CONSTRUÇÕES COM O COMPASSO

(texto de uma conferência)

Paulo Ferreira Leite

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

CONSTRUÇÕES COM O COMPASSO

(texto de uma palestra)

PAULO FERREIRA LEITE

Palestra apresentada por ocasião do encerramento da $5^{\underline{a}}$ Olimpíada Brasileira de Matemática, em novembro de 1983, na Academia Brasileira de Ciências, aos coordenadores regionais, estudantes premiados e professores por eles indicados. O evento foi parte do Programa de Olimpíadas da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

Índice

§1. Introdução

Há mais de dois mil anos as construções com régua e compasso constituem tema de contínuo e renovado interesse para os estudantes e estudiosos da Matemática. Uma das principais razões desse prestígio é, sem dúvida, o fato de alguns problemas de construção estarem intimamente ligados a problemas de álgebra e teoria dos números [1]. Uma outra razão, muito importante do ponto de vista pedagógico, é ser o assunto inesgotável fonte de problemas e exercícios de todos os níveis de dificuldade.

O objetivo desta exposição é modesto. Após rápida digressão histórica, apresentamos, de maneira informal (não nos preocupamos em formalizar a noção de construtibilidade) as principais idéias da demonstração do teorema de Mohr-Mascheroni que afirma ser possível dispensar o uso da régua nas construções com régua e compasso.

Gostaríamos de acreditar que o material aqui apresentado poderá, além de fornecer uma boa quantidade de problemas geométricos de nível colegial, motivar o estudo de questões mais complexas como, por exemplo, a solubilidade ou não de alguns problemas com régua e compasso (ciclotonia, quadratura do círculo, etc).

§2. A régua e o compasso

2.1 A tradição de utilizar somente régua e compasso nas construções geométricas remonta à antiguidade grega, mais precisamente, à época da descoberta dos números irracionais por alguém da escola de Pitágoras. Incapaz de compreender e conviver com os incomensuráveis, a escola pitagórica, que pretendia funda-

---

[1] Exemplo notável é o problema da ciclotomia, isto é, a divisão de uma circunferência em partes iguais.

mentar toda a ciência, inclusive a Geometria, na Aritmética, entrou em irremediável crise. Era necessário encontrar novos caminhos. Inspirados por Platão, os matemáticos gregos procuravam inverter a situação tomando a Geometria como fundamentação para a Aritmética sendo assim levados a procurar uma base axiomática para a Geometria. Essa busca foi grandemente influenciada pelas idéias filosóficas de Platão. Seu sistema filosófico foi erigido baseado na crença da existência de um mundo abstrato formado apenas por idéias e é nele que toda a teoria que se pretenda científica, como é o caso da Geometria, deve ser construída. Não temos porém, segundo o filósofo, livre acesso a esse mundo da razão; na melhor das hipóteses, nossos orgãos sensoriais podem oferecer difusas imagens do que aí se encontra. Por outro lado, não podemos, sob pena de ter que renunciar à possibilidade de qualquer espécie de conhecimento, negar a existência no mundo das idéias de entidades tão simples e de concepção tão clara como a reta e a circunferência. Sendo a régua e o compasso a materialização neste mundo em que vivemos das idéias de reta e circunferência, devemos admitir que tudo que pudermos construir com eles terá direito a cidadania no mundo platônico das idéias. Assim, as construções geométricas efetuadas com auxílio da régua e do compasso adquirem, para os antigos geômetras gregos, um caráter de teoremas de existência e daí, sua importância.

O leitor encontrará respaldo histórico para essas explicações, bem plausíveis a meu ver, do tradicional uso da régua e do compasso nas construções geométricas em (6) e (8).

2.2 Compreendida a razão e assimilado o hábito de se fazer construções com régua e compasso, ocorre-nos naturalmente a pergunta:

Que tipos de construção podem ser efetuadas com apenas um desses instrumentos?

Régua

A ausência do compasso é uma restrição real e muito significativa.O estudo sistemático do que é possível fazer utilizando apenas a régua nos conduz a Geometria Projetiva, assunto de grande beleza e importância, mas que nos levaria muito além dos objetivos a que nos propusemos nesta exposição.

O leitor interessado em Geometria Projetiva poderá consultar (4) ou (2).

Compasso

Aparentemente a restrição ao uso da régua originou-se por razões de ordem prática como a dificuldade de se obter réguas de boa qualidade. Em razão disso, desenhistas e construtores do início do renascimento passaram a utilizar, sempre que possível, o compasso em detrimento da régua.

Até 1928 supunha-se que Lorenzo Mascheroni (1750 - 1800), poeta e geômetra italiano, tinha sido o primeiro a demonstrar (7) que o uso da régua era dispensável nas construções geométricas. Nesse ano foi encontrado numa livraria de Copenhague um livro intitulado Euclides Danicus, cujo autor era um dinamarquês chamado Georg Mohr. Com surpresa verificou-se que o livro, publicado em 1672, continha, com uma demonstração diferente, o resultado de Mascheroni.

A demonstração que daremos, nos próximos parágrafos, deste resultado utiliza o método de inversão e é devida essencialmente a A.Adler.

§3. Construções Euclidianas

3.1 O uso da régua e do compasso nas construções geométricas é regulamentado e sua utilização só é permitida para realizar as seguintes operações:

Régua

R_1) Traçar uma reta unindo dois pontos distintos.

Compasso

C_1) Traçar uma circunferência de centro dado e passando por um ponto dado.

C_2) Traçar uma circunferência de centro dado e raio dado.

3.2 Definição. Dizemos que uma construção é euclidiana quando envolver um número finito de operações dos tipos R_1, C_1, C_2 descritos acima.

3.3 E' importante observar que decorre imediatamente da definição acima que nas construções euclidianas os pontos são obtidos como intersecção de duas retas, intersecção de duas circunferências ou intersecção de uma reta com uma circunferência.

3.4 Exemplo. Os problemas abaixo podem ser resolvidos através de construções euclidianas. Convidamos o leitor a tentar resolvê-los apenas com um compasso.

a) Dividir uma circunferência dada em 6 partes iguais.

b) Dados os pontos A e B achar um ponto C na reta AB tal que B seja ponto médio do segmento AC. Generalizar o exercício para obter um ponto C de tal forma que $AC = mAB$, $m \in \mathbb{N}$.

c) Dados três pontos A, B, C não alinhados, achar o simétrico de C em relação à reta AB.

d) Dados dois pontos A e B achar o ponto médio do segmento AB.

e) Dada uma circunferência C de centro O e dois pontos A e B determinar (caso existam!) os pontos de intersecção da reta AB com a circunferência C.

§4. O teorema de Mohr-Mascheroni

Como já dissemos anteriormente, este é o resultado principal desta exposição. Neste parágrafo damos seu enunciado preciso e observamos que sua demonstração decorre de duas proposições auxiliares.

4.1 Teorema (Mohr-Mascheroni). Todo ponto do plano obtido através de uma construção euclidiana pode ser obtido por uma construção utilizando apenas o compasso.

E' uma consequência imediata da observação feita em 3.3 que a demonstração do teorema 4.1 se reduz aos lemas:

4.2 Lema. Sejam A, B, C e D pontos distintos do plano tais que as retas AB e CD são concorrentes em X. Nessas condições é possível obter-se o ponto X por uma construção utilizando-se apenas o compasso.

4.3 Lema. Seja C uma circunferência de centro O e raio r e A e B dois pontos do plano tais que a reta AB intercepta a circunferência C. E' possível nessas condições determinar os pontos M e N de intersecção de C com a reta AB utilizando-se apenas um compasso.

Demonstraremos esses lemas no §6.

§5. Inversão

A inversão é uma transformação geométrica que nos permite atacar, de forma metódica e unificada, determinados tipos de problemas. Limitaremos a exposição ao mínimo de nossas necessidades.

5.1 Seja C uma circunferência de centro O e raio r. Dado um ponto $P \neq O$ no plano definimos seu inverso (relativo a C) como o ponto P' da semi-reta OP satisfazendo a igualdade

$$\overline{OP}.\overline{OP'} = r^2$$

A notação $\overline{OP}$ indica o comprimento do segmento OP.

A transformação do plano menos o ponto O em si mesmo definida pela correspondência que associa a cada ponto o seu inverso chama-se inversão de centro O e raio r. A circunferência C chama-se circunferência de inversão.

Dizemos que duas figuras F e F' são inversas uma da outra (ver 5.2 a) abaixo) quando podemos obter uma da outra por meio de uma inversão.

5.2 Com as mesmas notações utilizadas acima enunciamos algumas propriedades imediatas das inversões.

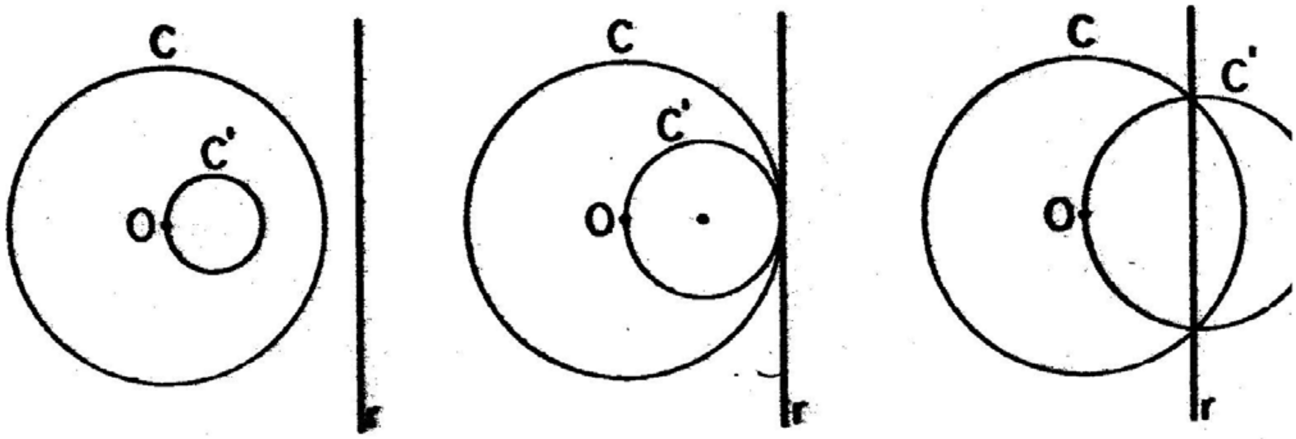
a) Toda inversão é uma involução. isto é, se P' é o inverso de P e P" o inverso de P' então P" = P.

b) Se P é um ponto da circunferência C de inversão então P' = P, isto é, a inversão restrita a C é a identidade.

c) A inversa de uma reta r passando pelo ponto O é a própria reta r.

Observe, no entanto, que a inversão restrita a r não é a identidade.

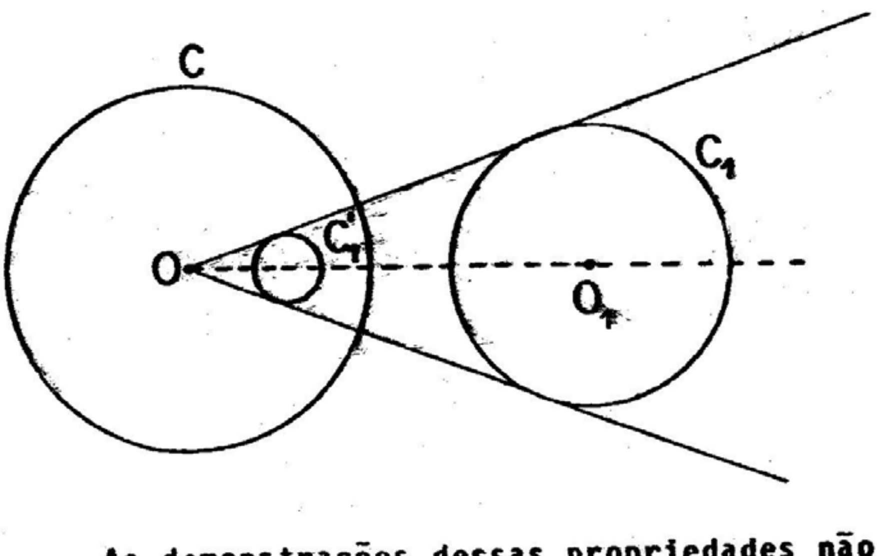
d) A inversa de uma reta r que não passa pelo ponto O é uma circunferência C' passando pelo ponto O.



d') A inversa de uma circunferência passando pelo ponto O é uma reta que não passa pelo ponto O.

As figuras são obviamente as mesmas do item d).

e) A inversa de uma circunferência C_1 que não passa pelo ponto O é uma circunferência C'_1 que não passa pelo ponto O.



As demonstrações dessas propriedades não são difíceis e o leitor poderá supri-las ou então consultar (1), (2), (3), (5) (6) ou qualquer outro livro que trate do assunto.

5.3 Agora que já expusemos alguns fatos básicos relativos à inversão, temos condições de informar ao leitor a estratégia que pretendemos seguir. Uma vez que desejamos utilizar apenas o compasso, o plano é usar a inversão para transformar problemas de intersecção entre duas retas ou de intersecção entre uma reta e uma circunferência em problemas de intersecção de duas circunferências. Para retornarmos ao problema original, vamos precisar construir os inversos de determinados pontos em relação a circunferências conhecidas. Portanto, para poder tornar a idéia efetiva, vamos precisar saber resolver alguns problemas de inversão utilizando apenas o compasso. E' o que faremos a seguir.

5.4 E' conveniente convencionarmos que, deste ponto em diante, a menos de menção explícita em contrário, TODAS AS CONSTRUÇÕES DEVERÃO SER EFETUADAS UTILIZANDO-SE APENAS O COMPASSO.

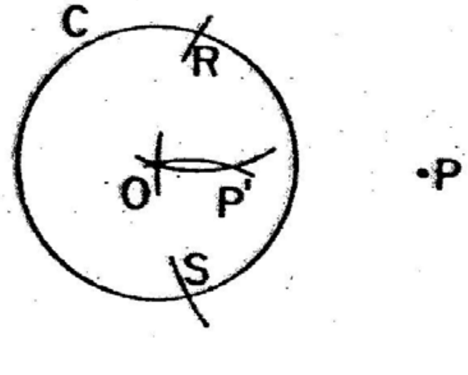
5.5 Achar o inverso de um ponto P em relação a uma circunferência C de centro O e raio r.

Solução

Há dois casos a distinguir.

a) P está no exterior de C.

Determinam-se os pontos R e S de intersecção da circunferência C com a circunferência de centro P e passando por O.



O ponto P' (inverso de P) é obtido como a intersecção das circunferências de centros R e S respectivamente e que passam por O.

A prova de que P' é o inverso de P utiliza a semelhan ça dos triângulos ORP e ORP'.

b) P está no interior de C.

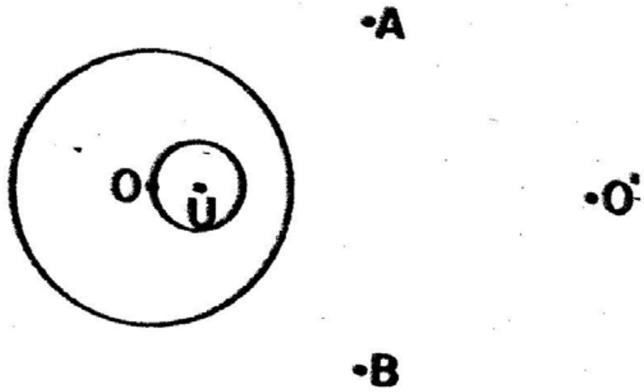
Utilizando-se o exemplo 3.4 b) determina-se um ponto T da semi-reta OP tal que T esteja no exterior de C e $\overline{OT} = n\overline{OP}$ para algum natural n.

Constroi-se o inverso T' de T e usando-se o fato de que $n\,\overline{OT'} = \overline{OP'}$ determina-se P'.

Exercício. Dados os pontos A e B e um número natural n, determine um ponto C na reta AB tal que $n\,\overline{AC} = \overline{AB}$ (confronte com 3.4 d)).

5.6 Suponha dados dois pontos A e B e uma circunferência C cujo centro O não esteja na reta AB. Construa a circunferência inversa da reta AB em relação a C.

Solução



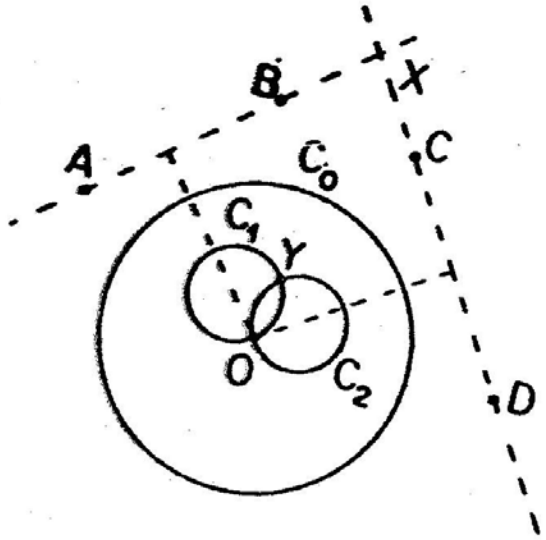
Como a circunferência procurada passa pelo ponto O (ver 5.2 d) basta determinar seu centro U. Seja O' o simétrico de O em relação à reta AB. Afirmamos que U (demonstração a cargo do leitor) é o inverso de O' em relação a C. Já que sabemos obter O' (ver 3.4 c) e U (ver 5.5) a construção está terminada.

§6. Demonstração dos Lemas 4.2 e 4.3

Para maior comodidade do leitor repetiremos os enunciados.

Lema 4.2. Sejam A, B, C e D pontos distintos do plano tais que as retas AB e CD sejam concorrentes em X. Nessas condições é possível obter-se X por uma construção com o compasso.

Demonstração

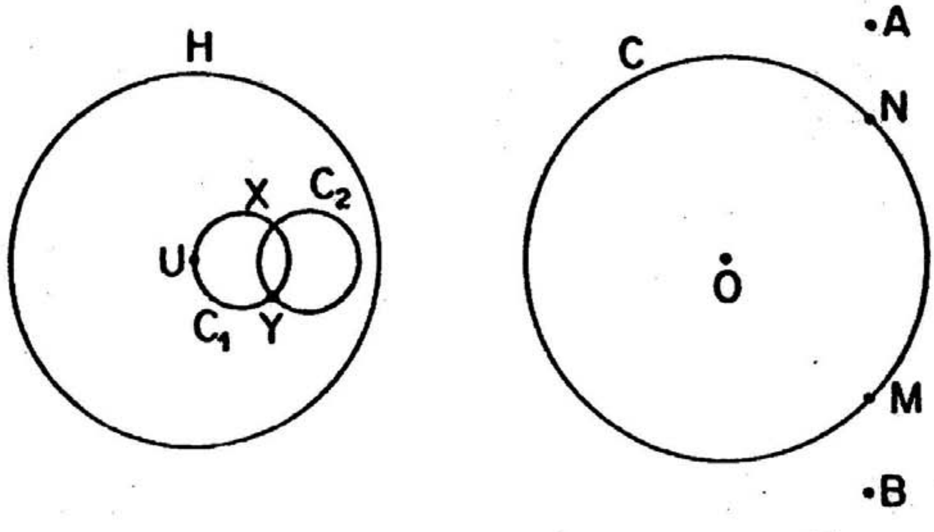


Por um ponto O fora das retas AB e CD constrói-se uma circunferência C_0 de raio arbitrário e a seguir, pelo processo descrito em 5.6, as circunferências C_1 e C_2 inversas das retas AB e CD (respectivamente) em relação a C_0. As circunferências C_1 e C_2 se cortam no ponto O (5.2 d) e, em virtude das retas AB e CD serem concorrentes, num ponto Y. O ponto Y é o inverso (em relação à circunferência C_0) do ponto X procurado. (Justificação a cargo do leitor).

Exercício. Construir uma circunferência passando por três pontos dados, não colineares.

Lema 4.3. Seja C uma circunferência de centro O e raio r e A e B dois pontos do plano tais que a reta AB intercepte a circunferência. E' possível nessas condições determinar os pontos M e N de intersecção de C com AB utilizando-se apenas um compasso.

Demonstração



Por um ponto U fora de C e da reta AB constroi-se uma circunferência H de raio arbitrário. A seguir constroem-se as circunferências C_1 e C_2 inversas (com relação a H), respectivamente, da reta AB e da circunferência C. Para construir C_1 utilizamos 5.6 e C_2, o exercício acima. Em virtude da reta AB interceptar C, C_1 e C_2 vão se interceptar nos pontos X e Y que são (justificação pelo leitor) inversos dos pontos M e N procurados. Fica assim, demonstrado o Lema.

E' importante observar que a demonstração que demos do teorema de Mohr-Mascheroni é construtiva, isto é, descreve um processo que nos permite efetivamente fazer a construção. Por outro lado, embora esse processo seja de grande simplicidade conceitual, é excessivamente complicado (no sentido de exigir um número exageradamente grande de operações) para poder ser aplicado na prática. Nesse sentido, a demonstração que demos do Lema 4.3 acima é particularmente ruim. Na secção de exercícios damos ao leitor indicações de como conseguir construções mais simples. (Veja exercícios 10, 11, 12).

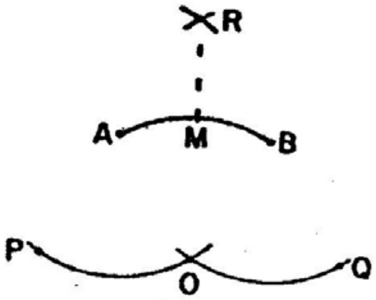
§7. Exercícios

7.1 Resolver os problemas abaixo utilizando apenas o compasso e realizando o menor número de operações que for capaz.

1. Dados três pontos não colineares A, B e C, construa um ponto D tal que as retas AB e CD sejam perpendiculares.
2. Dada uma reta r e um ponto P fora de r, construa um ponto Q tal que a reta PQ seja paralela ar.
3. Dados os pontos A e B construa um ponto P tal que as retas AB e AP sejam perpendiculares.
4. Dados três pontos A, B e C não colineares, construa um ponto D tal que as retas AB e CD sejam paralelas.
5. Dados os pontos A e B e os naturais positivos m, n, determinar um ponto C sobre a reta AB tal que $\frac{m}{n}.\overline{AC} = \overline{AB}$.
6. Dados os pontos não colineares A, B e C, determinar o ponto Q, pé da perpendicular à reta AB traçada por C.
7. Dividir uma circunferência em n partes iguais, n = 3, 4, 5.
8. Recuperar o centro (perdido!) de uma circunferência.
9. Dados uma circunferência C de centro O e um ponto P externo a C, achar os pontos de tangência das tangentes a C por P.
10. (Caso simples do Lema 4.3). Considere uma circunferência C de centro O e dois pontos A e B tais que a reta AB intercepte C mas não seja diâmetro de C. Construa os pontos M e N determinados pela intersecção da reta AB com C. (Sugestão: considere O', simétrico de O em relação à reta AB).
11. Resolva o problema anterior no caso em que AB é diâmetro de C

(caso mais complicado do Lema 4.3). Sugestão: reduza o problema a bissectar um arco e veja o exercício 12.

12. Bissectar um arco de circunferência de centro conhecido.



Sugestão: olhe com atenção a figura ao lado.

os arcos da figura têm centros em O, A e B.

13. Dados os pontos A, B, C e D construir um ponto X pertencente a reta AB e tal que $\overline{AX} = \overline{AB} + \overline{CD}$

14. Bissectar o ângulo $A\hat{O}B$ formado pelos pontos A, O e B.

7.2 Use o conceito de inversão para resolver os problemas abaixo.

1. Se ABCD é um quadrilátero convexo então

$$\overline{BC}.\overline{AD} + \overline{CD}.\overline{AB} \geq \overline{BD}.\overline{AC}$$

A igualdade vale se e somente se os pontos A, B, C e D estão numa circunferência.

2. sen (a+b) = sen a.cos b + sen b .cos a.

3. Traçar uma circunferência tangente a três circunferências dadas.

7.3 Suponha que você dispõe de uma régua e de um compasso muito pequenos (a abertura do compasso e o comprimento da régua não ultrapassam 10 cm) e são dados dois pontos A e B no plano a uma distância de 1 metro um do outro. Trace uma reta ligando o ponto A ao ponto B. Assegure-se que sua construção é euclidiana!

Bibliografia

(1) I.Y.ā Bakel'man
Inversions
The university of Chicago Press, 1974

(2) R.Courant, H.Robbins
What is Mathematics
Oxford University Press, 1969

(3) H.Eves
A Survey of Geometry
Revised Edition
Allyn and Bacon, Inc 1, 1972

(4) C.E.Harle
Introdução a Geometria Projetiva
A aparecer
Publicações do Instituto de Matemática e Estatística, USP

(5) A.N.Kostovsky
Construcciones Geométricas Mediante un Compás
Lecciones Populares de Matemáticas
Editora Mir, Moscú, 1980

(6) H.Lebesgue
Leçons sur les Constructions Geometriques
Gauthier-Villars Paris 1950

(7) L.Mascheroni
Geometria del Compasso

(8) K.R.Popper
A sociedade aberta e seus inimigos
Ed. da Universidade São Paulo
Editora Itatitaia, 1974