} dx = \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{e^{ia\xi} - e^{-ia\xi}}{i\xi} = \frac{2}{\xi} \left(\frac{e^{ia\xi} - e^{-ia\xi}}{2i} \right) = \frac{2\text{sen}(a\xi)}{\xi}.\end{aligned}$$

Concluimos que $\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2\text{sen}(a\xi)}{\xi}$.

EXEMPLO 64. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(x) = e^{-a|x|}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-ix\xi} e^{-ax} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-ix\xi} e^{ax} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{(-i\xi-a)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{(-i\xi+a)x} dx \\ &= \frac{e^{(-i\xi-a)x}}{-i\xi-a} \Big|_0^{\infty} + \frac{e^{(-i\xi+a)x}}{-i\xi+a} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{i\xi+a} + \frac{1}{-i\xi+a} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}.\end{aligned}$$

Concluimos que $\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$.

EXEMPLO 65. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Vamos usar a notação \hat{f} para a transformada de Fourier. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = \int_{-\infty}^{\infty} -ix e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} i \int_{-R}^R e^{-ix\xi} \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(i e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-R}^R \right) - \lim_{R \rightarrow \infty} i \int_{-R}^R \frac{d}{dx} (e^{-ix\xi}) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &\stackrel{(1)}{=} -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (e^{-ix\xi}) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\xi \hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Em (1), usamos o fato de que a função $x \mapsto e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}}$ vai a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$. Observe que obtemos uma equação diferencial da forma

$$\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) = -\xi \hat{f}(\xi).$$

Podemos resolvê-la, vamos integrar tudo de 0 a ξ da seguinte forma:

$$\int_0^\xi \frac{\hat{f}'(s)}{\hat{f}(s)} ds = - \int_0^\xi s ds.$$

Fazendo a mudança de variável $y = \hat{f}(s)$, temos $dy = \hat{f}'(s) ds$. Assim

$$\int_{\hat{f}(0)}^{\hat{f}(\xi)} \frac{dy}{y} = - \int_0^\xi s ds \implies \ln \left(\frac{\hat{f}(\xi)}{\hat{f}(0)} \right) = -\frac{\xi^2}{2} \implies \hat{f}(\xi) = \hat{f}(0) e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Basta agora calcular $\hat{f}(0)$. Isso pode ser calculado facilmente. De fato,

$$\begin{aligned}\hat{f}(0)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dx dy \stackrel{(1)}{=} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = -2\pi e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\infty} = 2\pi.\end{aligned}$$

Em (1), usamos a mudança de variável: $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ e $dx dy = r dr d\theta$. Concluímos que $\hat{f}(0) = \sqrt{2\pi}$ e que

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

OBSERVAÇÃO 66. Acima calculamos a integral da função gaussiana. Esta importante integral será usada diversas vezes aqui. Uma pequena mudança de variável permite obter o seguinte resultado para $a > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Abaixo, seguem as ilustrações das funções e das transformadas de Fourier dos três exemplos vistos acima:

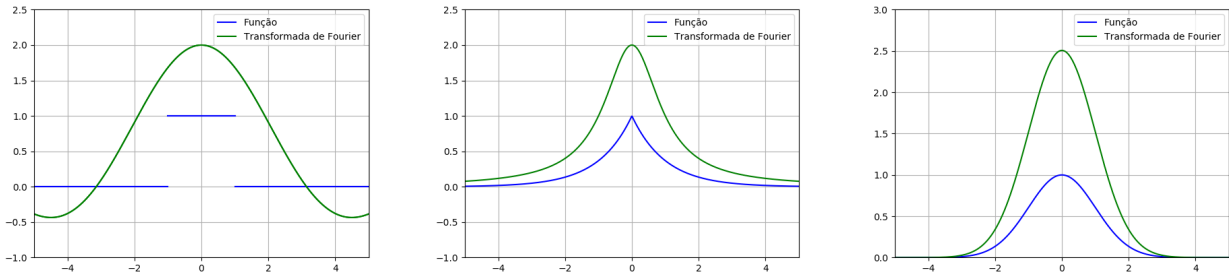


FIGURA 14.2.1. Da esquerda para a direita: Exemplos (63), (64) e (65).

14.3. Propriedades básicas

Vamos agora enunciar algumas propriedades básicas da transformada de Fourier que serão úteis para aplicações. Nesta aula, nos restringiremos a algumas propriedades simples que podem ser obtidas praticamente de forma direta a partir da definição da transformada.

PROPOSIÇÃO 67. A transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ possui as seguintes propriedades:

P1) Se $a \in \mathbb{R}$, então

$$\mathcal{F}(f(x-a)) = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(e^{iax} f(x)) = \hat{f}(\xi - a).$$

P2) Se $\delta > 0$, então

$$\mathcal{F}(f(\delta x)) = \frac{1}{\delta} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right).$$

P3) Se f é contínua e suave por partes e f, f' pertencem a $L^1(\mathbb{R})$, então

$$\mathcal{F}\left(\frac{df}{dx}(x)\right) = i\xi \hat{f}(\xi).$$

P4) Se $x \mapsto xf(x)$ pertence a $L^1(\mathbb{R})$, então $\mathcal{F}(f)$ é de classe C^1 e

$$i \frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) = \mathcal{F}(xf(x)).$$

DEMONSTRAÇÃO. P1) Vemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(x-a)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x-a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x+a)\xi} f(x) dx = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi), \\ \mathcal{F}(e^{iax} f(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} e^{iax} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\xi-a)} f(x) dx = \hat{f}(\xi-a).\end{aligned}$$

P2) Novamente usando mudança de coordenadas, temos

$$\mathcal{F}(f(\delta x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(\delta x) dx = \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{x}{\delta}\xi} f(x) dx = \frac{1}{\delta} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right).$$

P3) Vamos começar mostrando que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Nas hipóteses da proposição, vale o teorema fundamental do cálculo. Logo

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y) dy.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(0) + \int_0^{\infty} f'(y) dy \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = f(0) - \int_{-\infty}^0 f'(y) dy.$$

Como $f' \in L^1(\mathbb{R})$, os limites acima existem. Além disso, $\int_0^{\infty} |f'(x)| dx < \infty$ e, portanto, os limites devem ser iguais a zero, já que, se não fossem, a integral de $|f'(x)|$ seria infinita. Vamos agora usar integração por partes para obter o resultado.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f')(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f'(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-ix\xi} \frac{df}{dx}(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} (e^{-iR\xi} f(R) - e^{iR\xi} f(-R)) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{d}{dx} (e^{-ix\xi}) f(x) dx \\ &= i\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx = i\xi \hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

P4) Basta observar que

$$i \frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) = i \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ix\xi} f(x) dx = \mathcal{F}(xf(x)).$$

□

As propriedades P3) e P4) são muito importantes. Elas mostram que a transformada de Fourier transforma multiplicação por x em uma derivada. Por outro lado, transforma derivadas em multiplicação por ξ .

Assim, multiplicação por polinômios x^k são transformados em derivadas e vice e versa. De fato,

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^k f}{dx^k}(x)\right) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi) \quad \text{e} \quad i^k \frac{d^k \hat{f}}{d\xi^k}(\xi) = \mathcal{F}(x^k f(x)).$$

Intuitivamente isto nos leva ao seguinte: Se a função cai rapidamente, então sua transformada de Fourier é bem regular (suave). Se uma função é muito regular e suas derivadas são integráveis, então a série de Fourier decai rapidamente.

De fato, se a função decai rapidamente, então $x \mapsto x^k f(x)$ continua sendo integrável para k grande. Logo \hat{f} é C^k . Por outro lado, se a função é regular e suas k derivadas são integráveis, então $\xi^k \hat{f}(\xi) = (-i)^k \mathcal{F}\left(\frac{d^k f}{dx^k}\right)$ é limitada, pois $\frac{d^k f}{dx^k} \in L^1(\mathbb{R})$. Assim, a função decai mais rapidamente do que um polinômio de grau k .

Nos exemplos, todas as funções decaem mais rapidamente do que qualquer polinômio, já que são exponenciais ou são funções iguais a zero fora de um intervalo. Assim, vemos que as transformadas de Fourier são todas funções em $C^\infty(\mathbb{R})$, ou seja, são infinitamente deriváveis.

Já quanto a regularidade, vemos que, no Exemplo (65), a função f é C^∞ e todas as suas derivadas também decaem rapidamente. Logo a transformada também tem um rápido decaimento. Isto de fato ocorre, já que a sua transformada também é uma função Gaussiana.

No exemplo (64), a função é menos regular. Ela é contínua, mas não possui derivada no ponto zero. Logo é esperada que ela caia mais lentamente. De fato, a transformada de Fourier cai com ξ^{-2} , que é mais lento do que $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. (Estamos usando que $(1 + \xi^2)^{-1}$ é similar a ξ^{-1} quando ξ é grande).

Por fim, no Exemplo (63) a função sequer é contínua. Logo a transformada cai ainda mais lentamente. De fato, ela cai com ξ^{-1} , o que é mais lento do que ξ^{-2} .

Principais resultados e ideias dessa seção:

1) Definimos a transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ como

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

2) Provamos algumas propriedades básicas da transformada de Fourier: ela é uma transformação linear que transforma derivadas em multiplicação por polinômios e vice versa:

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^k f}{dx^k}(x)\right) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi) \quad \text{e} \quad i^k \frac{d^k \hat{f}}{d\xi^k}(\xi) = \mathcal{F}(x^k f(x)).$$

Aula do dia 22 de maio

Inversa da Transformada de Fourier e fórmula de Plancherel

Na aula passada, motivamos a transformada de Fourier através da série de Fourier. Consideramos uma função “razoável” $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e vimos que sua restrição ao intervalo $[-L, L]$ pode ser escrita usando a série de Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i\frac{n\pi y}{L}} dy \right) e^{i\xi_n x}$$

Vimos que, ao tomar o limite $L \rightarrow \infty$, obtínhamos, sem muito rigor, uma expressão do tipo

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad \text{em que } \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Isto nos levou a definição da transformada de Fourier. Hoje iremos estudar com mais cuidado como reobter f através de \hat{f} , ou seja, iremos verificar que as expressões acima de fato são válidas. Em seguida vamos estudar a fórmula de Plancherel, que é muito similar a fórmula de Parseval para série de Fourier.

15.1. Fórmula de inversão

Vamos começar definindo a função \mathcal{F}^{-1} , chamada de transformada de Fourier inversa.

DEFINIÇÃO 68. Definimos $\mathcal{F}^{-1} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ como

$$\mathcal{F}^{-1} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi.$$

Note que a fórmula acima é muito semelhante a transformada de Fourier. A diferença é o sinal positivo na exponencial e no termo $\frac{1}{2\pi}$. Assim, vemos que

$$(15.1.1) \quad \mathcal{F}^{-1} f(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} f(-x) \iff \mathcal{F} f(x) = 2\pi \mathcal{F}^{-1} f(-x).$$

Note que não é claro que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}$ seja igual a identidade. Isto não está sequer sempre bem definido, já que $\mathcal{F}f$ não é necessariamente uma função $L^1(\mathbb{R})$. Vamos aqui mostrar uma situação em que temos essa inversão, ou seja, $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f) = f$.

TEOREMA 69. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, ou seja, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Logo*

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\epsilon^2}{2}\xi^2} d\xi.$$

Se $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, então

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\epsilon > 0$. Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\epsilon^2}{2}\xi^2} e^{i\xi x} d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y) dy \right) e^{-\frac{\epsilon^2}{2}\xi^2} e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\epsilon^2}{2}\xi^2} e^{-i\xi(y-x)} d\xi \right) f(y) dy. \end{aligned}$$

Na expressão acima, vemos a importância do termo $e^{-\frac{\epsilon^2 \xi^2}{2}}$. Se não colocarmos ele, a integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-y)} d\xi$ sequer está bem definida.

Note que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\epsilon^2 \xi^2}{2}} e^{-i\xi(y-x)} d\xi = \mathcal{F} \left(e^{-\frac{\epsilon^2 \xi^2}{2}} \right) (y-x).$$

Sabemos que

$$\mathcal{F} \left(e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right) (\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Vimos na aula anterior que $\mathcal{F}(f(\delta x)) = \frac{1}{\delta} \hat{f} \left(\frac{\xi}{\delta} \right)$. Assim

$$\mathcal{F} \left(e^{-\frac{(\epsilon x)^2}{2}} \right) (\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\epsilon} e^{-\frac{\xi^2}{2\epsilon^2}}.$$

Portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\epsilon^2 \xi^2}{2}} e^{-i\xi(y-x)} d\xi = \mathcal{F} \left(e^{-\frac{\epsilon^2 \xi^2}{2}} \right) (y-x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\epsilon} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\epsilon^2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\epsilon^2 \xi^2}{2}} e^{i\xi x} d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\epsilon^2 \xi^2}{2}} e^{-i\xi(y-x)} d\xi \right) f(y) dy \\ &= \frac{1}{\epsilon \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\epsilon^2}} f(y) dy \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} f(x+\epsilon z) dz. \end{aligned}$$

em que (1) fizemos a mudança de variável $z = \frac{y-x}{\epsilon}$ (note que $dz = \frac{1}{\epsilon} dy$ e $y = \epsilon z + x$). Concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\epsilon^2 \xi^2}{2}} e^{i\xi x} d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} f(x+\epsilon z) dz \\ &\stackrel{(1)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) f(x) = f(x). \end{aligned}$$

A passagem do limite em (1) é um pouco mais delicada, mas pode ser justificada rigorosamente. Para quem se interessar, veja o apêndice. \square

Vamos usar o Teorema acima para calcular algumas transformadas de Fourier.

EXEMPLO 70. Seja $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Neste exemplo, vamos apenas verificar que $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = f$, sem usar o Teorema 69. Vimos que $\mathcal{F}f(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ e que $\mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}f(-x)$, pela Equação (15.1.1). Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) &= \mathcal{F}^{-1} \left(\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right) (x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \left(\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right) (-x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} \left(e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right) (-x) = e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x). \end{aligned}$$

Concluimos que, de fato, $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$.

EXEMPLO 71. Seja $f(x) = e^{-a|x|}$. Logo $\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}$. Vamos usar esses resultados para calcular $\mathcal{F} \left(\frac{1}{a^2 + x^2} \right)$. Note que tanto f como $\mathcal{F}f$ são funções contínuas em $L^1(\mathbb{R})$. Logo o Teorema 69 é válido.

Vimos que $\mathcal{F}f(\xi) = 2\pi \mathcal{F}^{-1}f(-\xi)$, pela Equação (15.1.1). Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\frac{1}{a^2 + x^2} \right) (\xi) &= 2\pi \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{a^2 + x^2} \right) (-\xi) = \frac{2\pi}{2a} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{2a}{a^2 + x^2} \right) (-\xi) \\ &= \frac{2\pi}{2a} \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F} \left(e^{-a|x|} \right) \right) (-\xi) = \frac{2\pi}{2a} e^{-a|-\xi|} = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}. \end{aligned}$$

Obtemos acima que $\mathcal{F} \left(\frac{1}{a^2 + x^2} \right) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}$.

EXEMPLO 72. Nosso último exemplo é dado pela função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}.$$

Vimos que $\mathcal{F}f = \frac{2\text{sen}(a\xi)}{\xi}$. Assim, usando a Equação (15.1.1), *esperamos* que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\text{sen}(ax)}{x}\right)(\xi) &= 2\pi\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\text{sen}(ax)}{x}\right)(-\xi) = \pi\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2\text{sen}(ax)}{x}\right)(-\xi) \\ \pi\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(-\xi) &= \pi f(-\xi) = \pi f(\xi), \end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{F}\left(\frac{\text{sen}(ax)}{x}\right)(\xi) = \pi f(\xi)$.

Note que, no último exemplos, dizemos “Assim, *esperamos* que...”. Mas porque foi dito *esperamos*? Não está correto?

Sim. Está correto o resultado. O problema é que o Teorema 69, foi provado apenas para funções contínuas e a função $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$ não é contínua. Além disso, é possível provar (não é tão difícil, mas não faremos aqui) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\text{sen}(ax)}{x} \right| dx = \infty$$

ou seja, a função $x \mapsto \frac{\text{sen}(ax)}{x} \notin L^1(\mathbb{R})$. Assim, a transformada de Fourier de $x \mapsto \frac{\text{sen}(ax)}{x}$ não está bem definida de acordo com a nossa definição (só definimos $\mathcal{F}g$, quando $g \in L^1(\mathbb{R})$).

O problema da função f não ser contínua não é muito grave. De fato, o Teorema 69 pode ser demonstrado também para funções contínuas por partes. A demonstração é muito similar a que fizemos (quem se interessar, pode estudá-la no Folland, embora eu não recomende numa primeira leitura).

O fato de que $x \mapsto \frac{\text{sen}(ax)}{x} \notin L^1(\mathbb{R})$ é mais delicado. O que podemos provar, no entanto, é que o quadrado desta função é integrável, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\text{sen}(ax)}{x} \right|^2 dx < \infty.$$

Veremos a seguir que a transformada de Fourier também pode ser definida para funções com essa propriedade. Este é o conteúdo da próxima seção.

15.2. Fórmula de Plancherel

Vamos agora provar a importante fórmula de Plancherel. Ela é semelhante a fórmula de Parseval vista nas séries de Fourier. Para isto, vamos definir mais uma classe de funções: as funções de quadrado integrável.

DEFINIÇÃO 73. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é uma função quadrado integrável¹ se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

O conjunto das funções quadrado integráveis é denotado por $L^2(\mathbb{R})$. Usaremos a notação $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} := \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}$.

¹Novamente, a definição rigorosa requer o uso das integrais de Lebesgue. Neste curso, não iremos ser tão rigorosos. Em geral, basta lembrar que:

L^∞ são funções limitadas

L^1 são funções tais que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$

L^2 são funções tais que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$.

Se mesmo isto estiver confuso, não desanime! Procure entender as fórmulas sem procurar pensar muito nas classes de funções envolvidas. Para o curso, entender a fórmula de inversão e de Plancherel é muito mais importante do que lembrar o significado dessas classes de funções.

Observe que se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, ou seja, f é limitada e $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, então automaticamente temos que $f \in L^2(\mathbb{R})$. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |f(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |f(x)| dx \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty. \end{aligned}$$

Estamos agora em condições de enunciar o Teorema de Plancherel.

TEOREMA 74. *Seja $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ duas funções em $L^1(\mathbb{R})$ tais que \hat{f}, \hat{g} também estão em $L^1(\mathbb{R})$. Logo*

1. $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$.

2. $2\pi \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é um simples cálculo:

1. Vemos que

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx &\stackrel{(1)}{=} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{g}(\xi) d\xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx \right) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi, \end{aligned}$$

em (1) usamos a fórmula de inversão de g , isto é, $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{g}(\xi) d\xi$.

2. O resultado segue diretamente do anterior. Basta tomar $f = g$:

$$2\pi \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

□

Vamos tentar interpretar esse resultado. Para tanto, vamos definir um produto interno $(f, g) \ni L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \mapsto \langle f, g \rangle \in \mathbb{C}$ da seguinte forma:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Recordamos em álgebra linear que o produto interno sempre define uma norma:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} := \sqrt{\langle f, f \rangle} := \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}.$$

Assim, o Teorema de Plancherel pode ser visto reescrito como

$$2\pi \langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle \text{ e } \sqrt{2\pi} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

As fórmulas acima, permitem estender a transformada de Fourier para funções em $L^2(\mathbb{R})$. Além disso, para que as fórmulas acima valham, basta que f e g pertençam a $L^2(\mathbb{R})$. Assim, com um pouquinho de cuidado, podemos trocar no enunciado do Teorema de Plancherel a frase “ $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ duas funções $L^1(\mathbb{R})$ tais que \hat{f}, \hat{g} também são $L^1(\mathbb{R})$ ” pela frase “ f e g pertencem a $L^2(\mathbb{R})$ ”.

TEOREMA 75. *A transformada de Fourier pode ser definida como uma transformação linear bijetora $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ da seguinte forma.*

Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$, então

$$\mathcal{F}f(\xi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

A inversa é dada por $\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ definida como

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x) := \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

OBSERVAÇÃO 76. 1) Note que se definirmos a função $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq n \\ 0 & |x| > n \end{cases},$$

concluimos que

$$\mathcal{F}(f_n)(\xi) = \int_{-n}^n e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

Logo

$$\mathcal{F}f(\xi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}f_n(\xi).$$

2) A convergência acima deve ser entendida como um limite em $L^2(\mathbb{R})$, isto é, $\mathcal{F}f$ é a única função tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}f - \mathcal{F}f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}f(\xi) - \int_{-n}^n e^{-ix\xi} f(x) dx \right|^2 d\xi = 0.$$

3) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-ix\xi} f(x) dx$ existe para cada $\xi \in \mathbb{R}$, então o limite $\mathcal{F}f(\xi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}f_n(\xi)$ pode ser visto como o limite pontual.

4) Como dissemos anteriormente, o Teorema de Plancherel continua valendo para funções f e g pertencentes a $L^2(\mathbb{R})$.

A demonstração do Teorema é técnica. No apêndice, vamos apenas esboçar a ideia de sua demonstração, apenas para mostrar a sua relação com a fórmula de Plancherel.

Por fim, uma aplicação do Teorema acima é no cálculo da transformada de Fourier da função $x \mapsto \frac{\text{sen}(x)}{x}$. Vimos que esta função não pertence a $L^1(\mathbb{R})$, mas pertence a $L^2(\mathbb{R})$. Logo a transformada de Fourier pode ser calculada. Ela é igual a

$$\mathcal{F}\left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-ix\xi} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \begin{cases} \pi, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

A conta pode ser feita usando análise complexa ou como feito no Exemplo (72).

15.3. Analogias entre a série e a transformada de Fourier

Vamos finalizar esta aula mostrando as diversas semelhanças entre a série e a transformada de Fourier. Abaixo faremos uma mini tabela com as analogias. Seremos aqui pouco precisos com as hipóteses. Note que $\hat{f}(\xi)$ tem papel análogo às constantes (c_n) da série de Fourier:

Série de Fourier	Transformada de Fourier
Para $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$: $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx$.	Para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$: $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx$.
Dado (c_n) : $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.	Dado \hat{f} : $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$.
Vale Parseval: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) ^2 dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n ^2$	Vale Plancherel: $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) ^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) ^2 dx$.

15.4. Apêndice (Para quem quiser um pouco mais de detalhes matemáticos)

Nesse curso, acreditamos que seja difícil lembrar de todas as hipóteses dos teoremas e as classes de funções envolvidas: L^1 , L^2 e L^∞ . Assim, o mais importante nesse momento é se acostumar com as fórmulas da transformada de Fourier e de sua inversa, além de conhecer o Teorema de Plancherel. Não se sintam pressionados em tentar entender todos os detalhes técnicos das demonstrações feitas acima.

Aqui nesse apêndice, daremos ideias e mais detalhes de algumas demonstrações acima, apenas para os estudantes que realmente estiverem curiosos. O apêndice deve ser lido apenas quem se interessar em se aprofundar um pouco mais e pode ser ignorado sem problemas numa primeira leitura.

15.4.1. Justificativa do final do Teorema 69. Nesta seção, vamos justificar o seguinte limite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} f(x + tz) dz = f(x).$$

Acima vamos usar t ao invés de ϵ , como no Teorema 69, para não confundir o argumento.

Para demonstrar o limite acima, vamos usar a definição de limite: Dado $\epsilon > 0$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que, se $0 \leq t < \delta$, então

$$(15.4.1) \quad \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} f(x + tz) dz - f(x) \right| < \epsilon.$$

Para isto, observamos que

$$(15.4.2) \quad \begin{aligned} & \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} f(x + tz) dz - f(x) \right| \stackrel{(1)}{=} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} f(x + tz) dz - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) f(x) \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} (f(x + tz) - f(x)) dz \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} |f(x + tz) - f(x)| dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|tz| \leq \delta} e^{-\frac{z^2}{2}} |f(x + tz) - f(x)| dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|tz| \geq \delta} e^{-\frac{z^2}{2}} |f(x + tz) - f(x)| dz. \end{aligned}$$

em que usamos em (1) que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} = 1.$$

Como f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $|tz| < \delta$, então $|f(x + tz) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Assim,

$$(15.4.3) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|tz| \leq \delta} e^{-\frac{z^2}{2}} |f(x + tz) - f(x)| dz \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|tz| \leq \delta} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Agora note que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|tz| \geq \delta} e^{-\frac{z^2}{2}} |f(x + tz) - f(x)| dz \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|tz| \geq \delta} e^{-\frac{z^2}{2}} |f(x + tz)| dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|tz| \geq \delta} e^{-\frac{z^2}{2}} |f(x)| dz \\ & \leq \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \int_{|tz| \geq \delta} e^{-\frac{t^2 z^2}{2t^2}} |f(x + tz)| t dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|tz| \geq \delta} e^{-\frac{z^2}{2}} dz |f(x)| \\ & \leq \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \int_{|y| \geq \delta} e^{-\frac{y^2}{2t^2}} |f(x + y)| dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|tz| \geq \delta} e^{-\frac{z^2}{2}} dz |f(x)| \\ & \leq \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2t^2}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + y)| dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|tz| \geq \delta} e^{-\frac{z^2}{2}} dz |f(x)| \\ & \leq \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2t^2}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|z| \geq \frac{\delta}{t}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz |f(x)| \\ & \leq \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2t^2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|z| \geq \frac{\delta}{t}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz |f(x)| \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2t^2}} = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|z| \geq \frac{\delta}{t}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,$$

concluimos que podemos escolher $t > 0$ tal que

$$(15.4.4) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|tz| \geq \delta} e^{-\frac{z^2}{2}} |f(x + tz) - f(x)| dz < \frac{\epsilon}{2}.$$

A estimativa (15.4.4) e (15.4.3) pode ser usadas na Equação (15.4.2) para concluir (15.4.1).

15.4.2. Sobre a demonstração do Teorema 75. A demonstração do Teorema 75 é técnica. Vamos apenas explicar como ele pode ser obtido através da fórmula de Plancherel.

O conjunto das funções $L^2(\mathbb{R})$ tem uma propriedade muito importante: ele é um espaço completo. Isto quer dizer o seguinte: suponha que (g_n) seja uma sequência de Cauchy de funções em $L^2(\mathbb{R})$, ou seja, tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_{n, m \geq N} \|g_n - g_m\|_{L^2(\mathbb{R})} \right) = 0.$$

Logo existe uma função $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Agora consideremos $f \in L^2(\mathbb{R})$ e as funções

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq n \\ 0 & |x| > n \end{cases}.$$

Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > n} |f(x)|^2 dx = 0,$$

(usamos que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$). Logo

$$\|f_n - f_m\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_n - f + f - f_m\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f - f_m\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_{n, m \geq N} \|f_n - f_m\|_{L^2(\mathbb{R})} \right) &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_{n, m \geq N} (\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f - f_m\|_{L^2(\mathbb{R})}) \right) \\ &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq N} (\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R})}) \right) = 0. \end{aligned}$$

Concluimos que a sequência $(\mathcal{F}f_n)$ satisfaz

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_{n, m \geq N} \|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f_m\|_{L^2(\mathbb{R})} \right) \stackrel{(1)}{=} \sqrt{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_{n, m \geq N} \|f_n - f_m\|_{L^2(\mathbb{R})} \right) = 0,$$

em (1), usamos o Teorema de Plancherel. Como $L^2(\mathbb{R})$ é completo. O limite acima garante que existe uma função em $L^2(\mathbb{R})$, que chamaremos que $\mathcal{F}f$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 0.$$

Assim, podemos definir a transformada de Fourier como a função $\mathcal{F}f$ acima. Veja que o Teorema de Plancherel foi fundamental.

Principais resultados e ideias dessa seção:

1) Vimos que para $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, temos

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\epsilon^2}{2}\xi^2} e^{i\xi x} d\xi$$

Se $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, então

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

A função \mathcal{F}^{-1} definida acima é chamada de transformada de Fourier inversa.

2) Vimos que se f, \hat{f}, g e \hat{g} pertencem a $L^1(\mathbb{R})$, então vale a fórmula de Plancherel:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

2) Vimos que a transformada de Fourier pode ser definida para funções em $L^2(\mathbb{R}^n)$, isto é, funções tais que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$. Neste caso, $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ é uma bijeção com inversa dada por \mathcal{F}^{-1} . ($\mathcal{F}f$ e $\mathcal{F}^{-1}f$ são definidas através de um limite quando $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$).

Aula do dia 27 de maio

Convolução

Vimos nas aulas anteriores dois tipos de expressões envolvendo integrais que aparecem diversas vezes em aplicações. Observe as integrais abaixo:

$$\text{Fórmula de Poisson } u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \varphi) g(\varphi) d\varphi,$$

em que $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta)+r^2}$. Ela foi vista na aula do dia 8 de maio.

$$\text{Fórmula obtida ao estudar } \mathcal{F}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon^2}} f(y) dy.$$

A expressão acima foi vista no dia 22 de maio.

Ambas as expressões têm algo em comum. Elas são integrais da forma $\int h(x-y) g(y) dy$. Estes tipos de integrais aparecem aos montes: são chamados de convolução. Vamos estudar o caso em que as funções são definidas em todo \mathbb{R} .

DEFINIÇÃO 77. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Definimos a convolução $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ pela integral

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy.$$

OBSERVAÇÃO 78. É claro que não é para todas as funções f e g que a integral acima existe (se $f(x) = g(x) = e^{x^2}$, então a integral acima não existe para nenhum x). No entanto, a integral acima está bem definida em diversas situações. Por exemplo:

i) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y) g(y)| dy \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} |g(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| dy = \sup_{y \in \mathbb{R}} |g(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| dz = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

ii) O mesmo argumento pode ser feito para $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$.

iii) Se f e g pertencem a $L^2(\mathbb{R})$, ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty$, então $f * g$ está bem definida. De fato¹, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y) g(y)| dy \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^2 dy} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^2 dy}$$

¹Usamos o seguinte argumento para a desigualdade. Sabemos de álgebra linear que, toda vez que temos um produto interno, vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \sqrt{\langle f, f \rangle} \sqrt{\langle g, g \rangle}.$$

Usando o produto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

obtemos

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx}.$$

$$= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 dz} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^2 dy} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

iii) É mais complicado provar, mas podemos mostrar que as transformadas de Fourier estão bem definidas quando f e g pertencem a $L^1(\mathbb{R})$ ou $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$. Existem diversas outras situações em que elas também podem ser definidas.

Vamos abaixo estudar algumas propriedades importantes da convolução. Elas aparecem tanto na teoria como na prática.

PROPOSIÇÃO 79. *A convolução satisfaz as seguintes propriedades (abaixo suporemos que todas as integrais estão bem definidas):*

- i) $f * g = g * f$ (A convolução é comutativa).
- ii) $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha f * g + \beta f * h$ (A convolução é linear).
- iii) $f * (g * h) = (f * g) * h$ (A convolução é associativa).

DEMONSTRAÇÃO. i) Basta verificarmos que

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x-z)dz = g * f(x),$$

em (1) fizemos a mudança de variáveis $z = x - y$.

ii) Basta ver que

$$\begin{aligned} f * (\alpha g + \beta h) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)(\alpha g(y) + \beta h(y))dy \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy + \beta \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)h(y)dy \\ &= \alpha f * g(x) + \beta f * h(x). \end{aligned}$$

iii) Vemos que

$$\begin{aligned} f * (g * h)(x) &= f * (h * g)(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)(h * g)(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(y-z)g(z)dz \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(z)h(y-z)dy \right) dz \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w)g(z)h(x-w-z)dzdw. \end{aligned}$$

Em (1), usamos $w = x - y$ e $z = z$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (f * g) * h &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x-y)h(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y-z)g(z)h(y)dz \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y-z)g(z)h(y)dy \right) dz \stackrel{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w)g(z)h(x-w-z)dw dz. \end{aligned}$$

Em (2), usamos $w = x - y - z$ e $z = z$. □

Vamos agora mostrar agora como a derivada atua em convoluções. Veremos mais adiante algumas aplicações.

PROPOSIÇÃO 80. *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que f é derivável, $f * g$ e $f' * g$ estão bem definidos. Logo*

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = \frac{df}{dx} * g(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta ver que

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}(x-y)g(y)dy = \frac{df}{dx} * g(x).$$

□

COROLÁRIO 81. *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que g é derivável, $f * g$ e $f' * g$ estão bem definidos. Logo*

$$\frac{d}{dx} (f * g)(x) = f * \frac{dg}{dx}(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que

$$\frac{d}{dx} (f * g)(x) = \frac{d}{dx} (g * f)(x) = \frac{dg}{dx} * f(x) = f * \frac{dg}{dx}(x).$$

□

Podemos usar a proposição acima para aproximar uma função contínua por uma função C^∞ (Lembrando que uma função C^∞ é uma função com infinitas derivadas). A proposição abaixo possui diversas variações. Apresentaremos uma das versões mais simples.

PROPOSIÇÃO 82. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ contínua e integrável. Escolhemos $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ , que se anula fora de um intervalo $[-R, R]$ e tal que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$. Definimos $g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, para cada $\epsilon > 0$. Logo $f * g_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f * g_\epsilon(x) = f(x)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Para provar que $f * g_\epsilon$ tem infinitas derivadas, basta aplicar a Proposição (80) diversas vezes. Assim,

$$\frac{d^k}{dx^k} (f * g_\epsilon) = \frac{d^k}{dx^k} (g_\epsilon * f) = \frac{d^k g_\epsilon}{dx^k} * f.$$

Quanto ao limite, podemos fazer o seguinte:

$$f * g_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g_\epsilon(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{y}{\epsilon}\right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\epsilon z) g(z) dz.$$

Tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f * g_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\epsilon z) g(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(z) dz = f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(z) dz = f(x).$$

Assim, segue o resultado.²

□

OBSERVAÇÃO 83. Ao estudar a inversa da transformada de Fourier, provamos que $\frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\epsilon^2}} f(y) dy$ vai a $f(x)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Esta expressão pode ser escrita como

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\epsilon^2}} f(y) dy = g_\epsilon * f(x),$$

em que $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. A função g não se anula fora de um intervalo finito. Mas a demonstração do limite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon * f(x) = f(x)$ segue de forma semelhante à Proposição 82.

16.1. Convolução e Transformada de Fourier

Nesta parte final da aula, vamos mostrar a relação entre transformada de Fourier e convolução. Estas relações têm diversas aplicações.

TEOREMA 84. *As seguintes propriedades são satisfeitas para funções f e g , sempre que as operações estejam bem definidas.*

- i) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$.
- ii) $2\pi \mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$.
- iii) $\mathcal{F}^{-1}(f * g) = \mathcal{F}^{-1}(f) \mathcal{F}^{-1}(g)$.
- iv) $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$.

²Apenas para que quiser mais detalhe: Podemos provar o limite acima da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} |f * g_\epsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\epsilon z) g(z) dz - f(x) \right| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-\epsilon z) - f(x)| |g(z)| dz \\ &= \sup_{|z| \leq R} |f(x-\epsilon z) - f(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(z)| dz \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

A frase “sempre que as operações estejam bem definidas” é um pouco superficial. Poderíamos enunciar o teorema com funções $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$. As technicalidades, no entanto, poderiam ofuscar o enunciado do teorema.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração segue das definições.

i) Vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f * g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} e^{-i(x-y)\xi} f(y) g(x-y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-y)\xi} g(x-y) dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\xi} g(t) dt \right) dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y) dy \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\xi} g(t) dt \right) \\ &= \mathcal{F}f(\xi) \mathcal{F}g(\xi). \end{aligned}$$

iv) Vamos usar \mathcal{F}^{-1} . Seja $\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1}f$ e $\tilde{g} = \mathcal{F}^{-1}g$. Usando *i*), temos

$$\mathcal{F}(\tilde{f} * \tilde{g}) = \mathcal{F}(\tilde{f}) \mathcal{F}(\tilde{g}).$$

Aplicando \mathcal{F}^{-1} a ambos os lados, obtemos

$$\tilde{f} * \tilde{g} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\tilde{f}) \mathcal{F}(\tilde{g})).$$

Substituindo \tilde{f} por $\mathcal{F}^{-1}f$ e \tilde{g} por $\mathcal{F}^{-1}g$:

$$\mathcal{F}^{-1}f * \mathcal{F}^{-1}g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f) \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}g)) = \mathcal{F}^{-1}(fg).$$

Concluimos que $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}f * \mathcal{F}^{-1}g$.

iii) A demonstração é muito semelhante. De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(f * g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} f * g(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(\xi-y) dy \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} e^{ix(\xi-y)} f(y) g(\xi-y) dy \right) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} f(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi-y)x} g(\xi-y) d\xi \right) dy \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} f(y) dy \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(t) dt \right) = 2\pi \mathcal{F}^{-1}f(x) \mathcal{F}^{-1}g(x). \end{aligned}$$

ii) Basta aplicar \mathcal{F} na expressão de iii). Seja $\tilde{f} = \mathcal{F}f$ e $\tilde{g} = \mathcal{F}g$. Usando iii), temos

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f} * \tilde{g}) = 2\pi \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}) \mathcal{F}^{-1}(\tilde{g}).$$

Aplicando \mathcal{F} nos dois lados, obtemos

$$\tilde{f} * \tilde{g} = 2\pi \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}) \mathcal{F}^{-1}(\tilde{g})).$$

Por fim, substituindo \tilde{f} por $\mathcal{F}f$ e \tilde{g} por $\mathcal{F}g$, temos:

$$\mathcal{F}f * \mathcal{F}g = 2\pi \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}g)) \iff \mathcal{F}f * \mathcal{F}g = 2\pi \mathcal{F}(fg).$$

□

16.2. Aplicação

Vamos ver diversas aplicações da transformada de Fourier nas próximas aulas. Hoje nos restringiremos a um pequeno exemplo. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Vamos procurar uma solução da equação abaixo

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x) + u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMA 85. Mostre que existe uma única função $u \in L^1(\mathbb{R})$ tal que

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x) + u(x) = f(x).$$

A solução é dada por

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy.$$

SOLUÇÃO 86. Para achar a solução, vamos aplicar a transformada de Fourier na equação diferencial:

$$\mathcal{F}\left(-\frac{d^2u}{dx^2}\right)(\xi) + \mathcal{F}u(\xi) = \mathcal{F}f(\xi).$$

Como $\mathcal{F}\left(\frac{d^k f}{dx^k}\right)(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi)$, temos

$$\xi^2 \hat{u}(\xi) + \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi) \iff \hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + \xi^2}.$$

Podemos agora tomar a transformada inversa para obter u :

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{f}(\xi)}{1 + \xi^2}\right)(x).$$

Usaremos agora que $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$. Logo

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1 + \xi^2}\right) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x).$$

Sabemos também que $\mathcal{F}(e^{-|x|})(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2}$. Assim

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1 + \xi^2}\right) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \left(\frac{1}{2}e^{-|x|}\right) * f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy.$$

Portanto, a solução é dada por

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy.$$

Por outro lado, se u é dado pela expressão acima, então basta seguir os passos contrário para provar que u é uma solução da equação desejada.

Principais resultados e ideias dessa seção:

1) Definimos a convolução $f * g$ por

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy.$$

Esta operação é comutativa, associativa e linear em cada termo.

2) A convolução tem a propriedade

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = \frac{df}{dx} * g(x)$$

se f for derivável e se as convoluções acima estão bem definidas.

3) As seguintes relações entre convolução e transformada de Fourier são válidas:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g) &= \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) & 2\pi\mathcal{F}(fg) &= \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) \\ \mathcal{F}^{-1}(f * g) &= \mathcal{F}^{-1}(f)\mathcal{F}^{-1}(g) & \mathcal{F}^{-1}(fg) &= \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g) \end{aligned}.$$

Aula do dia 3 de junho

A equação do calor em \mathbb{R}

Vamos agora aplicar a transformada de Fourier na resolução da equação do calor. Até agora, vimos apenas como resolver a equação em intervalos limitados $[0, L]$ ou em subconjuntos abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitados.

Nosso objetivo agora é estudar as soluções da equação do calor quando esta está definida em toda a reta real. Note que agora não precisamos mais de condições de contorno, já que a fronteira de \mathbb{R} é vazia. Assim, a equação do calor pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Acima temos apenas uma condição inicial. Vamos supor que u_0 pertence a $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$ de tal forma que sua transformada de Fourier esteja bem definida.

17.1. Resolvendo a equação por transformada de Fourier

Para resolver a equação, aplicaremos a transformada de Fourier *na variável x* . Vamos também supor que u seja de classe C^2 e tenha derivadas integráveis. Aplicando a transformada de Fourier na equação, obtemos

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\right) = \mathcal{F}\left(k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)\right),$$

ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx = k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) dx.$$

Note que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(t, x) dx$$

e que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) dx &\stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{-ix\xi}) u(t, x) dx \\ &= (-i\xi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(t, x) dx = -\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(t, x) dx. \end{aligned}$$

Na passagem (1) fizemos integração por partes. O argumento é exatamente o usado na aula do dia 20 de maio, Proposição 67, para mostrar que a transformada de Fourier leva derivadas em polinômios. Vamos denotar por $\hat{u} = \mathcal{F}u$ a transformada de Fourier de u na variável x e por $\hat{u}_0 = \mathcal{F}u_0$ a transformada de Fourier de u_0 . Assim, a equação do calor se torna:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \xi) = -k\xi^2 \hat{u}(t, \xi), & t > 0, \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi), & \xi \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Esta equação é simples de resolver. De fato, sabemos que $f'(t) = af(t)$ implica que $f(t) = f(0)e^{at}$. Logo

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \xi) = -k\xi^2 \hat{u}(t, \xi) \implies \hat{u}(t, \xi) = e^{-k\xi^2 t} \hat{u}(0, \xi) = e^{-k\xi^2 t} \hat{u}_0(\xi).$$

Para obter $u(t, x)$ basta aplicar a transformada de Fourier inversa. Assim,

$$(17.1.1) \quad u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k\xi^2 t} \hat{u}_0(\xi)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{-k\xi^2 t} \hat{u}_0(\xi) d\xi.$$

Note que a integral acima já nos fornece a solução. Contudo na realidade são duas integrais, pois \hat{u}_0 também é definida através de uma integral.

Podemos deixar a expressão acima numa forma mais simples usando o que aprendemos sobre convolução. Lembramos que $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$. Logo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k\xi^2 t} \hat{u}_0(\xi)\right) &= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k\xi^2 t}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{u}_0\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k\xi^2 t}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(u_0)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k\xi^2 t}\right) * u_0.\end{aligned}$$

Vamos agora calcular $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k\xi^2 t}\right)$.

LEMA 87. *A seguinte fórmula é válida: $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k\xi^2 t}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Vimos que $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ e que $\mathcal{F}(f(\delta x)) = \frac{1}{\delta} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$. Assim

$$\mathcal{F}\left(e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2kt}}\right)^2}\right) = \sqrt{2kt} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(\sqrt{2kt}\xi\right) = \sqrt{2kt} \sqrt{2\pi} e^{-kt\xi^2}.$$

Logo

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\left(e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2kt}}\right)^2}\right) = \sqrt{4\pi kt} \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-kt\xi^2}\right).$$

Concluimos que

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-kt\xi^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

□

Voltando a nossa conta, chegamos que

$$u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k\xi^2 t}\right) * u_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right) * u_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} u_0(y) dy.$$

O que provamos aqui foi o seguinte:

TEOREMA 88. *A função abaixo é uma solução da Equação do Calor:*

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} u_0(y) dy.$$

É claro que poderíamos nos perguntar sobre a unicidade desta solução. É possível mostrar (não faremos aqui), que a solução acima é a única limitada, se u_0 for limitado.

A função definida como

$$K(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

é chamada de solução fundamental do calor ou núcleo (kernel) do calor.

Como vimos temos

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x-y) u_0(y) dy = K_t * u_0(x),$$

em que $K_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é a função $K_t(x) = K(t, x)$, ou seja, a solução da equação do calor é a convolução (em x) da solução fundamental com a condição inicial.

A solução fundamental pode ser interpretada como a solução da equação do calor, quando temos uma temperatura inicial u_0 muito alta concentrada no $x = 0$, mas sua integral $\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) dx$ é igual a 1. De fato, conforme o tempo vai zero, a solução fundamental fica cada vez mais concentrada em 0. No entanto o valor de sua integral em x é sempre o mesmo e igual a 1. Veja a Figura 17.1.1, em que plotamos o núcleo do calor em relação ao espaço para diferentes valores de t .

Vamos usar a fórmulas obtidas para achar e visualizar a solução da equação do calor com uma condição inicial específica.

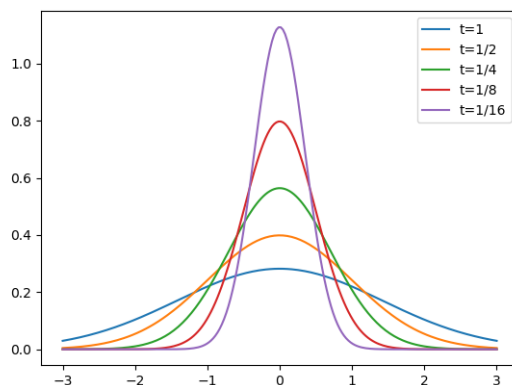


FIGURA 17.1.1. Ilustração do núcleo do calor

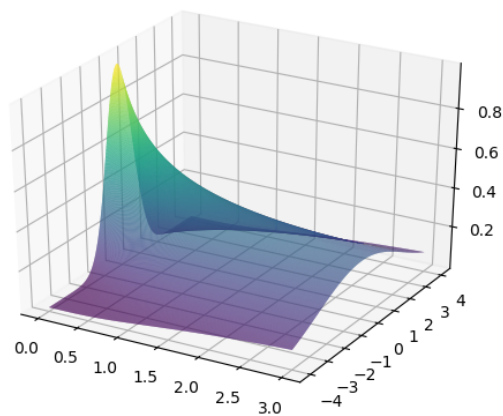


FIGURA 17.1.2. Ilustração da solução. Tempo de 0 a 4. Espaço de -4 a 4.

EXEMPLO 89. Suponha que $u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$. Para calcular u vamos usar a Equação (17.1.1):

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-k\xi^2 t} \hat{u}_0(\xi) \right) \stackrel{(1)}{=} \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-k\xi^2 t} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \right) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-\left(\frac{1}{4} + kt\right)\xi^2} \right) \\
 &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi \left(kt + \frac{1}{4}\right)}} e^{-\frac{x^2}{4\left(kt + \frac{1}{4}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \left(kt + \frac{1}{4}\right)}} e^{-\frac{x^2}{4kt+1}}.
 \end{aligned}$$

Em (1), usamos $\mathcal{F}u_0(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4}}$, o que pode ser obtido fazendo mudança de variável. Em (2), calculamos a transformada de Fourier novamente usando mudança de variável (é simples! Já sabemos a transformada de Fourier da Gaussiana. Assim, é só usar os valores usando a Proposição 67 da aula do dia 20 de maio)

Essa solução pode ser vista na Figura 17.1.2.

17.2. Algumas observações sobre a equação do calor

Para finalizar, vamos verificar algumas propriedades da solução da equação do calor. Começaremos estudando a solução fundamental.

PROPOSIÇÃO 90. *O núcleo do calor satisfaz as seguintes propriedades:*

- 1) Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, K é solução da equação do calor: $\frac{\partial K}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(t, x)$.
- 2) As integrais de K em x são dadas por $\int_{-\infty}^{\infty} K(t, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |K(t, x)| dx = 1$.

DEMONSTRAÇÃO. 1) Basta observar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \frac{x^2}{4kt^2} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right) \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{2kt} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right] \\ &= -\frac{1}{2kt\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} + \left(\frac{x}{2kt} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}. \end{aligned}$$

Agora é claro que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right).$$

- 2) Podemos calcular a integral fazendo uma mudança de variável

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \sqrt{2kt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2kt}}\right)^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2kt}} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1,$$

em que fizemos $y = \frac{x}{\sqrt{2kt}}$. □

Usando a proposição acima, podemos verificar diretamente que $u(t, x) = K_t * u_0(x)$ é de fato uma solução da equação do calor. De fato

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(t, x-y) u_0(y) dy \right) - k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(t, x-y) u_0(y) dy \right) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial K}{\partial t} - k \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \right) (t, x-y) u_0(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Usando o que vimos de convolução também podemos provar o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 91. *Seja $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Logo a função*

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x-y) u_0(y) dy$$

é de classe $C^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R})$. Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = u_0(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. É simples mostrar diferenciabilidade. De fato, nós vemos que

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(t, x-y) u_0(y) dy \right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{j+k} K}{\partial t^j \partial x^k} (t, x-y) u_0(y) dy \right).$$

Além disso, vemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t, x-y) u_0(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-y) u_0(y) dy$$

e que

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Seja $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} e^{-\frac{x^2}{4k}}$. Logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4k}} dx = 1.$$

Definindo $g_{\sqrt{t}}(x) := \frac{1}{\sqrt{t}} g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u_0 * g_{\sqrt{t}}(x) \rightarrow u_0(x),$$

em que usamos resultados análogos ao do dia 27 de maio. Veja a Proposição 82. \square

Por fim, vamos mostrar uma propriedade interessante da solução fundamental (núcleo do calor).

PROPOSIÇÃO 92. *A solução fundamental tem a seguinte propriedade: Para $t, s > 0$, vale*

$$K_t * K_s(x) = K_{t+s}(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. A forma mais simples de se provar isto é usando transformada de Fourier. De fato,

$$\mathcal{F}(K_t * K_s)(\xi) = \mathcal{F}(K_t)(\xi) \mathcal{F}(K_s)(\xi)$$

Vimos que $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k\xi^2 t}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} = K_t(x)$. Logo

$$\mathcal{F}K_t(\xi) = e^{-k\xi^2 t}.$$

Assim

$$\mathcal{F}(K_t)(\xi) \mathcal{F}(K_s)(\xi) = e^{-k\xi^2 t} e^{-k\xi^2 s} = e^{-k\xi^2(t+s)}.$$

Portanto

$$K_t * K_s(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(K_t * K_s)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k\xi^2(t+s)}\right)(x) = K_{t+s}(x).$$

\square

Principais resultados e ideias dessa seção:

1) Estudamos a equação

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

usando Transformada de Fourier. Usando propriedades de convolução, concluímos que as soluções são dadas por

$$u(t, x) \stackrel{(1)}{=} \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k\xi^2 t} \hat{u}_0(\xi)\right) \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} u_0(y) dy.$$

Em (1) usamos transformada de Fourier na variável x . Em (2), usamos propriedades da convolução.

2) As soluções são C^∞ para $t > 0$ e convergem pontualmente para u_0 , quando u_0 é contínua.

3) A função $K(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$, para $t > 0$ e $K(t, x) = 0$ para $t \leq 0$, é chamada de solução fundamental do calor (também conhecida como núcleo do calor ou kernel do calor).

Aula do dia 5 de junho

A equação da onda em \mathbb{R} e de Laplace no semiplano

Nesta aula vamos usar a transformada de Fourier para estudar a equação da onda definida em toda a reta real e a equação de Laplace em $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ com condições de Dirichlet.

18.1. A equação da onda em \mathbb{R}

Vamos começar com a equação de onda na reta. Novamente, não são necessárias condições de contorno, apenas as duas condições iniciais:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Para resolvê-la, vamos novamente aplicar a transformada de Fourier na variável x . Vamos supor que u seja duas vezes derivável e que tanto u como $\frac{\partial u}{\partial x}$ vão para zero quando $|x| \rightarrow \infty$. Obtemos, assim,

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x)\right) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)\right).$$

Note que

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(t, x) dx \right)$$

e que

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{-ix\xi}) u(t, x) dx = -\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(t, x) dx.$$

Em (1) usamos integração por partes tal como na aula do dia 20 de maio¹.

Denotando por $\hat{u} = \mathcal{F}u$ a transformada de Fourier na variável x , temos

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(t, \xi) = -\xi^2 \hat{u}(t, \xi), & t > 0, \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, \xi) = \hat{g}(\xi), & \xi \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

A solução geral é dada por

$$\hat{u}(t, \xi) = A(\xi) \cos(t\xi) + B(\xi) \sin(t\xi).$$

Note que

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \xi) = -\xi A(\xi) \sin(t\xi) + \xi B(\xi) \cos(t\xi).$$

¹Vamos aqui lembrar como fazer a integral por partes. Abaixo usaremos, em (1) e em (2), que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x) = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-ix\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \Big|_{-R}^R - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\partial}{\partial x} (e^{-ix\xi}) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) dx \\ &\stackrel{(1)}{=} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\partial}{\partial x} (e^{-ix\xi}) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) dx = - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x} (e^{-ix\xi}) u(t, x) \Big|_{-R}^R + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{-ix\xi}) u(t, x) dx \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{-ix\xi}) u(t, x) dx \end{aligned}$$

Usando as condições iniciais, podemos calcular A e B :

$$\begin{aligned}\hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi) &\iff A(\xi) = \hat{f}(\xi). \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, \xi) = \hat{g}(\xi) &\iff \xi B(\xi) = \hat{g}(\xi) \iff B(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{\xi}.\end{aligned}$$

Portanto

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) \cos(t\xi) + \hat{g}(\xi) \frac{\text{sen}(t\xi)}{\xi}.$$

Assim, a solução será dada por

$$\begin{aligned}u(t, x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi) \cos(t\xi)\right) + \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{g}(\xi) \frac{\text{sen}(t\xi)}{\xi}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left(\hat{f}(\xi) \cos(t\xi) + \hat{g}(\xi) \frac{\text{sen}(t\xi)}{\xi}\right) d\xi.\end{aligned}$$

Vamos mexer um pouco com a equação acima para obter uma expressão mais simples. Vamos iniciar com a expressão contendo cosseno.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi) \cos(t\xi)\right)(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi) \left(\frac{e^{it\xi} + e^{-it\xi}}{2}\right)\right)(x) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi) e^{it\xi}\right)(x) + \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi) e^{-it\xi}\right)(x) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)).\end{aligned}$$

Na última passagem, usamos as propriedades de transformada de Fourier que foram vistas no dia 20 de maio. (Vocês se lembram? Era simples! De fato, temos

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi) e^{it\xi}\right)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) e^{it\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x+t)\xi} \hat{f}(\xi) d\xi = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x+t) = f(x+t)$$

e de maneira igual para $\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi) e^{-it\xi}\right)(x)$.

Por outro lado, sabemos pela Equação (72) do dia 22 de maio, que

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\text{sen}(t\xi)}{\xi}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |\xi| \leq t \\ 0, & |\xi| > t \end{cases}.$$

Assim, usando a propriedade de convolução, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{g}(\xi) \frac{\text{sen}(t\xi)}{\xi}\right) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\text{sen}(t\xi)}{\xi}\right) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\text{sen}(t\xi)}{\xi}\right) * g = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\text{sen}(t\xi)}{\xi}\right)(y) g(x-y) dy = \frac{1}{2} \int_{-t}^t g(x-y) dy.\end{aligned}$$

Vamos assumir que g seja contínua e considerar G uma primitiva de g , ou seja, $G' = g$. Logo, pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\frac{1}{2} \int_{-t}^t g(x-y) dy = -\frac{1}{2} G(x-y) \Big|_{-t}^t = \frac{1}{2} (G(x+t) - G(x-t)).$$

Juntando tudo, concluímos que

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2}(G(x+t) - G(x-t)).$$

A fórmula acima é chamada de **Fórmula de d'Alembert**. Note que a equação acima nos diz que $u(t, x)$ é soma de funções da forma $h_1(x+t)$ e $h_2(x-t)$, ou seja, uma função que “caminha” para a esquerda e outra que “caminha” para a direita.

Note que por outro lado, toda função da forma $h(x+t)$ ou $h(x-t)$ é solução da equação da onda, quando $h \in C^2(\mathbb{R})$. De fato, pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(h(x+t)) &= h'(x+t) \text{ e } \frac{\partial^2}{\partial x^2}(h(x+t)) = \frac{\partial}{\partial x}(h'(x+t)) = h''(x+t). \\ \frac{\partial}{\partial t}(h(x+t)) &= h'(x+t) \text{ e } \frac{\partial^2}{\partial t^2}(h(x+t)) = \frac{\partial}{\partial t}(h'(x+t)) = h''(x+t).\end{aligned}$$

Logo $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (h(x+t)) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h(x+t)) = h''(x+t)$. O mesmo argumento pode ser usado para a função $h(x-t)$.

18.2. Equação de Laplace

Vamos agora estudar a equação de Laplace no semiplano $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ com condições de Dirichlet:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, & y > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Vamos seguir novamente a abordagem anterior e aplicar a transformada de Fourier em x . Esta transformada será denotada por \hat{u} ou $\mathcal{F}u$. Novamente, assumiremos que u seja duas vezes derivável e que tanto u como $\frac{\partial u}{\partial x}$ vão para zero quando $|x| \rightarrow \infty$. Assim

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Note que

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x, y) dx \right) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\xi, y)$$

e que

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{-ix\xi}) u(x, y) dx = -\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x, y) dx = -\xi^2 \hat{u}(\xi, y),$$

em que a integração por partes foi usada. Concluímos, assim, que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\xi, y) = \xi^2 \hat{u}(\xi, y), & y > 0, \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

A solução geral será dada por

$$\hat{u}(\xi, y) = A(\xi) e^{-|\xi|y} + B(\xi) e^{+|\xi|y}.$$

No entanto, a transformada de Fourier não está bem definida para $e^{+y|\xi|}$, já que essa função cresce rápido demais. Assim, vamos nos restringir a exponencial negativa:

$$\hat{u}(\xi, y) = A(\xi) e^{-|\xi|y}.$$

Usando as condição de contorno, temos

$$A(\xi) = \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi).$$

Logo

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y}.$$

Concluímos que

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(\xi, y)) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y} d\xi.$$

Novamente podemos melhorar um pouco a expressão acima usando as propriedades de convolução. De fato,

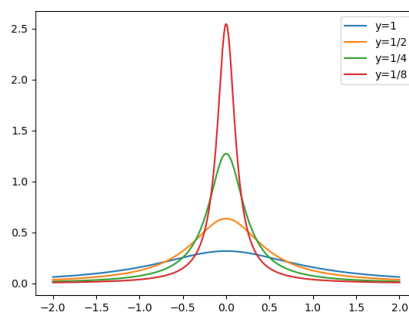
$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y}) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|y}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|y}) * f.$$

Vamos calcular $\mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|y})$. Já vimos que $\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}$. Logo

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-y|\xi|}) = \frac{y}{\pi} \left(\frac{1}{y^2 + x^2} \right).$$

Juntando tudo, a solução pode ser escrita como

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y}) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|y}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|y}) * f \\ &= \left[\frac{y}{\pi} \left(\frac{1}{y^2 + x^2} \right) \right] * f = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + t^2} f(x-t) dt. \end{aligned}$$

FIGURA 18.2.1. O núcleo de Poisson $P(x, y)$

A função

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2}$$

é chamada de kernel (ou núcleo) de Poisson. Veja a Ilustração 18.2.1 para o núcleo de Poisson em função de x e diferentes valores de y . Observe como se assemelha ao núcleo do calor visto na aula anterior.

Observamos que $u(x, y) = P_y * f(x)$. Também usamos a notação $P(x, y) = P_y(x)$.

OBSERVAÇÃO 93. Note que vimos duas soluções explícitas da equação

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}.$$

Quando $\Omega = B_1(0)$, a solução é dada, em coordenadas polares, por

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \varphi) f(\varphi) d\varphi,$$

em que $P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta)+r^2}$.

Quando $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$, a solução é dada por

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x-t) f(t) dt,$$

em que $P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2+x^2}$.

Veja como as fórmulas acima são semelhantes! Não é a toa que $P_r(\theta)$ é chamada de núcleo de Poisson da bola e $P_y(x)$ é chamado de núcleo de Poisson do semiplano.

Vamos terminar verificando algumas propriedades do núcleo de Poisson.

PROPOSIÇÃO 94. O núcleo de Poisson satisfaz as seguintes propriedades:

1) Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y > 0$, temos $\Delta P(x, y) = 0$.

2) A integral em x é dada por $\int_{-\infty}^{\infty} P_y(x) dx = 1$.

DEMONSTRAÇÃO. 1) Derivando em x , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\pi} \frac{-2xy}{(y^2 + x^2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-2y}{(y^2 + x^2)^2} + \frac{8x^2y}{(y^2 + x^2)^3} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-2y^3 + 6yx^2}{(y^2 + x^2)^3} \right] \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} P(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\pi} \frac{1}{y^2 + x^2} - \frac{1}{\pi} \frac{2y^2}{(y^2 + x^2)^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-2y}{(y^2 + x^2)^2} - \frac{4y}{(y^2 + x^2)^2} + \frac{8y^3}{(y^2 + x^2)^3} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-6y}{(y^2 + x^2)^2} + \frac{8y^3}{(y^2 + x^2)^3} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-6yx^2 + 2y^3}{(y^2 + x^2)^3} \right].
\end{aligned}$$

Assim, fica claro que $\Delta P(x, y) = 0$.

2) Vamos agora calcular a integral:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} P_y(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + x^2} dx \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{dx}{y} \\
&\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt = \frac{1}{\pi} \arctan(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1,
\end{aligned}$$

em (1) dividimos o numerador e o denominador por $\frac{1}{y^2}$. Em (2) fizemos a mudança de variável $t = \frac{x}{y}$. \square

Usando a proposição acima, podemos verificar novamente que $P_y * f$ resolve a equação de Laplace. De fato,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} P(x-t, y) f(t) dt \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} P(x-t, y) f(t) dt \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x-t, y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x-t, y) \right) f(t) dt = 0.
\end{aligned}$$

A proposição acima também nos permite recuperar a condição de contorno.

TEOREMA 95. *Seja $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Logo a função*

$$u(x, y) = P_y * f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2} f(t) dt.$$

é de classe $C^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R})$. Além disso,

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = f(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. É simples concluir que $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$. De fato,

$$\frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^k \partial y^j}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{k+j} P}{\partial x^k \partial y^j}(x-t, y) f(t) dt,$$

já que P é C^∞ (ou seja, possui todas as derivadas parciais e elas são contínuas) e as derivadas $\frac{\partial^{k+j} P}{\partial x^k \partial y^j}$ são todas integráveis.

Quanto ao limite, observamos que $g(x) := P_1(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ é tal que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$. Seja $g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Logo

$$g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} = P_\epsilon(x).$$

Assim,

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} P_y * f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} g_\epsilon * f(x) = f(x),$$

em que usamos uma versão da Proposição 82 da aula do dia 27 de maio. \square

É interessante notar como a equação da onda difere do calor e de Laplace. Para o calor e Laplace, a solução é sempre C^∞ para $t > 0$ e $y > 0$, respectivamente. Isto não ocorre com a equação da onda. Se as condições iniciais f for de classe C^2 e g for igual a zero, então a solução u será C^2 , mas não necessariamente C^∞ (a não ser que f for também C^∞).

Uma observação final é quanto a unicidade da solução. Note que se $u(x, y)$ é uma solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) &= 0, & y > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

então $u(x, y) + \alpha y$ também é uma solução para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. É possível, no entanto, mostrar que existe uma única solução limitada da equação acima, quando f é limitada. Esta solução é justamente $u(x, y) = P_y * f$.

Para verificar que u é limitada, observe que, se $|f(x)| \leq M$ para $x \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} |u(x, y)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2} |f(t)| dt \\ &\leq \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2} dt \right) \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M. \end{aligned}$$

Principais resultados e ideias dessa seção:

1) A equação de onda

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

pode ser resolvida por Transformada de Fourier. A solução é dada pela fórmula de d'Alembert:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} (G(x+t) - G(x-t)),$$

em que $G' = g$.

2) A equação de Laplace com condições de Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, & y > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

também pode ser resolvida por Transformada de Fourier. A solução é dada por

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left(\hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + t^2} f(x-t) dt.$$

A função $P(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2}$ é chamada de núcleo de Poisson. A solução u é C^∞ para $y > 0$ e converge pontualmente para f , quando f é contínua.

Aula do dia 10 de junho

Transformada de Fourier seno e cosseno

Vamos agora mostrar como podemos usar a transformada de Fourier para estudar equações diferenciais em $[0, \infty[$. Nossa motivação é o estudo da equação do calor em $[0, \infty[$ com condição de Dirichlet em 0. Fisicamente corresponde a uma barra infinita (muito grande), com temperatura constante igual a 0 no ponto $x = 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x > 0 \\ u(t, 0) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, \infty[\end{cases} .$$

Vamos tentar resolver este problema através do método de separação de variáveis e ver o que obtemos. Restringiremo-nos às soluções limitadas.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções da forma $u(t, x) = T(t)X(x)$. Substituindo na equação, obtemos, como sempre

$$\frac{\partial}{\partial t}(T(t)X(x)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(T(t)X(x)).$$

Assim,

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda^2.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{dT(t)}{dt} = -\lambda^2 T(t) &\implies T(t) = Ce^{-\lambda^2 t}. \\ \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda^2 X(x) &\implies \begin{cases} X(x) = A \cos(\lambda x) + B \operatorname{sen}(\lambda x), & \lambda \neq 0 \\ X(x) = A + Bx, & \lambda = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Segundo Passo

Usamos a condição de contorno $u(t, 0) = T(t)X(0) = 0$. Logo $X(0) = 0$.

Se $\lambda = 0$, temos $A = 0$, Logo $X(x) = Bx$. Como queremos apenas soluções limitadas, concluimos que $X(x) = 0$.

Vamos, então, considerar apenas $\lambda \neq 0$. Como $X(0) = 0$, vemos que

$$0 = X(0) = A \cos(\lambda 0) + B \operatorname{sen}(\lambda 0) = A.$$

Logo $X(x) = B \operatorname{sen}(\lambda x)$. Assim, as soluções particulares são

$$u_\lambda(t, x) = e^{-\lambda^2 t} \operatorname{sen}(\lambda x).$$

Terceiro Passo

Vamos somar todas as soluções encontradas e usar a condição inicial $u(0, x) = f(x)$. A soma

$$\sum_{\lambda} a(\lambda) e^{-\lambda^2 t} \operatorname{sen}(\lambda x),$$

em que $a(\lambda)$ são números reais, é difícil de interpretar. Usando a condição inicial, devemos ter, em $t = 0$,

$$f(x) = \sum_{\lambda} a(\lambda) \operatorname{sen}(\lambda x).$$

O que mostraremos a seguir é que, se usarmos apenas $\lambda \in \mathbb{R}$ e substituirmos a somatória pela integral, é possível achar (para funções f adequadas) constantes $a(\lambda)$ tais que

$$f(x) = \int_0^\infty a(\lambda) \operatorname{sen}(\lambda x) d\lambda.$$

Assim, a solução fica sendo

$$u(t, x) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} a(\lambda) \operatorname{sen}(\lambda x) d\lambda.$$

Se usássemos a condição de Neumann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

o mesmo argumento nos levaria a

$$f(x) = \int_0^\infty a(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda$$

e

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} a(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda.$$

Vamos estudar as expressões obtidas acima nas seções abaixo. Nosso objetivo abaixo será o seguinte: Dado uma função $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$, queremos mostrar se, e em que condições, f pode ser escrita como

$$f(x) = \int_0^\infty a(\lambda) \operatorname{sen}(\lambda x) d\lambda$$

e/ou

$$f(x) = \int_0^\infty a(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda.$$

19.0.1. Transformada de Fourier Seno. Vamos começar estudando a transformada de Fourier seno. Para tanto, precisamos estudar a transformada de Fourier de uma função ímpar.

LEMA 96. *Seja $g \in L^1(\mathbb{R})$ uma função ímpar, ou seja, $g(-x) = -g(x)$. Logo $\mathcal{F}g$ também é uma função ímpar e*

$$(19.0.1) \quad \mathcal{F}g(\xi) = -2i \int_0^\infty \operatorname{sen}(x\xi) g(x) dx.$$

Se g for também contínua, então

$$(19.0.2) \quad g(x) = \frac{i}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\epsilon\xi^2} \operatorname{sen}(x\xi) \mathcal{F}g(\xi) d\xi.$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta fazer um simples cálculo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}g(\xi) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-ix\xi} g(x) dx = \int_0^\infty e^{-ix\xi} g(x) dx + \int_{-\infty}^0 e^{-ix\xi} g(x) dx \stackrel{(1)}{=} \int_0^\infty e^{-ix\xi} g(x) dx + \int_0^\infty e^{ix\xi} g(-x) dx \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_0^\infty e^{-ix\xi} g(x) dx - \int_0^\infty e^{ix\xi} g(x) dx = -2i \int_0^\infty \frac{e^{ix\xi} - e^{-ix\xi}}{2i} g(x) dx = -2i \int_0^\infty \operatorname{sen}(x\xi) g(x) dx. \end{aligned}$$

Em (1), fizemos a mudança de coordenada $x \leftrightarrow -x$ na segunda integral. Em (2), usamos que g é uma função ímpar.

Note que

$$\mathcal{F}g(-\xi) = -2i \int_0^\infty \operatorname{sen}(-x\xi) g(x) dx = 2i \int_0^\infty \operatorname{sen}(x\xi) g(x) dx = -\mathcal{F}g(\xi).$$

Logo $\mathcal{F}g$ é ímpar.

Se g for contínua, então

$$g(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-\epsilon\xi^2} e^{ix\xi} \mathcal{F}g(\xi) d\xi$$

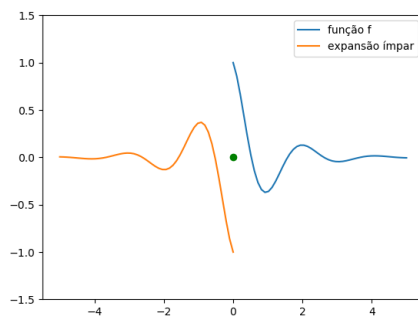


FIGURA 19.0.1. A função está em azul. A expansão ímpar em azul, verde e laranja

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\xi^2} e^{ix\xi} \mathcal{F}g(\xi) d\xi + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-\epsilon\xi^2} e^{ix\xi} \mathcal{F}g(\xi) d\xi \\
 &\stackrel{(1)}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\xi^2} e^{ix\xi} \mathcal{F}g(\xi) d\xi + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\xi^2} e^{-ix\xi} \mathcal{F}g(-\xi) d\xi \\
 &\stackrel{(2)}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\xi^2} e^{ix\xi} \mathcal{F}g(\xi) d\xi - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\xi^2} e^{-ix\xi} \mathcal{F}g(\xi) d\xi \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\xi^2} \frac{(e^{ix\xi} - e^{-ix\xi})}{2i} \mathcal{F}g(\xi) d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\xi^2} \text{sen}(x\xi) \mathcal{F}g(\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Em (1) fizemos uma mudança de variável $\xi \leftrightarrow -\xi$. Em (2), usamos $\mathcal{F}g(-\xi) = -\mathcal{F}g(\xi)$. □

Denotaremos por $L^1([0, \infty[)$ o conjunto das funções $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ tais que $\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ e por $L^\infty([0, \infty[)$ o conjunto das funções limitadas. As expressões acima motivam a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 97. A transformada de Fourier seno $\mathcal{F}_s : L^1([0, \infty[) \rightarrow L^\infty([0, \infty[)$ e a transformada de Fourier seno inversa $\mathcal{F}_s^{-1} : L^1([0, \infty[) \rightarrow L^\infty([0, \infty[)$ são definidas como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_s f(\xi) &= \int_0^{\infty} f(x) \text{sen}(x\xi) dx \\
 \mathcal{F}_s^{-1} f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \text{sen}(x\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Usando a discussão acima e o que conhecemos de transformada de Fourier, é fácil concluir o seguinte resultado:

TEOREMA 98. *Seja $f \in L^1([0, \infty[) \cap C([0, \infty[)$, ou seja, uma função integrável e contínua. Suponha que $f(0) = 0$. Logo*

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\xi^2} \mathcal{F}_s f(\xi) \text{sen}(x\xi) d\xi,$$

em que

$$\mathcal{F}_s f(\xi) = \int_0^{\infty} f(x) \text{sen}(x\xi) dx.$$

Se $\mathcal{F}_s f(\xi)$ for integrável, então

$$\frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\xi^2} \mathcal{F}_s f(\xi) \text{sen}(x\xi) d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_s f(\xi) \text{sen}(x\xi) d\xi = \mathcal{F}_s^{-1} \mathcal{F}_s f(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos definir a expansão par de f como a função $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Veja a Figura 19.0.1.

Logo $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$, já que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(x)| dx = \int_0^{\infty} |f(x)| dx + \int_{-\infty}^0 |-f(-x)| dx = 2 \int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Se f for contínua e $f(0) = 0$, então \tilde{f} é contínua (veja na Figura 19.0.1 que a expansão \tilde{f} só será contínua quando $f(0) = 0$). Logo, para $x \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \tilde{f}(x) \stackrel{(1)}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon \xi^2} \operatorname{sen}(x\xi) \mathcal{F}f(\xi) d\xi = \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{i}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon \xi^2} \operatorname{sen}(x\xi) (-2i) \mathcal{F}_s f(\xi) d\xi = \frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon \xi^2} \operatorname{sen}(x\xi) \mathcal{F}_s(f)(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Em (1), usamos a Equação (19.0.2). Em (2), usamos a Equação (19.0.1). Por fim, se $\mathcal{F}_s f \in L^1([0, \infty[)$, a integral sem $e^{-\epsilon \xi^2}$ está bem definida e podemos passar o limite para dentro (é possível justificar com bastante rigor isso, mas não o faremos) e obter

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_s f(\xi) \operatorname{sen}(x\xi) d\xi = \mathcal{F}_s^{-1} \mathcal{F}_s f(x).$$

□

19.0.2. Transformada de Fourier Cosseno. Vamos repetir o argumento da seção anterior para estudar a transformada de Fourier cosseno de uma função $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$. A transformada de Fourier cosseno é muito semelhante a seno. A única diferença é que usamos a expansão par da função f . Assim, nosso primeiro passo será estudar a transformada de Fourier de funções pares.

LEMA 99. *Seja $g \in L^1(\mathbb{R})$ uma função par, ou seja, $g(-x) = g(x)$. Logo $\mathcal{F}g$ também é uma função par e*

$$(19.0.3) \quad \mathcal{F}g(\xi) = 2 \int_0^{\infty} \cos(x\xi) g(x) dx.$$

Se g for também contínua, então

$$(19.0.4) \quad g(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon \xi^2} \cos(x\xi) \mathcal{F}g(\xi) d\xi.$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta fazer um simples cálculo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}g(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} g(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-ix\xi} g(x) dx + \int_{-\infty}^0 e^{-ix\xi} g(-x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-ix\xi} g(x) dx + \int_0^{\infty} e^{ix\xi} g(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{ix\xi} + e^{-ix\xi}}{2} g(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \cos(x\xi) g(x) dx. \end{aligned}$$

Note que

$$\mathcal{F}g(-\xi) = 2 \int_0^{\infty} \cos(-x\xi) g(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \cos(x\xi) g(x) dx = \mathcal{F}g(\xi).$$

Logo $\mathcal{F}g$ é par.

Se g for contínua, então

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon \xi^2} e^{ix\xi} \mathcal{F}g(\xi) d\xi \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon \xi^2} e^{ix\xi} \mathcal{F}g(\xi) d\xi + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-\epsilon \xi^2} e^{ix\xi} \mathcal{F}g(\xi) d\xi \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon \xi^2} e^{ix\xi} \mathcal{F}g(\xi) d\xi + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon \xi^2} e^{-ix\xi} \mathcal{F}g(-\xi) d\xi \\ &\stackrel{(2)}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon \xi^2} e^{ix\xi} \mathcal{F}g(\xi) d\xi + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon \xi^2} e^{-ix\xi} \mathcal{F}g(\xi) d\xi \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon \xi^2} \frac{(e^{ix\xi} + e^{-ix\xi})}{2} \mathcal{F}g(\xi) d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon \xi^2} \cos(x\xi) \mathcal{F}g(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Em (1) fizemos uma mudança de variável $\xi \leftrightarrow -\xi$. Em (2), usamos $\mathcal{F}g(-\xi) = \mathcal{F}g(\xi)$. □

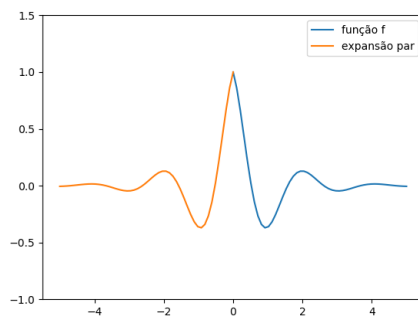


FIGURA 19.0.2. A função está em azul. A expansão par em azul e laranja

As expressões acima motivam a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 100. A transformada de Fourier cosseno $\mathcal{F}_c : L^1([0, \infty[) \rightarrow L^\infty([0, \infty[)$ e a transformada de Fourier cosseno inversa $\mathcal{F}_c^{-1} : L^1([0, \infty[) \rightarrow L^\infty([0, \infty[)$ são definidas como

$$\mathcal{F}_c f(\xi) = \int_0^\infty f(x) \cos(x\xi) dx$$

$$\mathcal{F}_c^{-1} f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \cos(x\xi) d\xi.$$

Com as definições acima e os resultados demonstrados, é fácil concluir o seguinte resultado:

TEOREMA 101. *Seja $f \in L^1([0, \infty[) \cap C([0, \infty[)$, ou seja, uma função integrável e contínua. Logo*

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-\epsilon\xi^2} \mathcal{F}_c f(\xi) \cos(x\xi) d\xi,$$

em que

$$\mathcal{F}_c f(\xi) = \int_0^\infty f(x) \cos(x\xi) dx.$$

Se $\mathcal{F}_c f(\xi)$ for integrável, então

$$\frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-\epsilon\xi^2} \mathcal{F}_c f(\xi) \cos(x\xi) d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathcal{F}_c f(\xi) \cos(x\xi) d\xi = \mathcal{F}_c^{-1} \mathcal{F}_c f(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos definir a expansão par de f como a função $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases},$$

conforme a Figura 19.0.2.

Logo $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$, já que

$$\int_{-\infty}^\infty |\tilde{f}(x)| dx = \int_0^\infty |f(x)| dx + \int_{-\infty}^0 |f(-x)| dx = 2 \int_0^\infty |f(x)| dx < \infty.$$

Além disso, se f for contínua, então \tilde{f} é contínua (veja a Figura 19.0.2). Note que agora não precisamos $f(0) = 0$ para f ser contínua, pois na expansão par apenas refletimos a função.

Para $x \geq 0$,

$$f(x) = \tilde{f}(x) \stackrel{(1)}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\epsilon\xi^2} \cos(x\xi) \mathcal{F}\tilde{f}(\xi) d\xi =$$

$$\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\epsilon\xi^2} \cos(x\xi) 2\mathcal{F}_c f(\xi) d\xi = \frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\epsilon\xi^2} \cos(x\xi) \mathcal{F}_c(f)(\xi) d\xi.$$

Em (1), usamos a Equação (19.0.4). Em (2), usamos a Equação (19.0.3). Por fim, se $\mathcal{F}_c f \in L^1([0, \infty[)$, a integral sem $e^{-\epsilon\xi^2}$ está bem definida e podemos passar o limite para dentro e obter

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathcal{F}_c f(\xi) \cos(x\xi) d\xi = \mathcal{F}_c^{-1} \mathcal{F}_c f(x).$$

□

Podemos achar uma fórmula análoga a de Plancherel para essas transformadas. De fato, assim como a transformada de Fourier, a transformada de Fourier seno e cosseno também podem ser definidas para funções de classe L^2 , obtendo funções bijetoras $\mathcal{F}_s : L^2([0, \infty[) \rightarrow L^2([0, \infty[)$ e $\mathcal{F}_c : L^2([0, \infty[) \rightarrow L^2([0, \infty[)$. Aqui, denotamos por $L^2([0, \infty[)$ o conjunto das funções tais que

$$\|f\|_{L^2([0, \infty[)}^2 := \int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty.$$

TEOREMA 102. *Seja $f \in L^2([0, \infty[)$. Logo $\|\mathcal{F}_c(f)\|_{L^2([0, \infty[)}^2 = \|\mathcal{F}_s(f)\|_{L^2([0, \infty[)}^2 = \frac{\pi}{2} \|f\|_{L^2([0, \infty[)}^2$, ou seja,*

$$\int_0^\infty |\mathcal{F}_c f(\xi)|^2 d\xi = \int_0^\infty |\mathcal{F}_s f(\xi)|^2 d\xi = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty |f(x)|^2 dx.$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos provar que

$$\int_0^\infty |\mathcal{F}_c f(\xi)|^2 d\xi = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty |f(x)|^2 dx.$$

Seja \tilde{f} a expansão par de f . Logo, pela Equação (19.0.3),

$$\mathcal{F}_c f(\xi) = \frac{1}{2} \mathcal{F} \tilde{f}(\xi).$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\mathcal{F}_c f(\xi)|^2 d\xi &= \int_0^\infty \left| \frac{1}{2} \mathcal{F} \tilde{f}(\xi) \right|^2 d\xi = \frac{1}{4} \int_0^\infty |\mathcal{F} \tilde{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{4} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{F} \tilde{f}(\xi)|^2 d\xi \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{8} 2\pi \int_{-\infty}^\infty |\tilde{f}(x)|^2 dx \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\int_0^\infty |f(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^0 |f(-x)|^2 dx \right) = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Em (1) usamos que $\mathcal{F} \tilde{f}$ é uma função par. Em (2), usamos o Teorema de Plancherel para \mathcal{F} , conforme visto na aula do dia 22 de maio.

A demonstração de que $\int_0^\infty |\mathcal{F}_s f(\xi)|^2 d\xi = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty |f(x)|^2 dx$ é idêntica. No entanto, usamos a expansão ímpar ao invés da expansão par. □

Vamos finalizar achando mais uma relação entre as transformadas. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função integrável. Note que sempre podemos escrever $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(x)}{2} \stackrel{(1)}{=} \frac{f(x)}{2} + \frac{f(x)}{2} + \frac{f(-x)}{2} - \frac{f(-x)}{2} \stackrel{(2)}{=} \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

em que em (1) apenas somamos $0 = \frac{f(-x)}{2} - \frac{f(-x)}{2}$. Em (2), reorganizamos as somas apenas. Vamos definir as funções

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ f_i(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \end{aligned}$$

Note que $f_p(-x) = f_p(x)$. Logo f_p é uma função par. De forma similar, vemos que $f_i(-x) = -f_i(x)$. Logo f_i é uma função ímpar. Usando o que aprendemos sobre transformada de Fourier de função par e ímpar, ou seja, Lema 96 e Lema 99, concluímos que

$$\mathcal{F} f(\xi) = \mathcal{F} f_p(\xi) + \mathcal{F} f_i(\xi) = 2 \int_0^\infty \cos(x\xi) f_p(x) dx - 2i \int_0^\infty \sin(x\xi) f_i(x) dx$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \cos(x\xi) f(x) dx - 2i \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x\xi) f(x) dx.$$

A equação acima é, às vezes, escrita como

$$\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}_c f(\xi) - 2i\mathcal{F}_s f(\xi).$$

Devemos, no entanto, ter cuidado ao interpretar esta fórmula, já que \mathcal{F} está definida para funções em \mathbb{R} , enquanto que \mathcal{F}_s e \mathcal{F}_c estão apenas definidas para funções em $[0, \infty[$.

19.0.3. Aplicação a equação do calor. Vamos usar o que vimos anteriormente para resolver a equação do calor em $[0, \infty[$. Quem se interessar, pode usar as mesmas técnicas para resolver a equação da onda.

Consideremos a seguinte equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x > 0 \\ u(t, 0) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, \infty[\end{cases}.$$

Vamos supor que $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e integrável. Além disso, vamos supor que $f(0) = 0$.

Aplicaremos a transformada de Fourier seno na variável x . Vamos usar a notação $\hat{u}(t, \xi) = \mathcal{F}_s u(t, \xi)$.

Logo

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \operatorname{sen}(x\xi) dx = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \operatorname{sen}(x\xi) dx.$$

Note que

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \operatorname{sen}(x\xi) dx = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{\infty} u(t, x) \operatorname{sen}(x\xi) dx \right) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \xi)$$

e que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \operatorname{sen}(x\xi) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \operatorname{sen}(x\xi) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \operatorname{sen}(x\xi) \Big|_0^R - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sen}(x\xi)) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \operatorname{sen}(x\xi) \Big|_0^R - \lim_{R \rightarrow \infty} u(t, x) \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sen}(x\xi)) \Big|_0^R + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R u(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\operatorname{sen}(x\xi)) dx \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R u(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\operatorname{sen}(x\xi)) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} -\xi^2 \int_0^R u(t, x) \operatorname{sen}(x\xi) dx = -\xi^2 \mathcal{F}_s u(t, \xi). \end{aligned}$$

Em (1) assumimos que u e $\frac{\partial u}{\partial x}$ vão a zero, quando $x \rightarrow \infty$, e que $u(t, 0) = 0$.

Concluimos que

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \xi) = -\xi^2 \hat{u}(t, \xi).$$

Assim,

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}(0, \xi) e^{-\xi^2 t}.$$

Porém $u(0, x) = f(x)$. Logo

$$\hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi).$$

Assim,

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) e^{-\xi^2 t} \implies u(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2 t} \mathcal{F}_s f(\xi) \operatorname{sen}(x\xi) d\xi,$$

em que

$$\mathcal{F}_s f(\xi) = \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(x\xi) dx.$$

Observe que a função $e^{-\xi^2 t} \mathcal{F}_s f(\xi)$ é sempre integrável, se f for integrável. Logo não precisamos usar o limite com $e^{-\epsilon \xi^2}$.

Note também que, como usamos a transformada de Fourier seno, temos

$$u(t, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2 t} \mathcal{F}_s f(\xi) \operatorname{sen}(0\xi) d\xi = 0.$$

Assim, a solução automaticamente satisfaz a condição de Dirichlet.

Um argumento semelhante com condições de contorno de Neumann no levaria ao uso da transformada de Fourier cosseno.

Principais resultados e ideias dessa seção:

1) Definimos as transformada de Fourier seno, seno inversa, cosseno e cosseno inversa $\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_s^{-1}, \mathcal{F}_c, \mathcal{F}_c^{-1} : L^1([0, \infty[) \rightarrow L^\infty([0, \infty[)$ por

$$\mathcal{F}_s f(\xi) = \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(x\xi) dx \quad \mathcal{F}_s^{-1} f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \operatorname{sen}(x\xi) d\xi.$$

$$\mathcal{F}_c f(\xi) = \int_0^\infty f(x) \operatorname{cos}(x\xi) dx \quad \mathcal{F}_c^{-1} f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \operatorname{cos}(x\xi) d\xi.$$

2) Provamos que se $f \in L^1([0, \infty[) \cap C([0, \infty[)$, $\mathcal{F}_s f \in L^1([0, \infty[)$ e $f(0) = 0$, temos $\mathcal{F}_s^{-1} \mathcal{F}_s f = f$.

3) Provamos que se $f \in L^1([0, \infty[) \cap C([0, \infty[)$ e $\mathcal{F}_c f \in L^1([0, \infty[)$, temos $\mathcal{F}_c^{-1} \mathcal{F}_c f = f$.

4) Obtemos uma versão de Plancherel: Se $f \in L^2([0, \infty[)$, então

$$\|\mathcal{F}_c(f)\|_{L^2([0, \infty[)}^2 = \|\mathcal{F}_s(f)\|_{L^2([0, \infty[)}^2 = \frac{\pi}{2} \|f\|_{L^2([0, \infty[)}^2.$$

5) Aplicamos os resultados na resolução da equação do calor em $[0, \infty[$.

Aula do dia 12 de junho

Funções de Green

Seja L um operador diferencial, tal como Δ , $\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial y}$, ou qualquer outro que envolva derivadas. Suponha que queiramos resolver o seguinte problema:

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. A função de Green será uma função $G : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy$$

é a solução da equação que queríamos resolver. A função G dependerá também das condições de contorno escolhidas e/ou das condições iniciais.

Neste curso, vamos mostrar como calcular a função de Green em apenas dois casos: primeiro para $\Omega = \mathbb{R}$ com condições iniciais em $x = 0$. Depois estudaremos o caso em que $\Omega = [a, b]$ e temos condições de contorno em a e em b .

20.0.1. Funções de Green para problemas de valor inicial de EDOs. Seja L o operador diferencial dado por

$$L = p_k(x) \frac{d^k}{dx^k} + p_{k-1}(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + \dots + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_0(x),$$

em que $p_0, \dots, p_k \in C(\mathbb{R})$ e $p_k(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Queremos resolver o problema

$$(20.0.1) \quad \begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ \frac{d^j u}{dx^j}(0) = 0, & 0 \leq j \leq k-1 \end{cases} .$$

Vamos assumir que sabemos resolver o problema

$$\begin{cases} Lu(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ \frac{d^j u}{dx^j}(y) = c_j, & 0 \leq j \leq k-1 \end{cases} ,$$

para todo $c_0, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{C}$ e todo $y \in \mathbb{R}$.

Nosso objetivo é achar uma função $G((x, y) \mapsto G(x, y))$ tal que a solução do problema possa ser escrita como

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy.$$

Vamos dar a resposta do problema na forma de um teorema. Para tanto, usaremos a função de Heaviside definida como

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} .$$

TEOREMA 103. *Seja $L = \sum_{j=0}^k p_j(x) \frac{d^j}{dx^j}$ um operador diferencial, em que $p_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ são funções contínuas e p_k nunca se anula. Para cada $y \in \mathbb{R}$, denotamos por $v_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} Lv_y(x) = \sum_{j=0}^k p_j(x) \frac{d^j v_y}{dx^j}(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ \frac{d^j v_y}{dx^j}(y) = 0, & 0 \leq j < k-1 \\ \frac{d^{k-1} v_y}{dx^{k-1}}(y) = \frac{1}{p_k(y)}, \end{cases} .$$

Logo a função $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $G(x, y) := v_y(x) (H(x - y) - H(-y))$ é a função de Green do Problema (20.0.1), ou seja, dado uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, a função

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy$$

é solução de

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ \frac{d^j u}{dx^j}(0) = 0, & 0 \leq j \leq k-1 \end{cases} .$$

OBSERVAÇÃO 104. Observamos que se f é integrável em \mathbb{R} , então

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} v_y(x) (H(x - y) - H(-y)) f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v_y(x) H(x - y) f(y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} v_y(x) H(-y) f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^x v_y(x) f(y) dy - \int_{-\infty}^0 v_y(x) f(y) dy = \int_0^x v_y(x) f(y) dy. \end{aligned}$$

A fórmula acima é válida também quando f é apenas contínua.¹

OBSERVAÇÃO 105. Suponha que L tenha coeficientes constantes: $Lu(x) = \sum_{j=0}^k p_j \frac{d^j u}{dx^j}(x)$, $p_j \in \mathbb{C}$, para todo j . Seja $v_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ a solução de

$$\begin{cases} Lv_0(x) = \sum_{j=0}^k p_j \frac{d^j v_0}{dx^j}(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ \frac{d^j v_0}{dx^j}(0) = 0, & 0 \leq j < k-1 \\ \frac{d^{k-1} v_0}{dx^{k-1}}(0) = \frac{1}{p_k}, \end{cases} .$$

Logo $v_y(x) = v_0(x - y)$ é solução de

$$\begin{cases} Lv_0(x - y) = \sum_{j=0}^k p_j \frac{d^j}{dx^j} (v_0(x - y)) = \sum_{j=0}^k p_j \frac{d^j v_0}{dx^j}(x - y) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ \frac{d^j v_y}{dx^j}(y) = \frac{d^j}{dx^j} (v_0(x - y)) \Big|_{x=y} = \frac{d^j v_0}{dx^j}(x - y) \Big|_{x=y} = \frac{d^j v_0}{dx^j}(0) = 0, & 0 \leq j < k-1 \\ \frac{d^{k-1} v_y}{dx^{k-1}}(y) = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (v_0(x - y)) \Big|_{x=y} = \frac{d^{k-1} v_0}{dx^{k-1}}(x - y) \Big|_{x=y} = \frac{d^{k-1} v_0}{dx^{k-1}}(0) = \frac{1}{p_k}, \end{cases} .$$

Isto implica que

$$G(x, y) = v_0(x - y) (H(x - y) - H(-y))$$

e

$$u(x) = \int_0^x v_0(x - y) f(y) dy.$$

Antes de provarmos o Teorema, daremos alguns exemplos.

EXEMPLO 106. Consideremos o operador com coeficientes constantes $L = \frac{d}{dx}$. Neste caso, $p_1(x) = 1$ e $p_0(x) = 0$. Logo v_0 deve resolver

$$\begin{cases} \frac{dv_0}{dx}(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ v_0(0) = 1, \end{cases} .$$

¹Isto é simples de ver. Observamos que se $x \geq 0$, então

$$H(x - y) - H(-y) = \begin{cases} 1 - 1 = 0, & y < 0 \\ 1 - 0 = 1, & y \in [0, x] \\ 0 - 0 = 0, & y > x \end{cases} .$$

Logo, se $x \geq 0$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy = \int_0^x v_y(x) f(y) dy.$$

Da mesma forma, se $x < 0$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy = - \int_x^0 v_y(x) f(y) dy = \int_0^x v_y(x) f(y) dy.$$

Assim $v_0(x) = 1$ para qualquer x . Vemos que $G(x, y) = H(x - y) - H(-y)$. Logo

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy = \int_0^x f(y) dy$$

é solução de

$$\begin{cases} \frac{du}{dx}(x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u(0) = 0, \end{cases}.$$

De fato, $\frac{du}{dx}(x) = f(x)$ e $u(0) = \int_0^0 f(x) dx = 0$.

EXEMPLO 107. Consideremos o operador com coeficientes constantes $L = \frac{d}{dx} + 1$. Neste caso, $p_1(x) = 1$ e $p_0(x) = 1$. Logo v_0 deve resolver

$$\begin{cases} \frac{dv_0}{dx}(x) + v_0(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ v_0(0) = 1, \end{cases}.$$

Assim $v_0(x) = Ce^{-x}$ para qualquer x e

$$v_0(0) = 1 \iff C = 1.$$

Portanto $v_y(x) = v_0(x - y) = e^{y-x}$ e $G(x, y) = e^{y-x}(H(x - y) - H(-y))$. A função dada por

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy = e^{-x} \int_0^x e^y f(y) dy.$$

é solução de

$$\begin{cases} \frac{du}{dx}(x) + u(x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u(0) = 0, \end{cases}.$$

De fato, $u(0) = e^{-0} \int_0^0 f(x) dx = 0$ e

$$\frac{du}{dx}(x) + u(x) = \left(-e^{-x} \int_0^x e^y f(y) dy + f(x) \right) + e^{-x} \int_0^x e^y f(y) dy = f(x).$$

EXEMPLO 108. Considere o operador com coeficientes *não* constantes $L = \frac{d}{dx} + p(x)$. Neste caso, $p_1(x) = 1$, $p_0(x) = p(x)$ e v_y deve resolver

$$\begin{cases} \frac{dv_y}{dx}(x) + p(x) v_y(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ v_y(y) = 1, \end{cases}.$$

Vamos resolver a equação acima:

$$\frac{dv_y}{dx}(x) + p(x) v_y(x) = 0 \iff \frac{dv_y}{dx}(x) = -p(x) \iff \frac{d}{dx}(\ln v_y(x)) = -p(x).$$

Integrando de y a x , obtemos

$$\int_y^x \frac{d}{ds}(\ln v_y(s)) ds = - \int_y^x p(s) ds \implies \ln v_y(x) - \ln v_y(y) = - \int_y^x p(s) ds.$$

Como $v_y(y) = 1$, concluímos que $\ln v_y(y) = 0$. Assim, tomando a exponencial da expressão acima, obtemos

$$v_y(x) = e^{-\int_y^x p(s) ds}.$$

A função de Green é, portanto,

$$G(x, y) = v_y(x)(H(x - y) - H(-y)) = e^{-\int_y^x p(s) ds} (H(x - y) - H(-y)),$$

ou seja,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy = \int_0^x e^{-\int_y^x p(s) ds} f(y) dy.$$

é solução de

$$\begin{cases} \frac{du}{dx}(x) + p(x) u(x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u(0) = 0, \end{cases}.$$

De fato,

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^x e^{-\int_y^x p(s) ds} f(y) dy \right) + p(x) \int_0^x e^{-\int_y^x p(s) ds} f(y) dy$$

$$= e^{-\int_x^x p(s)ds} f(x) - \int_0^x p(x) e^{-\int_y^x p(s)ds} f(y) dy + p(x) \int_0^x e^{-\int_y^x p(s)ds} f(y) dy = f(x).$$

Por outro lado, $u(0) = \int_0^0 e^{-\int_y^0 p(s)ds} f(y) dy = 0$.

EXEMPLO 109. Considere o operador com coeficientes constantes $L = \frac{d^2}{dx^2} + k^2$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Neste caso, $p_2(x) = 1$, $p_1(x) = 0$ e $p_0(x) = k^2$. Logo v_0 deve resolver

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_0}{dx^2}(x) + k^2 v_0(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ v_0(0) = 0, \\ \frac{dv_0}{dx}(0) = 1, \end{cases}.$$

A equação $\frac{d^2 v_0}{dx^2}(x) + k^2 v_0(x) = 0$ já foi vista diversas vezes. A solução é dada por

$$v_0(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx).$$

Usando as condições iniciais, temos

$$0 = v_0(0) = A \implies A = 0$$

e

$$1 = \frac{dv_0}{dx}(x) = kB \implies B = \frac{1}{k}.$$

Assim, obtemos

$$v_y(x) = v_0(x-y) = \frac{1}{k} \sin(k(x-y)).$$

Com isso, a função de Green é dada por

$$G(x, y) = v_0(x-y)(H(x-y) - H(-y)) = \frac{1}{k} \sin(k(x-y))(H(x-y) - H(-y))$$

e a solução do problema é

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy = \int_0^x \frac{1}{k} \sin(k(x-y)) f(y) dy.$$

Vamos conferir. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2}(x) + k^2 u(x) &= \frac{d^2}{dx^2} \left(\int_0^x \frac{1}{k} \sin(k(x-y)) f(y) dy \right) + k^2 u(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{k} \sin(k(x-x)) f(x) + \int_0^x \cos(k(x-y)) f(y) dy \right) + k^2 u(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \cos(k(x-y)) f(y) dy \right) + k^2 u(x) \\ &= \cos(k(x-x)) f(x) - k \int_0^x \sin(k(x-y)) f(y) dy + k^2 \int_0^x \frac{1}{k} \sin(k(x-y)) f(y) dy = f(x). \end{aligned}$$

Além disso,

$$u(0) = \int_0^0 \frac{1}{k} \sin(k(0-y)) f(y) dy = 0$$

e

$$\frac{du}{dx}(0) = \int_0^0 \cos(k(0-y)) f(y) dy = 0.$$

Vamos finalizar a aula demonstrando o Teorema 103.

DEMONSTRAÇÃO. (Teorema 103) Consideremos a função

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy = \int_0^x v_y(x) f(y) dy.$$

Vamos derivar u , usando o seguinte resultado de cálculo, que já usamos nos exemplos anteriores:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(x, y) dy \right) = f(x, x) + \int_a^x \frac{df}{dx}(x, y) dy.$$

Usando essa expressão, as derivadas ficam

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^x v_y(x) f(y) dy \right) = v_x(x) f(x) + \int_0^x \frac{dv_y}{dx}(x) f(y) dy \\ &= \int_0^x \frac{dv_y}{dx}(x) f(y) dy, \text{ pois } v_x(x) = 0, \\ \frac{d^2u}{dx^2}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \frac{dv_y}{dx}(x) f(y) dy \right) = \frac{dv_x}{dx}(x) f(x) + \int_0^x \frac{d^2v_y}{dx^2}(x) f(y) dy \\ &= \int_0^x \frac{d^2v_y}{dx^2}(x) f(y) dy, \text{ pois } \frac{dv_x}{dx}(x) = 0, \\ &\vdots \\ \frac{d^{k-1}u}{dx^{k-1}}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \frac{d^{k-2}v_y}{dx^{k-2}}(x) f(y) dy \right) = \frac{d^{k-2}v_x}{dx^{k-2}}(x) f(x) + \int_0^x \frac{d^{k-1}v_y}{dx^{k-1}}(x) f(y) dy \\ &= \int_0^x \frac{d^{k-1}v_y}{dx^{k-1}}(x) f(y) dy, \text{ pois } \frac{d^{k-2}v_x}{dx^{k-2}}(x) = 0, \\ \frac{d^k u}{dx^k}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \frac{d^{k-1}v_y}{dx^{k-1}}(x) f(y) dy \right) = \frac{d^{k-1}v_x}{dx^{k-1}}(x) f(x) + \int_0^x \frac{d^k v_y}{dx^k}(x) f(y) dy \\ &= \frac{f(x)}{p_k(x)} + \int_0^x \frac{d^k v_y}{dx^k}(x) f(y) dy, \text{ pois } \frac{d^{k-1}v_x}{dx^{k-1}}(x) = \frac{1}{p_k(x)}.\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^k p_j(x) \frac{d^j u}{dx^j}(x) = p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k}(x) + \sum_{j=0}^{k-1} p_j(x) \frac{d^j u}{dx^j}(x) \\ &= p_k(x) \left(\frac{f(x)}{p_k(x)} + \int_0^x \frac{d^k v_y}{dx^k}(x) f(y) dy \right) + \sum_{j=0}^{k-1} p_j(x) \int_0^x \frac{d^j v_y}{dx^j}(x) f(y) dy \\ &= f(x) + \int_0^x \sum_{j=0}^k p_j(x) \frac{d^j v_y}{dx^j}(x) f(y) dy = f(x).\end{aligned}$$

Além disso, se $0 \leq j \leq k-1$, temos

$$\frac{d^j u}{dx^j}(0) = \int_0^0 \frac{d^j v_y}{dx^j}(0) f(y) dy = 0.$$

□

Principais resultados e ideias dessa seção:

1) Estudamos o problema

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^k p_j(x) \frac{d^j u}{dx^j}(x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ \frac{d^j u}{dx^j}(0) = 0, & 0 \leq j \leq k-1 \end{cases}.$$

2) Com as hipóteses adequadas, vimos que a solução é dada por $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy = \int_0^x v_y(x) f(y) dy$, em que

$$\begin{cases} Lv_y(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ \frac{d^j v_y}{dx^j}(y) = 0, & 0 \leq j < k-1 \\ \frac{d^{k-1} v_y}{dx^{k-1}}(y) = \frac{1}{p_k(y)}, \end{cases}$$

e $G(x, y) := v_y(x)(H(x-y) - H(-y))$ é chamada de função de Green do problema.

Aula do dia 17 de junho

Funções de Green para problemas de valor de contorno de EDOs

Vamos considerar um operador diferencial do tipo

$$Lu(x) = p_2(x) \frac{d^2u}{dx^2}(x) + p_1(x) \frac{du}{dx}(x) + p_0(x)u(x),$$

em que p_0, p_1 e $p_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ são funções contínuas tais que $p_2(x) \neq 0$, para todo $x \in [a, b]$.

Nosso objetivo é estudar problemas do tipo

$$(21.0.1) \quad \begin{cases} Lu(x) &= f(x), & x \in [a, b] \\ \alpha u(a) + \alpha' \frac{du}{dx}(a) &= 0 \\ \beta u(b) + \beta' \frac{du}{dx}(b) &= 0 \end{cases},$$

em que $|\alpha| + |\alpha'| \neq 0$ e $|\beta| + |\beta'| \neq 0$.

Em particular, gostaríamos de achar uma função $G : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que, para cada função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, a função $u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy$ é solução de (PC). A função G será chamada de função de Green do problema.

No entanto, devemos ter cuidado, já que existem casos em que a função de Green não existe.

EXEMPLO 110. Seja

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2}(x) &= 1, & x \in [0, 1] \\ \frac{du}{dx}(0) &= 0 \\ \frac{du}{dx}(1) &= 0 \end{cases}.$$

Logo $\frac{d^2u}{dx^2}(x) = 1$ implica que $u(x) = x^2 + Cx + D$. Assim

$$\frac{du}{dx}(0) = 0 \implies C = 0$$

$$\frac{du}{dx}(1) = 0 \implies 2 + C = 0 \implies 2 = 0.$$

Assim, claramente temos uma contradição.

Pode-se se argumentar que o problema da equação acima é que, se $f = 0$, a equação tem infinitas soluções, já que toda função constante é uma solução. Faremos, então, a seguinte hipótese:

(H) Não existem soluções não nulas do problema

$$\begin{cases} Lu(x) &= 0, & x \in [a, b] \\ \alpha u(a) + \alpha' \frac{du}{dx}(a) &= 0 \\ \beta u(b) + \beta' \frac{du}{dx}(b) &= 0 \end{cases}.$$

Abaixo vamos dar uma receita para determinar a função de Green assumindo a hipótese (H).

Antes, precisamos da seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 111. 1) Existe uma solução não nula v_a de

$$(21.0.2) \quad \begin{cases} Lv_a(x) &= 0, & x \in [a, b] \\ \alpha v_a(a) + \alpha' \frac{dv_a}{dx}(a) &= 0 \end{cases}.$$

Se \tilde{v}_a for outra solução do mesmo problema, então existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{v}_a = \lambda v_a$.

2) Existe uma solução não nula v_b de

$$\begin{cases} Lv_b(x) &= 0, & x \in [a, b] \\ \beta v_b(b) + \beta' \frac{dv_b}{dx}(b) &= 0 \end{cases}.$$

Se \tilde{v}_b for outra solução do mesmo problema, então existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{v}_b = \lambda v_b$.

3) Sejam v_a e v_b duas soluções não nulas tais como nos itens 1) e 2). Definimos o Wronskiano como

$$W(y) = \det \begin{pmatrix} v_a(y) & v'_a(y) \\ v_b(y) & v'_b(y) \end{pmatrix} = v_a(y)v'_b(y) - v'_a(y)v_b(y).$$

Nas condições da hipótese (H), temos que $W(y) \neq 0$, para qualquer $y \in [a, b]$.

DEMONSTRAÇÃO. 1) Vamos inicialmente provar que existe uma função v_a que resolve a Equação (21.0.2). Sabemos pelo teorema de existência e unicidade que existe uma única solução do problema abaixo:

$$\begin{cases} L(v_a) & = & 0 \\ v_a(a) & = & -\alpha' \\ \frac{dv_a}{dx}(a) & = & \alpha \end{cases}.$$

Note que v_a é uma solução do Problema (21.0.2). De fato, $L(v_a) = 0$ e

$$\alpha v_a(a) + \alpha' \frac{dv_a}{dx}(a) = \alpha(-\alpha') + \alpha'\alpha = 0.$$

Agora suponha que \tilde{v}_a seja uma outra solução da Equação (21.0.2). Desta forma, temos

$$\begin{cases} \alpha v_a(a) + \alpha' \frac{dv_a}{dx}(a) = 0 \\ \alpha \tilde{v}_a(a) + \alpha' \frac{d\tilde{v}_a}{dx}(a) = 0 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} v_a(a) & \frac{dv_a}{dx}(a) \\ \tilde{v}_a(a) & \frac{d\tilde{v}_a}{dx}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como $(\alpha, \alpha') \neq (0, 0)$, concluímos que o sistema tem solução não nula. Isto só pode ocorrer se

$$\det \begin{pmatrix} v_a(a) & \frac{dv_a}{dx}(a) \\ \tilde{v}_a(a) & \frac{d\tilde{v}_a}{dx}(a) \end{pmatrix} = 0.$$

No entanto, o determinante ser igual a zero implica que uma linha é múltipla da outra. Logo

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_a(a) & \frac{d\tilde{v}_a}{dx}(a) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_a(a) & \frac{dv_a}{dx}(a) \end{pmatrix}.$$

Assim, a função λv_a é solução de

$$(21.0.3) \quad \begin{cases} L(\lambda v_a) & = & 0 \\ \lambda v_a(a) & = & \tilde{v}_a(a) \\ \frac{d}{dx}(\lambda v_a)(a) & = & \frac{d\tilde{v}_a}{dx}(a) \end{cases}.$$

Como tanto λv_a e \tilde{v}_a resolvem a Equação (21.0.3) com as mesmas condições iniciais, concluímos, pelo teorema de unicidade de EDOs, que $\tilde{v}_a = \lambda v_a$.

2) A prova é igual a do item 1) trocando a por b .

3) Suponha que exista $y_0 \in [a, b]$ tal que $W(y_0) = 0$. Logo

$$\det \begin{pmatrix} v_a(y_0) & v'_a(y_0) \\ v_b(y_0) & v'_b(y_0) \end{pmatrix} = 0.$$

Assim, as linhas da matriz são linearmente dependentes, ou seja, existe λ tal que $(v_b(y_0), v'_b(y_0)) = \lambda(v_a(y_0), v'_a(y_0))$. Portanto λv_a é solução da equação abaixo

$$(21.0.4) \quad \begin{cases} L(\lambda v_a) = \lambda L(v_a) & = & 0 \\ \lambda v_a(y_0) & = & v_b(y_0) \\ \lambda \frac{dv_a}{dx}(y_0) & = & \frac{dv_b}{dx}(y_0) \end{cases}.$$

Como tanto λv_a como v_b são soluções da Equação (21.0.4) com as mesmas condições iniciais no ponto y_0 , concluímos, pelo teorema de unicidade de EDOs, que $v_b(y) = \lambda v_a(y)$, para todo y . Em particular, no ponto $y = a$, temos

$$\alpha v_b(a) + \alpha' \frac{dv_b}{dx}(a) = \lambda \left(\alpha v_a(a) + \alpha' \frac{dv_a}{dx}(a) \right) = 0,$$

ou seja, $L(v_b) = 0$, $\alpha v_b(a) + \alpha' \frac{dv_b}{dx}(a)$, $\beta v_b(b) + \beta' \frac{dv_b}{dx}(b) = 0$. Pela hipótese (H), v_b deve ser igual a zero, o que é uma contradição com a escolha de v_b . Assim, concluímos que $W(y)$ deve ser diferente de 0 para todo $y \in [a, b]$. \square

TEOREMA 112. Consideremos o problema (21.0.1) satisfazendo a hipótese (H). Logo a função de Green do problema é dada por

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{v_a(x)v_b(y)}{p_2(y)W(y)}, & x < y \\ \frac{v_b(x)v_a(y)}{p_2(y)W(y)}, & x > y \end{cases},$$

em que v_a , v_b e W são não nulos e definidos como anteriormente.

Assim, a solução do problema é

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy = v_b(x) \int_a^x \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + v_a(x) \int_x^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy.$$

DEMONSTRAÇÃO. Para demonstrar o teorema, basta mostrar que $u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy$ é solução do problema. Para tanto, vamos derivar u .

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}(x) &= \frac{d}{dx} \int_a^b G(x, y) f(y) dy \\ &= \frac{d}{dx} \left(v_b(x) \int_a^x \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + v_a(x) \int_x^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy \right) \\ &= \frac{dv_b}{dx}(x) \int_a^x \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + v_b(x) \frac{v_a(x) f(x)}{p_2(x)W(x)} + \frac{dv_a}{dx}(x) \int_x^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy - v_a(x) \frac{v_b(x) f(x)}{p_2(x)W(x)} \\ &= \frac{dv_b}{dx}(x) \int_a^x \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + \frac{dv_a}{dx}(x) \int_x^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy. \end{aligned}$$

Derivando mais uma vez, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dv_b}{dx}(x) \int_a^x \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + \frac{dv_a}{dx}(x) \int_x^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy \right) \\ &= \frac{d^2v_b}{dx^2}(x) \int_a^x \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + \frac{dv_b}{dx}(x) \frac{v_a(x) f(x)}{p_2(x)W(x)} + \frac{d^2v_a}{dx^2}(x) \int_x^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy - \frac{dv_a}{dx}(x) \frac{v_b(x) f(x)}{p_2(x)W(x)} \\ &= \frac{d^2v_b}{dx^2}(x) \int_a^x \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + \frac{d^2v_a}{dx^2}(x) \int_x^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + \frac{(\frac{dv_b}{dx}(x) v_a(x) - \frac{dv_a}{dx}(x) v_b(x)) f(x)}{p_2(x)W(x)} \\ &= \frac{d^2v_b}{dx^2}(x) \int_a^x \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + \frac{d^2v_a}{dx^2}(x) \int_x^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + \frac{f(x)}{p_2(x)}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} Lu(x) &= p_2(x) \frac{d^2u}{dx^2}(x) + p_1(x) \frac{du}{dx}(x) + p_0(x) u(x) \\ &= p_2(x) \left(\frac{d^2v_b}{dx^2}(x) \int_a^x \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + \frac{d^2v_a}{dx^2}(x) \int_x^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + \frac{f(x)}{p_2(x)} \right) \\ &\quad + p_1(x) \left(\frac{dv_b}{dx}(x) \int_a^x \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + \frac{dv_a}{dx}(x) \int_x^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy \right) \\ &\quad + p_0(x) \left(v_b(x) \int_a^x \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + v_a(x) \int_x^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy \right) \\ &= Lv_b(x) \int_a^x \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + Lv_a(x) \int_x^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Quanto às condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} \alpha u(a) + \alpha' \frac{du}{dx}(a) &= \alpha v_b(a) \int_a^a \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + \alpha v_a(a) \int_a^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy \\ &\quad + \alpha' \frac{dv_b}{dx}(a) \int_a^a \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy + \alpha' \frac{dv_a}{dx}(a) \int_a^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y)W(y)} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\alpha v_a(a) + \alpha' \frac{dv_a}{dx}(a) \right) \int_a^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y) W(y)} dy = 0. \\
\beta u(b) + \beta' \frac{du}{dx}(b) &= \beta v_b(b) \int_a^b \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y) W(y)} dy + \beta v_a(b) \int_b^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y) W(y)} dy \\
&+ \beta' \frac{dv_b}{dx}(b) \int_a^b \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y) W(y)} dy + \beta' \frac{dv_a}{dx}(b) \int_b^b \frac{v_b(y) f(y)}{p_2(y) W(y)} dy \\
&= \left(\beta v_b(b) + \beta' \frac{dv_b}{dx}(b) \right) \int_a^b \frac{v_a(y) f(y)}{p_2(y) W(y)} dy = 0.
\end{aligned}$$

□

Abaixo, vamos estudar três exemplos para ilustrar a teoria e entender a receita.

EXEMPLO 113. Consideremos a equação definida em $[0, l]$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u}{dx^2}(x) + \mu^2 u(x) &= f(x) \\
u(0) = u(l) &= 0
\end{aligned}$$

Vamos achar a função de Green. Para tanto, devemos achar funções v_0 e v_l como no teorema. Começamos com v_0 :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 v_0}{dx^2}(x) + \mu^2 v_0(x) &= 0 \\
v_0(0) &= 0
\end{aligned}$$

Logo $v_0(x) = A \operatorname{sen}(\mu x) + B \cos(\mu x)$. Como $v_0(0) = 0$, vemos que $B = 0$. Escolhendo $A = 1$, temos

$$v_0(x) = \operatorname{sen}(\mu x).$$

Vamos agora resolver

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 v_l}{dx^2}(x) + \mu^2 v_l(x) &= 0 \\
v_l(l) &= 0
\end{aligned}$$

Novamente $v_l(x) = A \operatorname{sen}(\mu x) + B \cos(\mu x) = C \operatorname{sen}(\mu x + \varphi)$. Como $v_l(l) = 0$, podemos escolher $\varphi = -\mu l$ e $C = 1$. Obtemos, assim,

$$v_l(x) = \operatorname{sen}(\mu(x - l)).$$

Vamos calcular o Wronskiano:

$$\begin{aligned}
v_0(y) v_l'(y) - v_0'(y) v_l(y) &= \mu \operatorname{sen}(\mu x) \cos(\mu(x - l)) - \mu \cos(\mu x) \operatorname{sen}(\mu(x - l)) \\
&= \mu \operatorname{sen}(\mu x - \mu x + \mu l) = \mu \operatorname{sen}(\mu l)
\end{aligned}$$

Assim,

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\mu x) \operatorname{sen}(\mu(y-l))}{\mu \operatorname{sen}(\mu l)}, & x < y \\ \frac{\operatorname{sen}(\mu(x-l)) \operatorname{sen}(\mu y)}{\mu \operatorname{sen}(\mu l)}, & x > y \end{cases}.$$

A solução é dada por

$$u(x) = \int_a^x \frac{\operatorname{sen}(\mu(x-l)) \operatorname{sen}(\mu y)}{\mu \operatorname{sen}(\mu l)} f(y) dy + \int_x^b \frac{\operatorname{sen}(\mu x) \operatorname{sen}(\mu(y-l))}{\mu \operatorname{sen}(\mu l)} f(y) dy.$$

EXEMPLO 114. Consideremos a equação definida em $[0, l]$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u}{dx^2}(x) + \mu^2 u(x) &= f(x) \\
\frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(l) &= 0
\end{aligned}$$

Vamos achar a função de Green. Neste caso

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 v_0}{dx^2}(x) + \mu^2 v_0(x) &= 0 \\
\frac{dv_0}{dx}(0) &= 0
\end{aligned}$$

Logo $v_0(x) = A \operatorname{sen}(\mu x) + B \cos(\mu x)$. Como $\frac{dv_0}{dx}(0) = 0$, vemos que $A = 0$. Escolhendo $B = 1$, temos

$$v_0(x) = \cos(\mu x).$$

Vamos agora resolver

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 v_l}{dx^2}(x) + \mu^2 v_l(x) &= 0 \\
\frac{dv_l}{dx}(l) &= 0
\end{aligned}$$

Novamente $v_l(x) = A \operatorname{sen}(\mu x) + B \cos(\mu x) = C \cos(\mu x + \varphi)$. Como $v_l(l) = 0$, vemos que $\varphi = -1$. Escolhendo $C = 1$, temos

$$v_l(x) = \cos(\mu(x-l)).$$

Vamos calcular o Wronskiano:

$$\begin{aligned} v_0(y) v_l'(y) - v_0'(y) v_l(y) &= -\mu \cos(\mu x) \operatorname{sen}(\mu(x-l)) + \mu \operatorname{sen}(\mu x) \cos(\mu(x-l)) \\ &= \mu \cos(\mu x - \mu x + \mu l) = \mu \cos(\mu l) \end{aligned}$$

Assim,

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(\mu x) \cos(\mu(y-l))}{\mu \cos(\mu l)}, & x < y \\ \frac{\cos(\mu(x-l)) \cos(\mu y)}{\mu \cos(\mu l)}, & x > y \end{cases}.$$

A solução do problema é

$$u(x) = \int_a^x \frac{\cos(\mu(x-l)) \cos(\mu y)}{\mu \cos(\mu l)} f(y) dy + \int_x^b \frac{\cos(\mu x) \cos(\mu(y-l))}{\mu \cos(\mu l)} f(y) dy.$$

EXEMPLO 115. Consideremos a equação definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $\mu \neq 1, 3, 5, \dots$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2}(x) + \mu^2 u(x) &= f(x) \\ u(0) = \frac{du}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Vamos achar a função de Green calculando as funções v_0 e $v_{\frac{\pi}{2}}$. Neste caso

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_0}{dx^2}(x) + \mu^2 v_0(x) &= 0 \\ v_0(0) &= 0 \end{aligned}$$

Logo $v_0(x) = A \operatorname{sen}(\mu x) + B \cos(\mu x)$. Como $v_0(0) = 0$, vemos que $B = 0$. Escolhendo $A = 1$, temos

$$v_0(x) = \operatorname{sen}(\mu x).$$

Vamos agora resolver

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{\frac{\pi}{2}}}{dx^2}(x) + \mu^2 v_{\frac{\pi}{2}}(x) &= 0 \\ \frac{dv_{\frac{\pi}{2}}}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Novamente $v_{\frac{\pi}{2}}(x) = A \operatorname{sen}(\mu x) + B \cos(\mu x) = C \cos(\mu x + \varphi)$. Como $\frac{dv_{\frac{\pi}{2}}}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, podemos escolher $\varphi = -\mu \frac{\pi}{2}$ e $C = 1$, temos

$$v_{\frac{\pi}{2}}(x) = \cos\left(\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Vamos calcular o Wronskiano:

$$\begin{aligned} v_0(y) v_{\frac{\pi}{2}}'(y) - v_0'(y) v_{\frac{\pi}{2}}(y) &= -\mu \operatorname{sen}(\mu x) \operatorname{sen}\left(\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) - \mu \cos(\mu x) \cos\left(\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= -\mu \cos\left(\mu x - \mu x + \mu \frac{\pi}{2}\right) = -\mu \cos\left(\mu \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Assim,

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\mu x) \cos(\mu(y - \frac{\pi}{2}))}{-\mu \cos(\mu \frac{\pi}{2})}, & x < y \\ \frac{\operatorname{sen}(\mu y) \cos(\mu(x - \frac{\pi}{2}))}{-\mu \cos(\mu \frac{\pi}{2})}, & x > y \end{cases}.$$

A solução do problema é

$$u(x) = \int_a^x \frac{\operatorname{sen}(\mu y) \cos(\mu(x - \frac{\pi}{2}))}{-\mu \cos(\mu \frac{\pi}{2})} f(y) dy + \int_x^b \frac{\operatorname{sen}(\mu x) \cos(\mu(y - \frac{\pi}{2}))}{-\mu \cos(\mu \frac{\pi}{2})} f(y) dy.$$

Uma observação final: Se $\mu = 1, 3, 5, \dots$, então $\cos(\mu \frac{\pi}{2}) = 0$ e a solução não está bem definida. Isto não é surpresa, pois, se $\mu = 1, 3, 5, \dots$, a função $u(x) = \operatorname{sen}(\mu x)$ é uma solução não nula de

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2}(x) + \mu^2 u(x) &= 0 \\ u(0) = \frac{du}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Logo o problema não satisfaz a condição (H). Portanto, não está nas condições de existência da função de Green.

Principais resultados e ideias dessa seção:

1) Estudamos o problema

$$\begin{cases} p_2(x) \frac{d^2 u}{dx^2}(x) + p_1(x) \frac{du}{dx}(x) + p_0(x) u(x) = f(x), & x \in [a, b] \\ \alpha u(a) + \alpha' \frac{du}{dx}(a) = 0 \\ \beta u(b) + \beta' \frac{du}{dx}(b) = 0 \end{cases}.$$

2) Com as hipóteses adequadas, a solução é $u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy$, em que G é chamada de função de Green do problema e é dada por

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{v_a(x)v_b(y)}{p_2(y)W(y)}, & x < y \\ \frac{v_b(x)v_a(y)}{p_2(y)W(y)}, & x > y \end{cases},$$

em que

$$\begin{cases} p_2 \frac{d^2 v_a}{dx^2} + p_1 \frac{dv_a}{dx} + p_0 v_a = 0 \\ \alpha v_a(a) + \alpha' \frac{dv_a}{dx}(a) = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} p_2 \frac{d^2 v_b}{dx^2} + p_1 \frac{dv_b}{dx} + p_0 v_b = 0 \\ \beta v_b(b) + \beta' \frac{dv_b}{dx}(b) = 0 \end{cases}$$

e $W(y) = v_a(y) v_b'(y) - v_a'(y) v_b(y)$.