Construções Geométricas: Variações sobre um Tema Clássico

Paulo Ferreira Leite

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – USP

16 de outubro de 2009

A importância da visão

Aristóteles, (384 a.C. - 322 a.C.)

> ***"Todo homem, por natureza, deseja saber"***
>
> *–Aristóteles, Metafísica*

Todo homem, por natureza, deseja saber. Uma evidência disso é o deleite que nossos sentidos nos proporcionam. Independentemente de sua utilidade, nós os amamos; e acima de todos os outros, amamos a visão. . . . A razão é que esse sentido, mais do que todos os outros, traz-nos conhecimento e ilumina as diferenças entre as coisas.

The importance of vision, part 1

Michael Atiyah, (1929 –)

Our brains have been constructed in such a way that they are extremely concerned with vision. Vision, I understand from friends who work in neurophysiology, uses up something like 80 or 90 percent of the cortex of the brain. . .

A importância da visão, parte 1

Michael Atiyah, (1929 –)

Nossos cérebros foram construídos de forma a estarem extremamente relacionados com a visão. Amigos meus que trabalham em neurofisiologia me asseguram que a visão utiliza de 80 a 90 por cento do cortex do cérebro . . .

The importance of vision, part 2

Michael Atiyah, (1929 –)

Understanding, and making sense of, the world that we see is a very important part of our evolution. Therefore spatial intuition or spatial perception is an enormously powerful tool and that is why geometry is actually such a powerful part of mathematics - not only for things that are obviously geometrical, but even for things that are not. We try to put them into geometrical form because that enables us to use our intuition. Our intuition is our most powerful tool. . . I think it is very fundamental that the human mind has evolved with this enormous capacity to absorb a vast amount of information, by instantaneous visual action, and mathematics takes that and perfects it.

A importância da visão, parte 2

Michael Atiyah, (1929 –)

Entender o mundo que vemos e fazê-lo ter sentido é parte muito importante da nossa evolução. Em razão disso a percepção ou intuição espacial é uma ferramenta extraordinariamente poderosa e é isso que torna a geometria parte tão poderosa da matemática – não apenas para aquilo que é obviamente geométrico mas também para aquilo que não se apresenta dessa forma. Tentamos colocar essas coisas em forma geométrica porque isso permite o uso de nossa intuição. Essa é nossa mais poderosa ferramenta . . . Penso que tem importância fundamental o fato de que a mente humana tenha evoluído com essa enorme capacidade de absorver uma vasta quantidade de informação através de uma ação visual instantânea e que a matemática a utilize e a aperfeiçoe.

Geometry and vision

Michael Atiyah, (1929 –)

"The main point I have tried to get across is that geometry is not so much a branch of mathematics as a way of thinking that permeates all branches."

–M. Atiyah, What is Geometry

Broadly speaking I want to sugest that geometry is that part of mathematics in which visual thought is dominant whereas algebra is that part in which sequential thought is dominant. This dichotomy is perhaps better conveyed by the words "insight" versus "rigor" and both play an essential role in real mathematical problems.

Geometria e visão

Michael Atiyah, (1929 –)

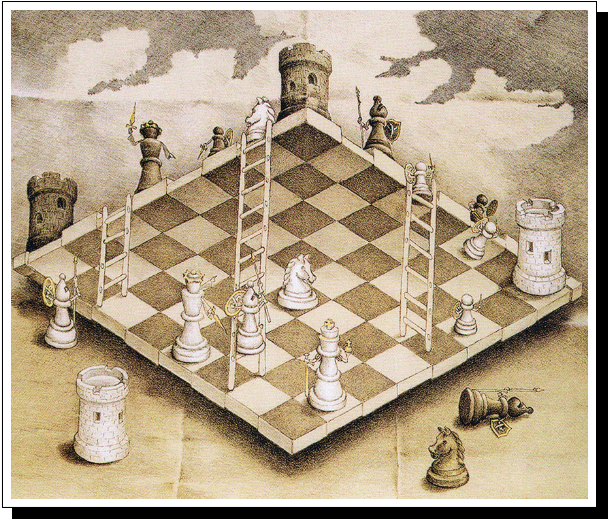
"O principal aspecto que procurei destacar é que a geometria é menos um ramo da matemática do que uma maneira de pensar que se propaga por toda a matemática."

–M. Atiyah, What is Geometry

Em termos gerais gostaria de sugerir que a geometria é a parte da matemática na qual o pensamento dominante é o visual e a álgebra é aquela parte na qual o raciocínio sequencial é predominante. Talvez essa dicotomia seja melhor descrita opondo-se as palavras percepção (insight) e rigor e observando que ambas desempenham papel essencial em problemas de matemática.

Visão espacial

Sandro Del-Prete, *The Folded Chess Set*, 1975 (fragmento).

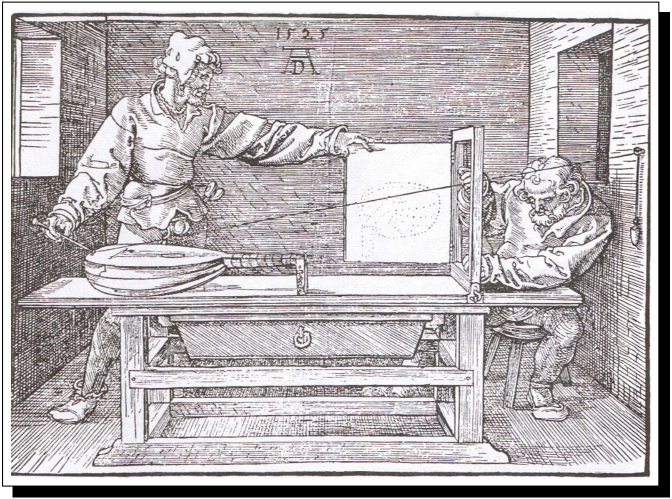


Visão espacial

M. C. Escher, *Waterfall*, 1961.

Visão espacial: perspectiva

A. Dürer.



Construções geométricas: antiguidade

Platão, (c. 428 a.C. – c. 348 a.C.) & Euclides, (c. 360 a.C. – c. 295 a.C)

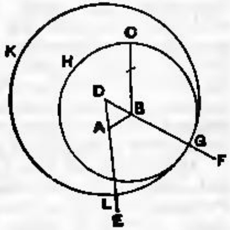
- Retas e círculos, formas perfeitas.
- Proposição número dois do livro um dos elementos de Euclides.

PROPOSITION 2.

To place at a given point (as an extremity) a straight line equal to a given straight line.

Let A be the given point, and BC the given straight line. Thus it is required to place at the point A (as an extremity) a straight line equal to the given straight line BC.

From the point A to the point B let the straight line AB be joined; [Post. 1]



and on it let the equilateral triangle DAB be constructed. [I. 1]

Let the straight lines AE, BF be produced in a straight line with DA, DB; [Post. 2]

with centre B and distance BC let the circle CGH be described; [Post. 3]

and again, with centre D and distance DG let the circle GKL be described. [Post. 3]

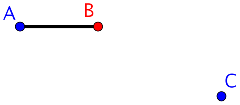


Figura: **Proposição 2.** Colocar num ponto determinado (como extremidade) um segmento congruente a um segmento dado.

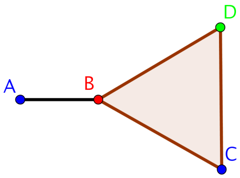


Figura: **Proposição 2.** Colocar num ponto determinado (como extremidade) um segmento congruente a um segmento dado.

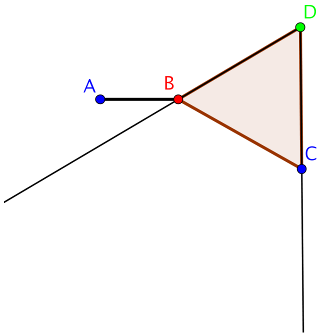


Figura: **Proposição 2.** Colocar num ponto determinado (como extremidade) um segmento congruente a um segmento dado.

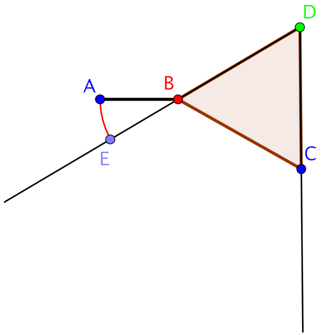


Figura: **Proposição 2.** Colocar num ponto determinado (como extremidade) um segmento congruente a um segmento dado.

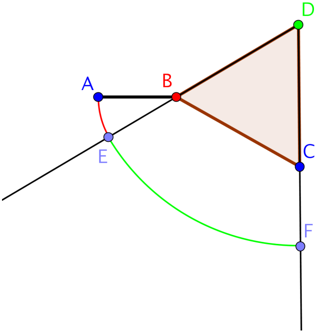


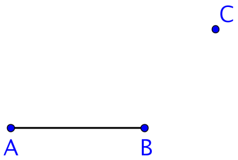
Figura: **Proposição 2.** Colocar num ponto determinado (como extremidade) um segmento congruente a um segmento dado.

Primeira variação: Mohr–Mascheroni

Construção com compasso

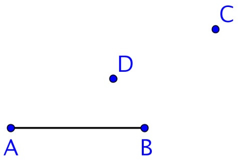
É possível transportar um segmento

utilizando somente um compasso euclidiano?



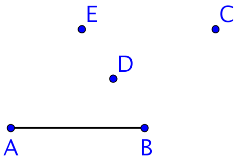
É possível transportar um segmento

utilizando somente um compasso euclidiano?

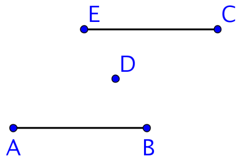


É possível transportar um segmento

utilizando somente um compasso euclidiano?



É possível transportar um segmento
utilizando somente um compasso euclidiano?

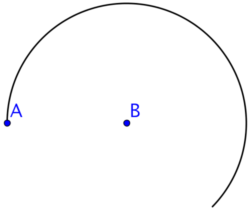


Primeira variação: Mohr–Mascheroni

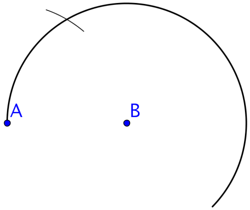
Construção com compasso

FUVEST. Dados dois pontos A e B, determinar o ponto C tal que B seja ponto médio do segmento AC.

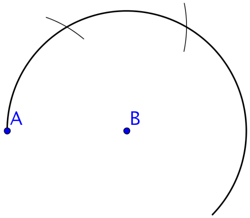
FUVEST. Dados dois pontos A e B, determinar o ponto C tal que B seja ponto médio do segmento AC.



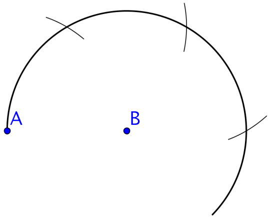
FUVEST. Dados dois pontos A e B, determinar o ponto C tal que B seja ponto médio do segmento AC.



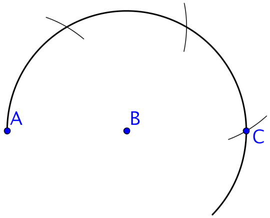
FUVEST. Dados dois pontos A e B, determinar o ponto C tal que B seja ponto médio do segmento AC.



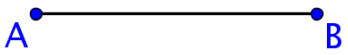
FUVEST. Dados dois pontos A e B, determinar o ponto C tal que B seja ponto médio do segmento AC.



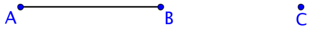
FUVEST. Dados dois pontos A e B, determinar o ponto C tal que B seja ponto médio do segmento AC.



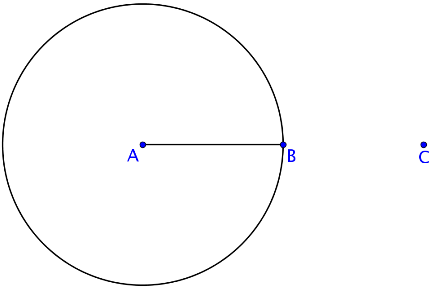
Ponto Médio. Determinar o ponto médio de um segmento AB.



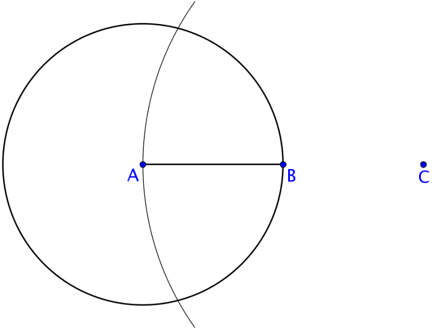
Ponto Médio. Determinar o ponto médio de um segmento AB.



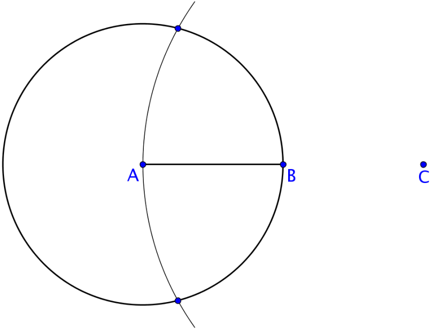
Ponto Médio. Determinar o ponto médio de um segmento AB.



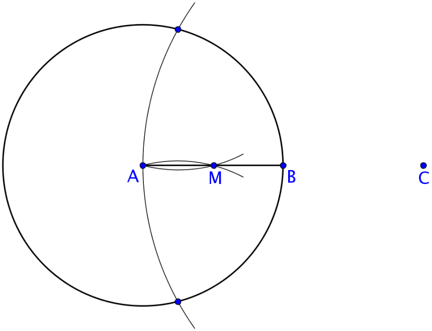
Ponto Médio. Determinar o ponto médio de um segmento AB.



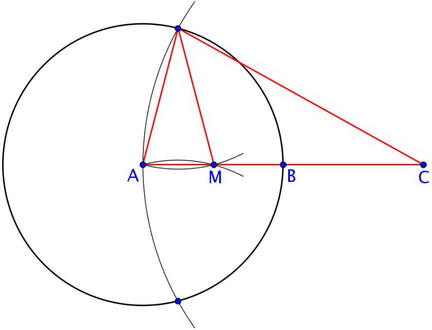
Ponto Médio. Determinar o ponto médio de um segmento AB.



Ponto Médio. Determinar o ponto médio de um segmento AB.



Ponto Médio. Determinar o ponto médio de um segmento AB.



Textos Modernos

- MARTIN, G. E., *Geometric Constructions*, Springer, 1998.
- EVES, H., *A Survey of Geometry* (2 vols.), Allyn and Bacon, 1965.

Textos Clássicos

- ADLER, A., *Theorie der Geometrischen Konstruktionen*, Göschen, 1906.
- BIEBERBACH, L., *Theorie der Geometrischen Konstruktionen*, Birkhäuser, 1952.
- LEBESGUE, H., *Leçons sur les Constructions Géométriques*, Gauthier-Villars, Paris 1950.

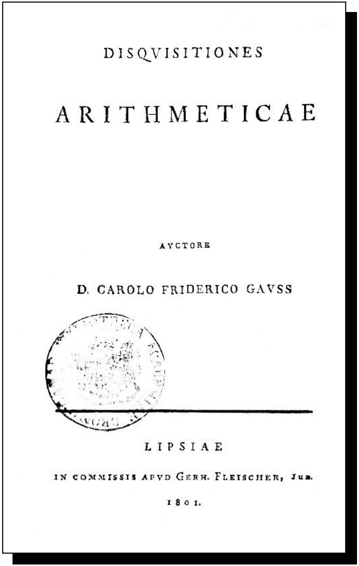
Textos Históricos

- GEORGE MOHR (1640–1697), *Euclides Danicus*, 1672. Encontrado por um estudante do matemático Hjelmslev foi republicado em 1928.
- LORENZO MASCHERONI (1750–1800), *Geometria del Compasso*, 1797. Geômetra e poeta, professor da Universidade de Pavia.

Em 1794, aos dezessete anos, descobre que é possível dividir, de forma exata, a circunferência em dezessete partes iguais. Essa descoberta faz com que opte por uma carreira em matemática.

Ciclotomia

Carl F. Gauss, 1777 – 1855



DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, Jun.

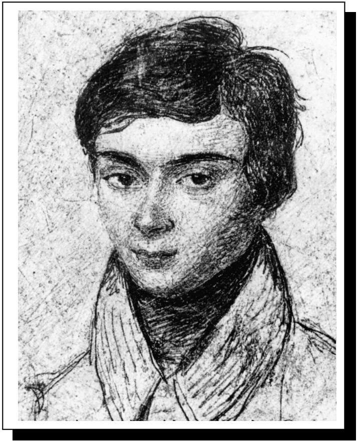
1801.

Teorema. Uma condição necessária e suficiente para que uma cincunferência possa ser dividida, de forma exata, em n partes iguais é que n seja da forma $n = 2^k p_1 \cdots p_l$, onde p_i, $1 \leq i \leq l$, são primos de Fermat distintos.

Os números da forma $2^{2^k} + 1$ são chamados de números de Fermat.

Coroamento algébrico

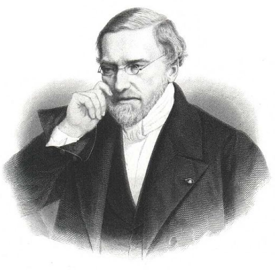
Evariste Galois, 1810 – 1832



Galois, morto em duelo, aos vinte e um anos de idade, introduziu idéias fundamentais para o estudo de extensões de corpos.

Segunda variação: Teorema de Poncelet–Steiner

Jean V. Poncelet, 1788 – 1867 & Jacob Steiner, 1796 – 1863



Jean V. Poncelet, oficial do exército de Napoleão em 1812. Aprisionado em Moscou retornou à França em 1814. Durante o período em que esteve preso, escreveu *Traité des Propriété Projectives des Figures*.

Jacob Steiner, alfabetizado aos quatorze anos de idade. Estudou na escola do reformista educacional Pestalozzi (1746 – 1827). Em 1834, a Universidade de Berlin criou uma cátedra de Geometria para abrigá-lo.

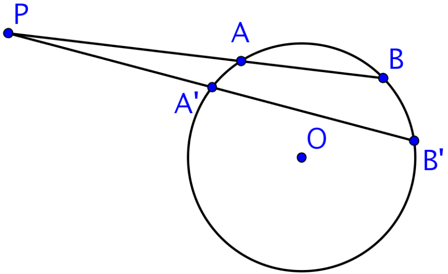
Teorema (Poncelet–Steiner)

Se forem dados no papel todos os pontos de uma circunferência e seu centro, é possível construir, utilizando apenas uma régua, todos os pontos do plano construtíveis por régua e compasso.

Proposição

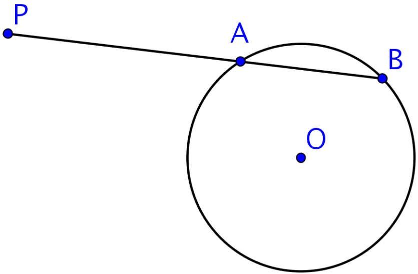
Para todo ponto P do plano vale a igualdade:

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = d^2 - r^2.$$



Definição

O valor $PA \cdot PB$ é chamado de *potência do ponto P em relação a circunferência*.



Eixo radical de duas circunferências

Introduzido por Steiner em 1823

Proposição

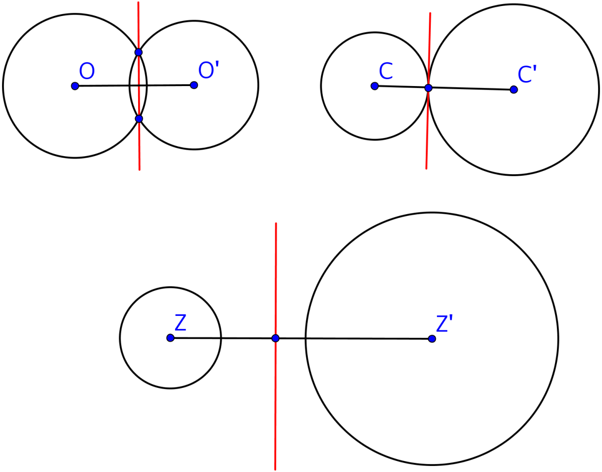
Dadas duas circunferências, não concêntricas, o lugar geométrico dos pontos do plano que tem, em relação a essas circunferências, mesma potência, é uma reta perpendicular à reta que une os centros das circunferências.

Definição

O lugar geométrico definido pela proposição anterior chama-se *eixo radical das circunferências*.

Exemplos de eixos radicais

Três casos



Proposição

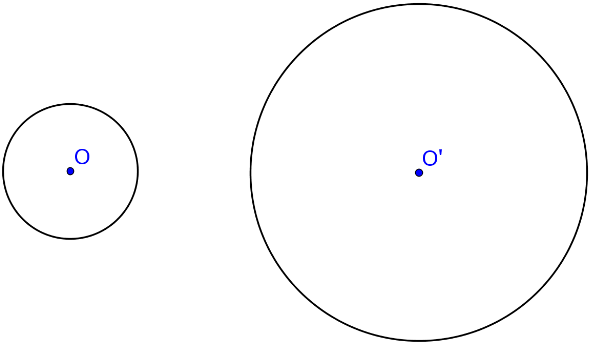
Dadas três circunferências cujos centros não estão alinhados, os eixos radicais dessas circunferências, tomadas duas a duas, se encontram num ponto.

Definição

O ponto de encontro dos eixos radicais dado pela proposição anterior chama-se *centro radical das circunferências*.

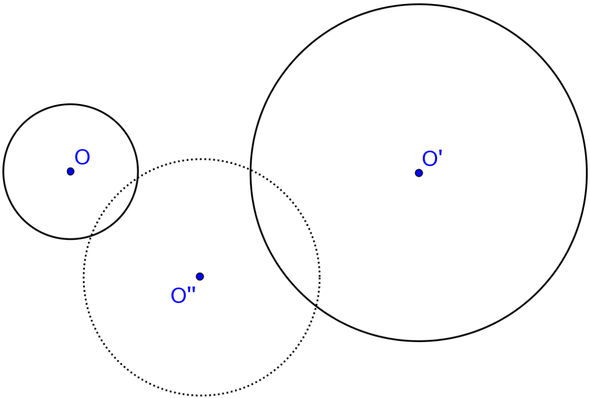
Exemplo

Construção do centro radical de três circunferências



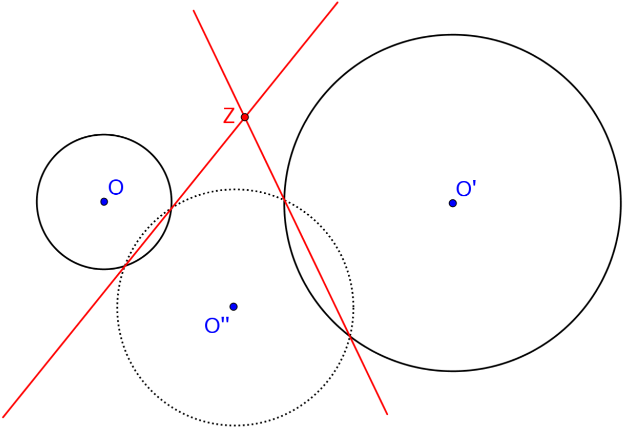
Exemplo

Construção do centro radical de três circunferências



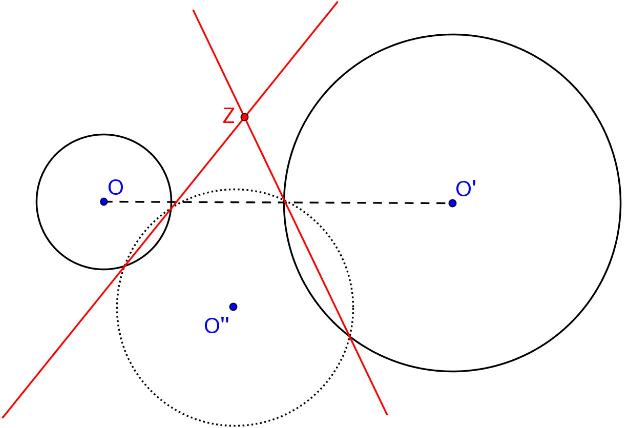
Exemplo

Construção do centro radical de três circunferências



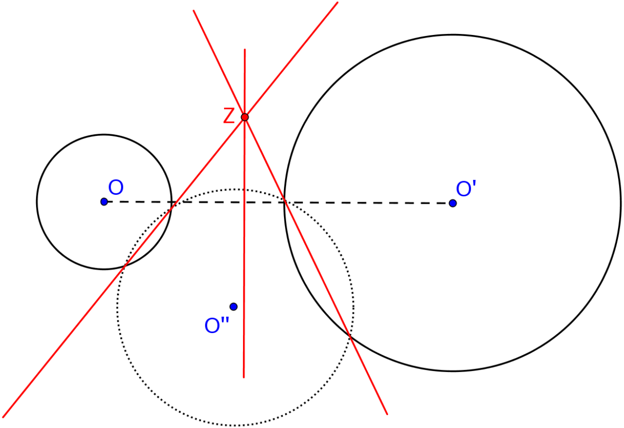
Exemplo

Construção do centro radical de três circunferências



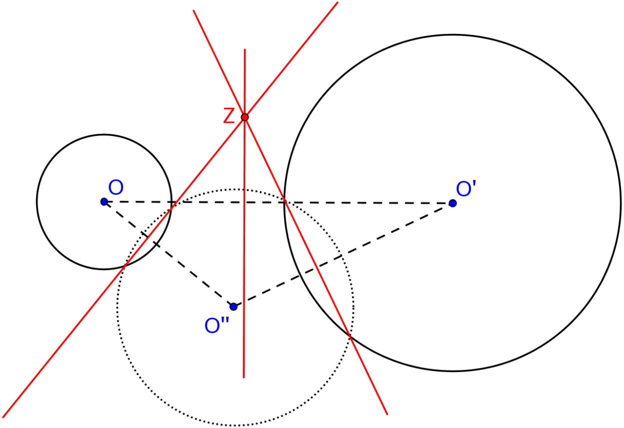
Exemplo

Construção do centro radical de três circunferências



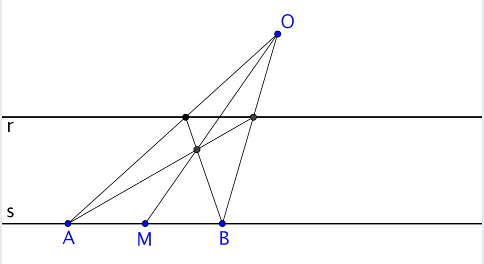
Exemplo

Construção do centro radical de três circunferências

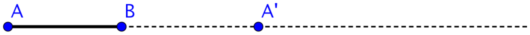


Proposição

Uma condição necessária e suficiente para que as retas r e s da figura sejam paralelas

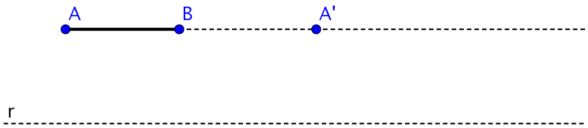


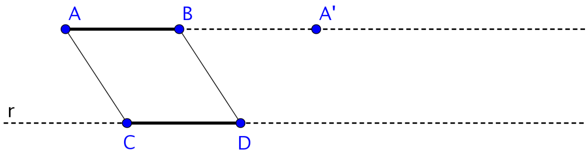
é que o ponto M seja ponto médio do segmento AB.


A
B
A'

Transporte de segmentos: Translação

Construções com régua

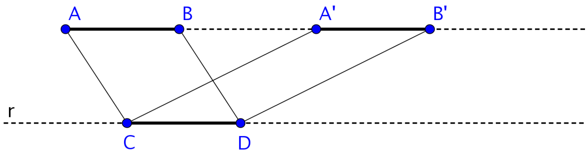


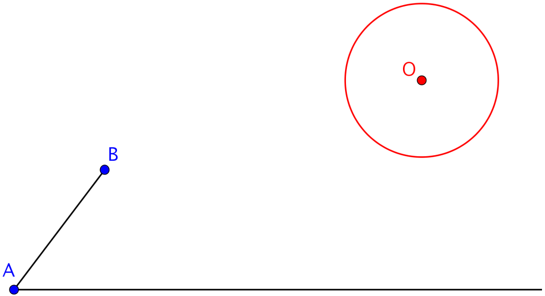


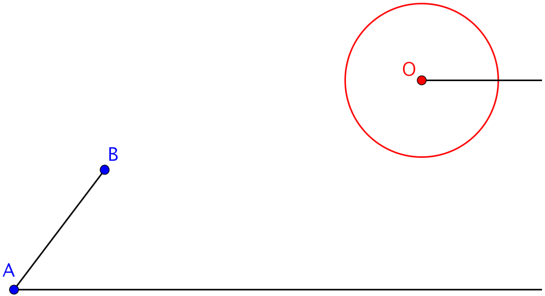
A
B
A'
r
C
D

Transporte de segmentos: Translação

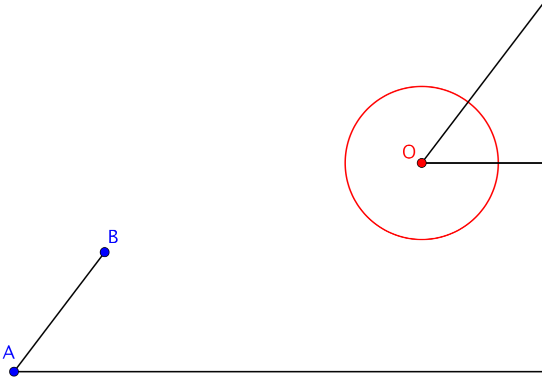
Construções com régua



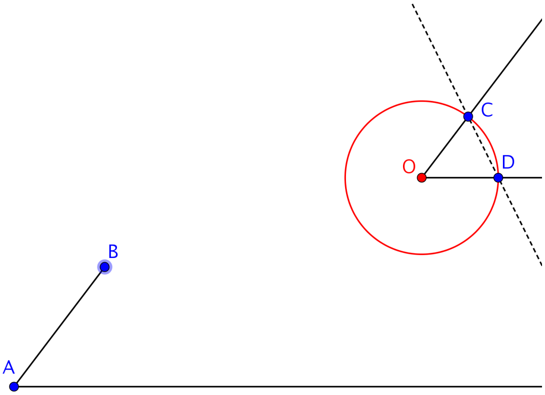

O
B
A



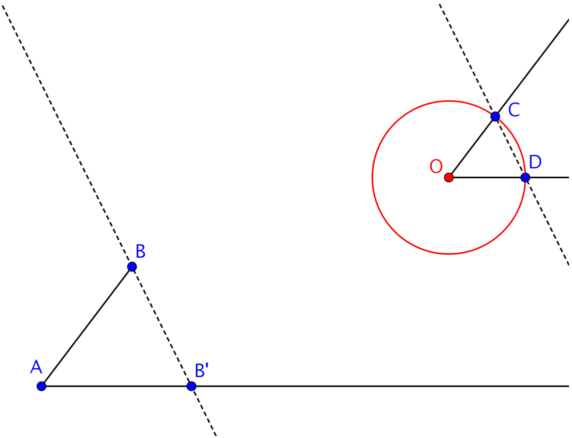
O
B
A



O
B
A

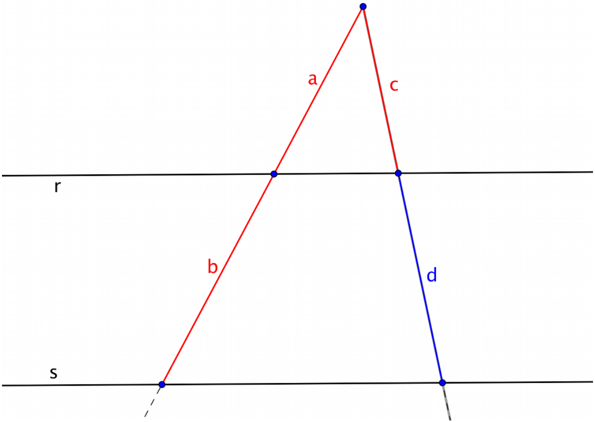

C
O
D
B
A

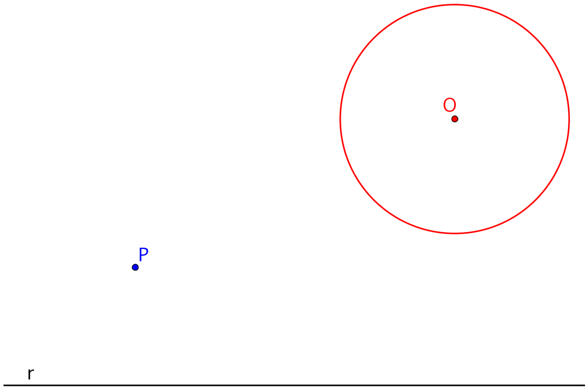
Transporte de segmentos: Rotação
Construções com régua



Construção da quarta proporcional

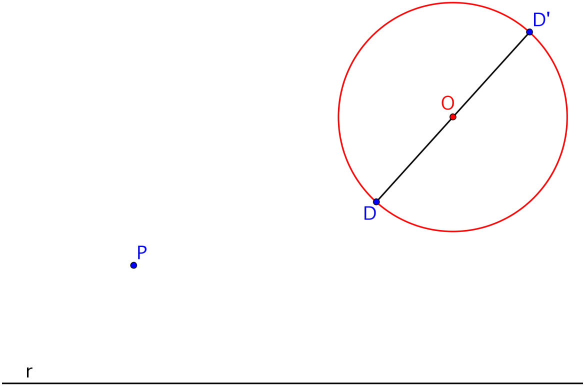
Construções com régua




O
P
r

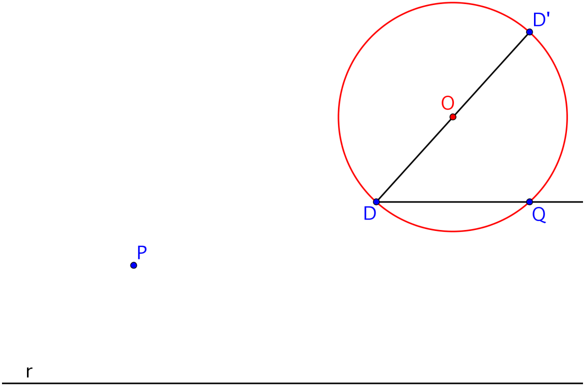
Perpendicular a uma reta por um ponto dado

Construções com régua



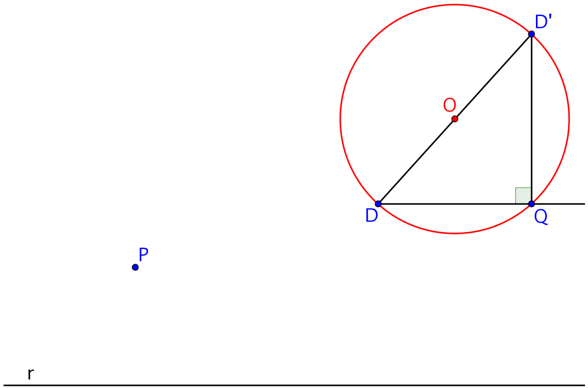
Perpendicular a uma reta por um ponto dado

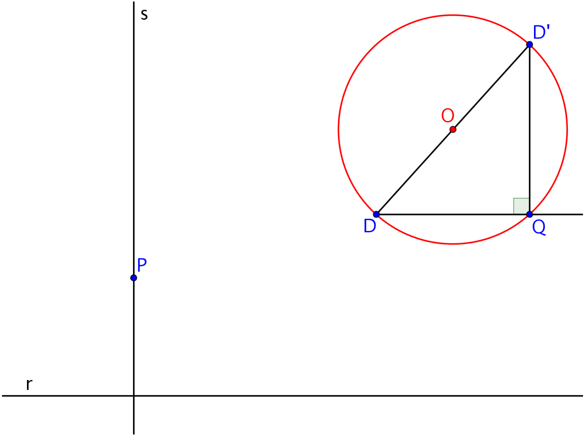
Construções com régua



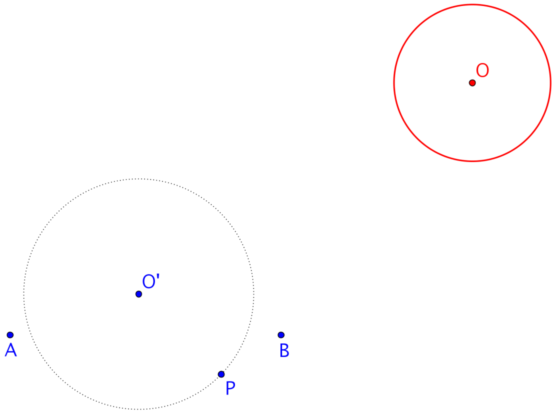
Perpendicular a uma reta por um ponto dado

Construções com régua

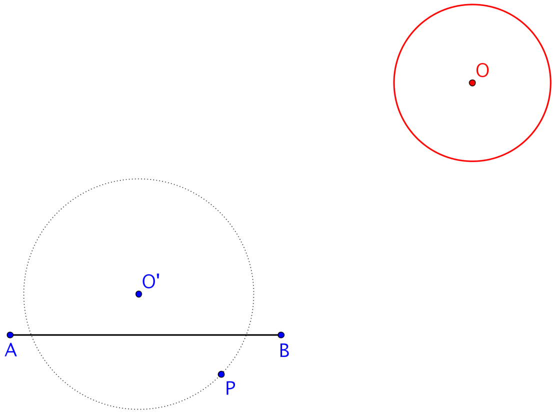




s
D'
O
D
Q
P
r

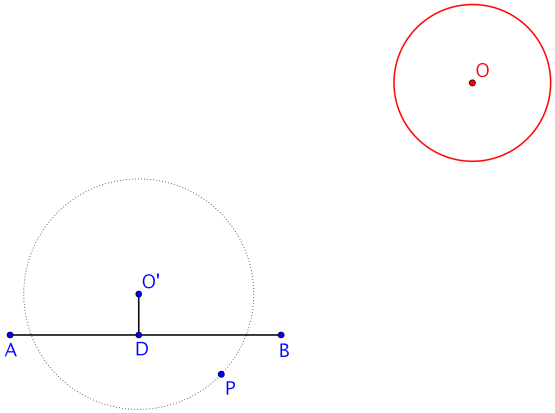


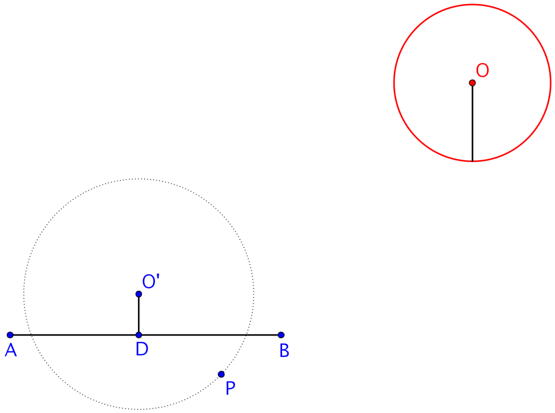
O
O'
A
B
P

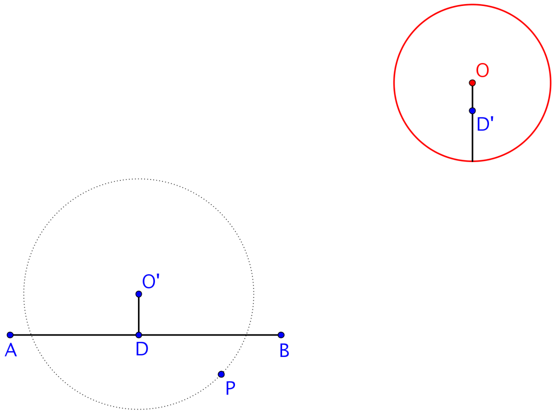

O
O'
A
B
P

Intersecção de circunferência com reta

Construções com régua

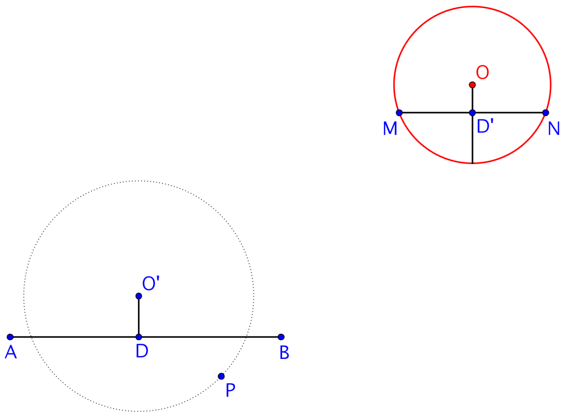



O
O'
A
D
B
P


O
D'
O'
A
D
B
P

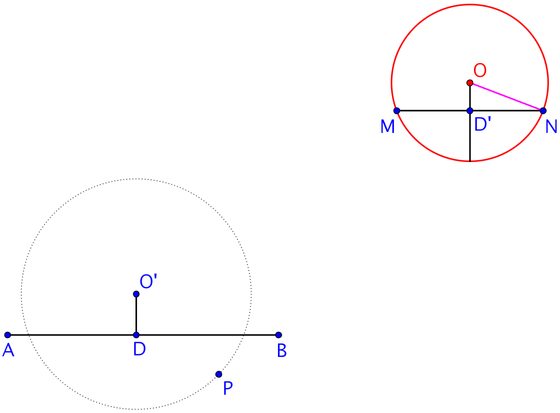
Intersecção de circunferência com reta

Construções com régua



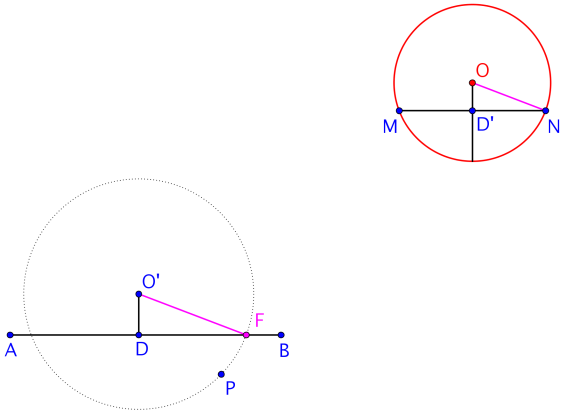
Intersecção de circunferência com reta

Construções com régua



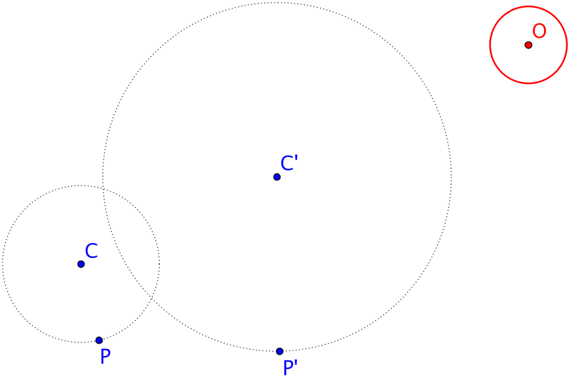
Intersecção de circunferência com reta

Construções com régua



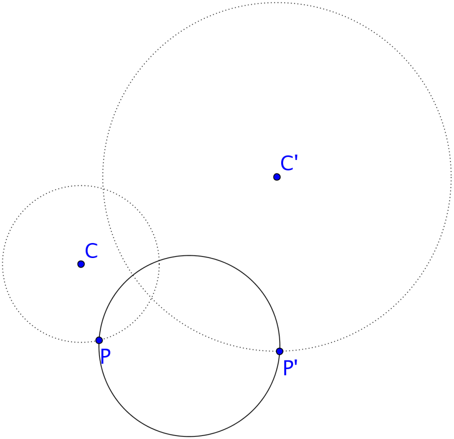
Intersecção de duas circunferências

Construções com régua



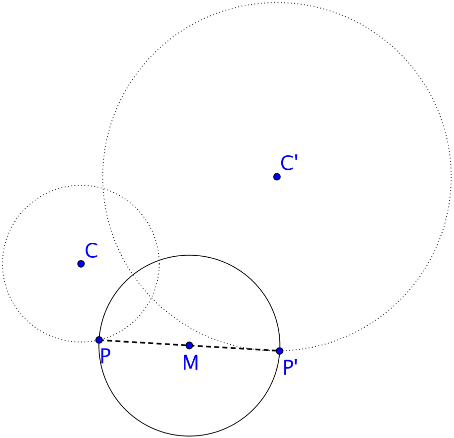
Intersecção de duas circunferências

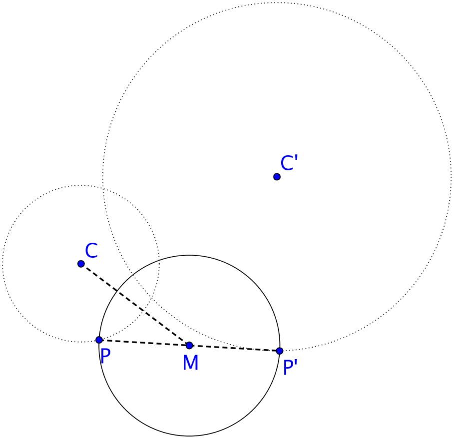
Construções com régua

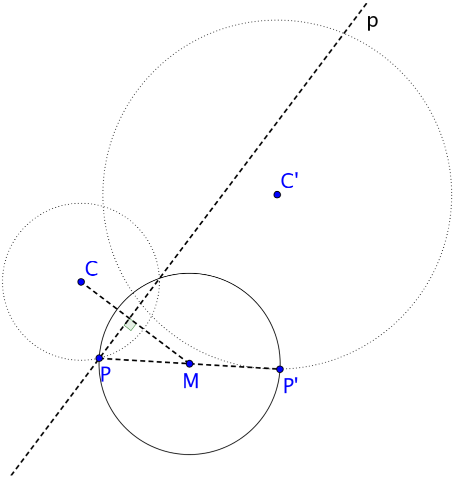


Intersecção de duas circunferências

Construções com régua



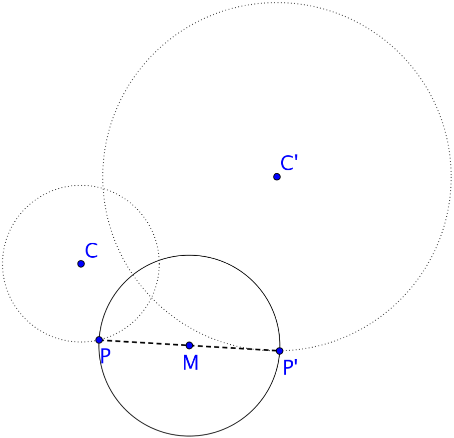

C'
C
P
M
P'

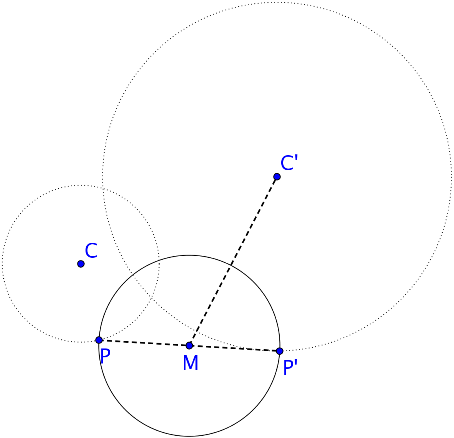


p
C'
C
P
M
P'

Intersecção de duas circunferências

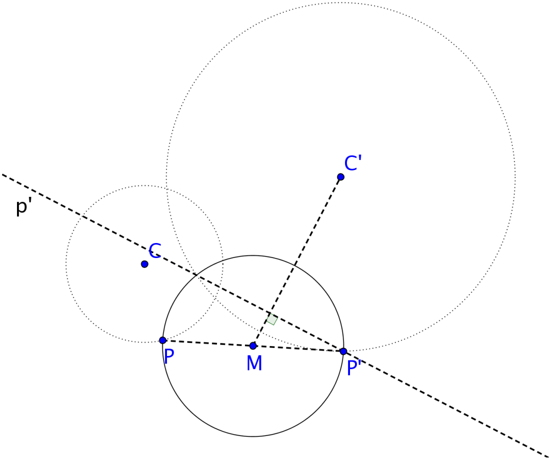
Construções com régua

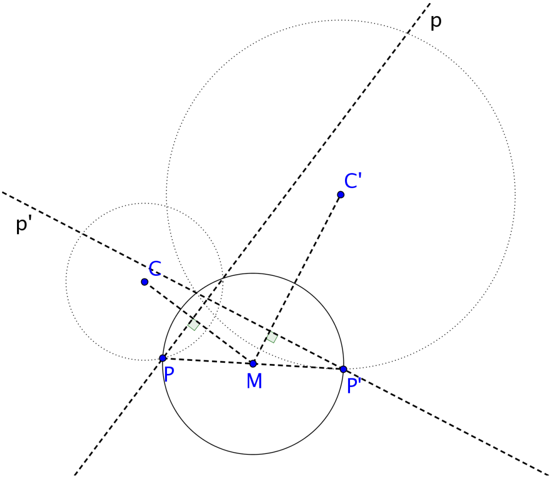


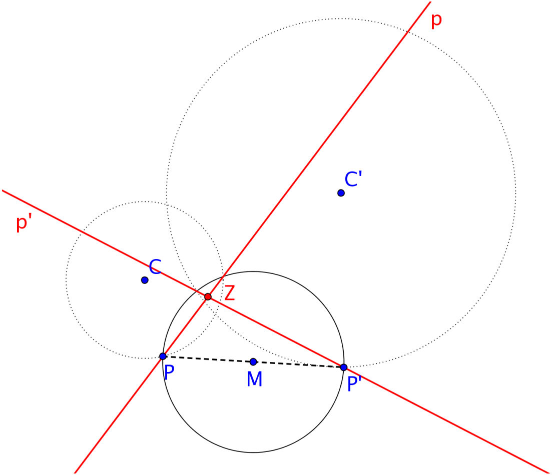

C'
C
P
M
P'

Intersecção de duas circunferências

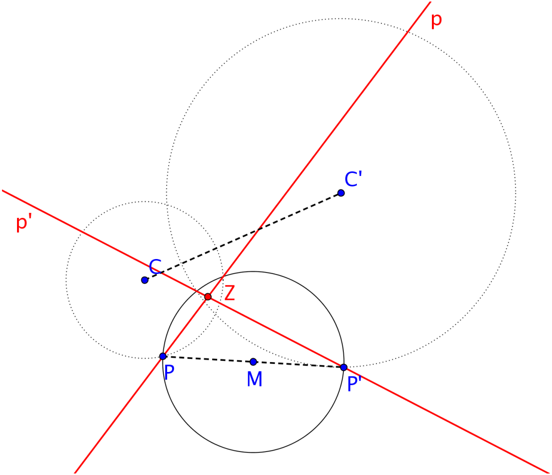
Construções com régua




p
C'
p'
C
P
M
P'



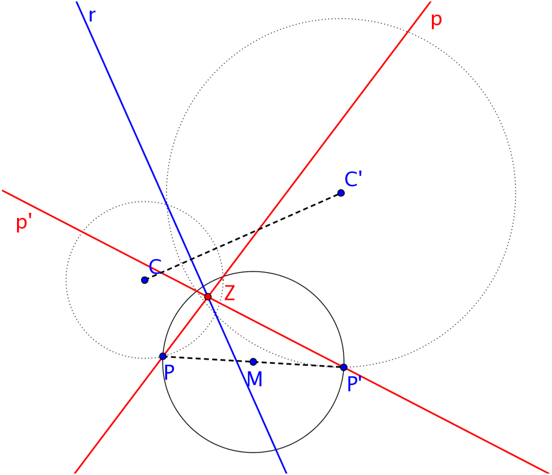
p
C'
p'
C
Z
P
M
P'



p
C'
p'
C
Z
P
M
P'

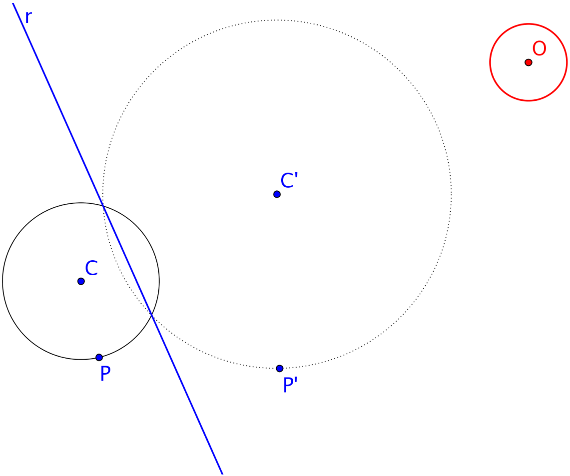
Intersecção de duas circunferências

Construções com régua



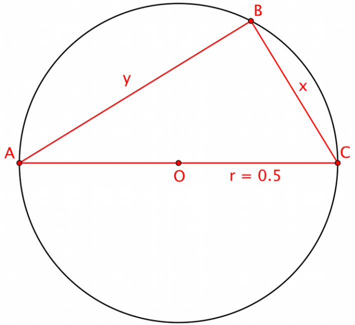
Intersecção de duas circunferências

Construções com régua



Teorema

O subcorpo de $\mathbb{R}$ formado pelos números construtíveis com régua e compasso é caracterizado por ser o menor subcorpo de $\mathbb{R}$ fechado por extração de raiz quadrada.



Na figura ao lado, o triângulo vermelho é retângulo e a hipotenusa tem medida 1. Portanto

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

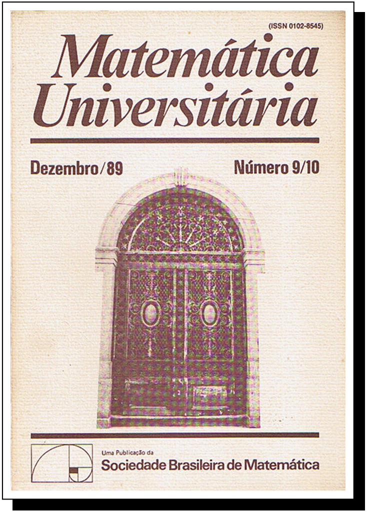
O que mostra que se $x < 1$, então $\sqrt{1 - x^2}$ é construtível com régua.

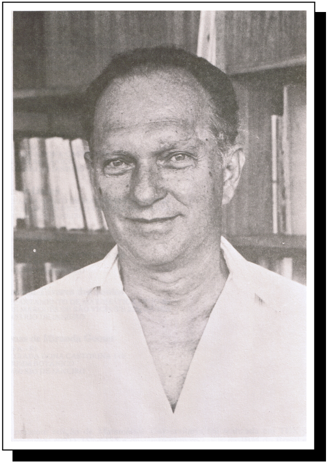
A fórmula:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\left(\frac{z+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-1}{2}\right)^2} = \left(\frac{z+1}{2}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}$$

termina a demonstração.

Comentários finais...


(ISSN 0102-8545)
Matemática Universitária
Dezembro/89
Número 9/10
Uma Publicação da
Sociedade Brasileira de Matemática



"A maioria (provavelmente a totalidade) dos matemáticos se sensibiliza com a beleza da matemática. Uma demonstração elegante, um argumento inesperado e definitivo, uma construção engenhosa, são sempre fontes de deleite, motivos de enlevo, razões para amar nossa Ciência . . . "

–Elon Lages Lima