Motivação, Heurística e Rigor no Ensino da Matemática

Paulo Ferreira Leite

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – USP

21 de maio de 2010

Apresentação

Discutiremos nesta exposição questões relacionadas à forma como a matemática, com frequência, é transmitida em artigos de pesquisa, em textos didáticos, de divulgação e até mesmo em sala de aula.

Os pontos de vista expostos estão baseados muito mais na experiência pessoal do autor como docente e pesquisador do que em teorias psicológicas ou pedagógicas estabelecidas.

Daí talvez, o caráter idiossincrático de algumas posições.

Introdução

Aristóteles, 384-322 a.C.

"Todo homem, por natureza, deseja saber"

— Aristóteles *em Metafísica*

Todo homem, por natureza, deseja saber. Uma evidência disso é o deleite que nossos sentidos nos proporcionam. Independentemente de sua utilidade, nós os amamos; e acima de todos os outros, amamos a visão. [. . .] A razão é que esse sentido, mais do que todos os outros, traz-nos conhecimento e ilumina as diferenças entre as coisas.

Introdução

A matemática vista por não-matemáticos

Os matemáticos são como os franceses: você diz algo à eles, eles traduzem para sua própria língua e transformam o que você disse em algo totalmente diferente.

— ***J. W. Goethe***

* * *

Die Mathematiker ſind eine Art Franzoſen: redet man ſu ihnen, ſo uberſetzen ſie eſ in ihre Sprache und dann iſt eſ alſobald ganz etwaſ Andereſ.

— J. W. Goethe

Introdução

A matemática vista por não-matemáticos

Admito que a ciência matemática é uma coisa boa. Porém, devoção excessiva a ela não é bom.

— ***Aldous Huxley***
(Entrevista, J.W.N. Sullivan)

* * *

I admit that mathematical science is a good thing. But excessive devotion to it is a bad thing.

— Aldous Huxley
(Interview, J.W.N. Sullivan)

No que se refere à matemática, estar preso numa sala horrível e obrigado a fazer somas algébricas sem nunca ter tido seu significado ou suas relações com a ciência explicado foi o suficiente para fazer-me, como a maior parte dos homens de letras, odia-la pelo resto da minha vida.

— ***George Bernard Shaw***

* * *

As to mathematics, to be imprisioned in an ugly room and set to do sums in algebra without ever having had the meaning of mathematics explained to me, or its relation to science, was enough to make me hate mathematics all the rest of my life, as so many literary men do.

— GEORGE BERNARD SHAW

INTRODUÇÃO

A MATEMÁTICA VISTA POR NÃO-MATEMÁTICOS

"O professor fingia que a álgebra é um assunto absolutamente natural, que não requeria explicações; de minha parte eu sequer sabia o que eram números. As aulas de matemática tornaram-se puro terror e tortura para mim. Eu ficava tão intimidado pela minha incompreensão que não ousava perguntar nada."

— ***C. G. Jung***
Psiquiatra suiço (1875-1961)

* * *

"The teacher pretended that algebra was a perfectly natural affair, to be taken for granted, whereas I didn't even know what numbers were. Mathematics classes became sheer terror and torture to me. I was so intimidated by my incomprehension that I did not dare to ask any questions."

— C. G. JUNG
Swiss psychologist (1875-1961)

- Ordem da Experiência — **Espírito de justeza.**
- Ordem da Razão — **Espírito geométrico.**
- Ordem da Caridade — **Espírito de finura.**

Nos primeiros os princípios são palpáveis, mas afastados do uso comum; de maneira que, por falta de hábito, custa-nos virar a cabeça para esse lado: mas, por pouco que se vire, veêm se em cheio os princípios; e seria preciso ter o espírito inteiramente falso para raciocinar mal sobre princípios tão grandes que é quase impossível que escapem.

No espírito de finura, os princípios estão no uso comum e à vista de todos. Basta, sem nenhum esforço, virar a cabeça; é preciso apenas ter vista boa, mas que seja, de fato boa: pois os princípios são tão sutis e em tão grande número, que é quase impossível que alguns não nos escapem.

Introdução

Pascal: diferença entre o espírito geométrico e o espírito de finura

Todos os geômetras seriam sutis se tivessem a vista boa, pois eles não raciocinam errado sobre princípios que conhecem; e os espíritos sutis seriam geômetras se pudessem volver a vista para os princípios desusados da geometria.

O que faz, pois, com que certos espíritos sutis não sejam geômetras é que eles não podem de todo voltar-se para os princípios da geometria; mas o que faz com que os geômetras não sejam sutis é que não vêem o que está diante deles, e que estão acostumados aos princípios nítidos e grosseiros da geometria, e a só raciocinarem depois de terem visto bem e manejado os seus princípios, perdem-se nas coisas da finura, onde os princípios não se deixam manejar assim.

[. . .]

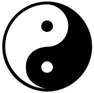
Os espíritos sutis, ao contário, acostumados a julgar com um só golpe, ficam tão espantados — quando se lhes apresentam proposições das quais nada compreendem e cuja penetração exige anteriormente definições e princípios estéreis que não estão acostumados a ver assim pormenorizados — que se afastam e se desgostam.

Mas os espíritos falsos não são nem sutis nem geômetras.

Os geómetras que não são senão geómetras têm o espírito reto, mas desde que se lhes expliquem bem todas as coisas por definições e princípios; de outra maneira, se tornam falsos e insuportáveis, pois são retos somente em relação aos princípios bem esclarecidos.

E os sutis, que não são senão sutis, não podem ter a paciência de descer até aos primeiros princípios das coisas especulativas e de imaginação que nunca viram no mundo e que estão completamente fora de seu emprego.

Introdução
Yin e Yang — Fonte: Wikipedia



Yin Yang é, na filosofia chinesa, uma representação do príncipio da dualidade de yin e yang, o conceito tem sua origem no Tao (ou Dao), base da filosofia e metafísica da cultura daquele país.

Segundo este princípio, duas forças complementares compõem tudo que existe, e do equilíbrio dinâmico entre elas surge todo movimento e mutação.

Essas forças são:

- Yang: o princípio ativo, diurno, luminoso, quente, masculino.
- Yin: o princípio passivo, noturno, escuro, frio, feminino.

Referências:

- **Unknown Author**, *The Secret of Golden Flower — the chinese book of life*, [Routledge & Kegan Paul, 1979]. Veja, em particular, o prefácio e os comentário de C.G. Jung.
- **Unknown Author**, *I Ching — book of changes*, [Bantam Books, 1964]

*Penso aqui na forma **“yang”** do desejo de conhecer — aquele que perscruta, descobre, nomeia o que aparece...*

*É o fato de ter sido nomeado que torna o conhecimento adquirido irreversível, indelével (mesmo que depois ele venha a ser enterrado, esquecido, que deixe de ser ativo...) A forma **“yin”**, “feminina” do desejo do conhecimento se manifesta através de abertura, receptividade, aceitação silenciosa de um conhecimento que aparece nas camadas mais profundas de nosso ser, onde o pensamento não tem acesso. [...]*

Suspeito que esse conhecimento sem palavras que chega a nós em raros momentos de nossa vida é inefável e que sua ação vai além da memória que nos deixa.

— ***A. Grothendieck*** *em “Recoltes et Semailles”*

Quando construo, organizo, desobstruo, limpo, ordeno, é o modo "vertente" ***"yang"*** *ou "masculino" do trabalho que dá o tom. Quando exploro às cegas o inapreencível, o informe, o que não tem nome, estou na vertente* ***"yin"*** *ou "feminina" de meu ser.*

Para mim não se trata de querer minimizar ou renegar uma ou outra vertente — ambas essenciais — de minha natureza. A masculina que constroi e engendra e a "feminina" que concebe e abriga as lentas e obscuras gestações. "Sou" uma e outra — ***"yang"*** *e* ***"yin"****, "homem" e "mulher". Mas sei também que a essência mais delicada, mais sutil nos processos criadores se encontra na vertente* ***"yin"****, "feminina" — a vertente humilde, obscura e frequentemente de aparência mais pobre.*

— ***A. Grothendieck*** *em "Recoltes et Semailles"*

Introdução

O *"yin"* e *"yang"* de Grothendieck

"Yang"	*"Yin"*
Razão	Sensibilidade
Reflexão	Instinto
Lógica	Intuição
Método	Inspiração
Abstrato	Concreto
Simples	Complexo
Preciso	Vago
Realidade	Sonho
Definido	Indefinido
Exprimível	Inexprimível
Que tem forma	Informe
Finito	Infinito
Parte	Totalidade
Local	Global

Introdução

Estilo de exposição matemática

Nunca apreciei ler textos de matemática, nem mesmo os mais belos. Minha forma expontânea de aprender matemática sempre foi fazendo-a ou refazendo-a (com ajuda, aqui e ali, de idéias e indicações fornecidas por colegas ou, no pior caso, de livros).

Uma das razões, sem dúvida [. . .] é minha falta de disposição para ler e me informar sobre matemática, mesmo que seja a leitura de livros ou memórias para aprender o ABC de uma teoria "bem conhecida." Na medida do possível, gosto de me informar através da palavra viva de quem está pesquisando o assunto.

A coisa essencial era que Serre sentia intensamente a rica substância atrás de um enunciado que, estando no papel, me deixaria totalmente indiferente. [. . .] está aí talvez o momento crucial de todo o trabalho de descoberta, o momento do "estalo", quando não se tem ainda nenhuma idéia, por mais vaga que seja, de como abordar o desconhecido e como penetrá-lo. É verdadeiramente o momento da "concepção" — o momento a partir do qual um trabalho de gestação pode ser feito, e de fato se faz, se as condições são propícias.

— ***A. Grothendieck*** *em "Recoltes et Semailles"*

Heurística, s.f.

1. Conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas.
2. Procedimento pedagógico pelo qual se leva o aluno a descobrir por si mesmo a verdade que lhe querem inculcar.
3. Ciência auxiliar da história que estuda a pesquisa das fontes.

Fonte: Dicionário Aurélio.

Heurística

Alguns autores eminentes que trataram do assunto

- Arquimedes (c. 287 a.C. – c. 212 a.C.)
- Pappus (c. 290 – c. 350)
- René Descartes (1596-1650)
  - “Règles pour la direction de l’esprit”
- Gottfried Leibniz (1646-1716)
- Leonhard Euler (1707-1783)
- Bernard Bolzano (1781-1848)

Heurística

Alguns autores eminentes que trataram do assunto

- Sigmund Freud (1856-1939)
  - “Jokes and Their Relation to the Unconscious”
- Jacques Hadamard (1865-1963)
  - “The psychology of invention in the mathematical field”
- George Polya (1887-1985)
  - “How to solve it”
  - “Induction and Analogy in Mathematics”
  - “Pattens of Plausible Inference”
- Norbert Wiener (1894-1964)
- Arthur Koestler (1905-1983)
  - “The Sleepwalkers — A History of Man’s Changing Vision of the Universe”
  - “The Act of Creation”
- Antonio Damásio (1944-)
  - “O Erro de Descartes”

HEURÍSTICA

No sétimo livro da sua "coleção", Pappus fala sobre um ramo do estudo que ele denomina analyomenos (tesouro da análise) e que trata do que estamos chamando de heurística.

— ***Pappus*** *"floreceu ±300 d.C."*

Em seu trabalho "Regras para a direção do espírito", Descartes aborda questões referentes ao que estamos considerando como heurística.

— ***René Descartes*** *(1596-1650)*
"Regulæ ad directionem ingenii", (1620-1628)

Não há nada mais importante do que investigar as origens de uma invenção que, na minha opinião, é muito mais interessante do que a própria invenção.

— ***Gottfried W. Leibniz*** *(1646-1716)*
Fragmentos de "A arte da invenção"

O plano mais ambicioso pode ter maior probabilidade de sucesso.

— ***George Pólya*** *(1887-1985)*
Paradoxo do Inventor

"Uma das primeiras proposições desse tipo é um teorema de Euler que afirma que *qualquer polinômio genérico deve tomar valores compostos para pelo menos um valor do argumento.*

O teorema de Euler baseia-se no seguinte lema algébrico: Se $P(x)$ é qualquer polinômio, então o polinômio

$$Q(x) = P[x + P(x)]$$

admite $P(x)$ como fator. Assim, façamos $P(x) = x^2 + 1$, então

$$\begin{aligned} Q(x) &= [x + (x^2 + 1)]^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 + 2x(x^2 + 1) + 1 + \\ &+ x^2 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

A prova do lema geral segue a linha deste exemplo e é bastante formal; deixo-a, portanto, ao leitor."

[. . .]

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}$$

Observe que, "infelizmente", aparece no segundo membro um termo **não divisível** por h.

É possível "consertar" isso?

Ao estudar o triângulo aritmético, criou um método recorrente para calcular a somas das k-ésimas potências do n primeiros números naturais. Vejamos um exemplo simples:

$$(j+1)^2 - j^2 = 1 + \binom{2}{1} j$$

Somando em j, $1 \leq j \leq n$, membro a membro, temos

$$(n+1)^2 - 1 = n + 2\sum_{j=1}^{n} j \implies \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

O caso geral

$$(j+1)^{k+1} - j^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1} j + \binom{k+1}{2} j^2 + \cdots + \binom{k+1}{k} j^k$$

assim

$$(n+1)^{k+1} - 1 = n + \binom{k+1}{1}\sum_{j=1}^{n} j + \binom{k+1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \cdots + \binom{k+1}{k}\sum_{j=1}^{n} j^k.$$

O matemático suiço Jakob Bernoulli (1654-1705) tentou calcular o valor da soma da série

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

Não obtendo êxito, escreveu:

> *"meus esforços para calcular o valor dessa série até agora não tiveram sucesso. Ficarei muito grato, se quem conseguir, comunique-me o resultado".*

Euler observou que:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$$

truncando no termo x^n ficamos com um polinômio do tipo:

$$b_0 - b_1 x^2 + b_2 x^4 - \cdots + (-1)^n b_n x^{2n}$$

Com uma variante no cálculo das relações de Girard, obtemos a fórmula:

$$\frac{b_1}{b_0} = \left(\frac{1}{{\beta_1}^2} + \frac{1}{{\beta_2}^2} + \cdots + \frac{1}{{\beta_n}^2} \right)$$

onde β_i, $1 \leq i \leq n$, são a raízes da equação definida pelo polinômio acima.

Supondo que esta fórmula vale para a equação definida pela série, teríamos a igualdade:

$$\frac{b_1}{b_0} = \left(\frac{1}{{\beta_1}^2} + \frac{1}{{\beta_2}^2} + \cdots + \frac{1}{{\beta_n}^2} + \cdots \right)$$

Continuando...

$$\frac{b_1}{b_0} = \left(\frac{1}{{\beta_1}^2} + \frac{1}{{\beta_2}^2} + \cdots + \frac{1}{{\beta_n}^2} + \cdots \right)$$

Lembrando que as raízes da equação

$$\frac{\sin x}{x} = 0,$$

na qual $b_0 = 1$ e $b_1 = 1/3!$, são da forma $k\pi$ para todo k natural maior que 1 e substituindo na relação acima, obtemos

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \cdots + \frac{1}{n^2\pi^2} + \cdots$$

donde

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots}$$

- **Jean Dieudonné**: LA NOTION DE RIGUEUR *en mathématique*, Mosaique Mathematique, Musée de la Villette.
  - Segundo Dieudonné as palavras "rigor" ou "raciocínio rigoroso" são utilizas a partir do século XVIII (e.g. d'Alembert) e mais frequentemente a partir do século XIX. Reagiam a prática de seus predecessores que falavam "na generalidade da Análise" para justificar afirmações duvidosas.
- **Paradoxos:** lógicos, semânticos e pseudo-paradoxos.

Rigor

Generalidades — continuação (Dieudonné)

Para concluir o que se pode dizer a respeito do rigor na matemática atual? Se nos limitarmos a matemática que utiliza a lógica clássica (e que é a quase totalidade) um raciocínio é rigoroso se ele se reduz a uma cadeia de deduções feitas de acordo com as regras dessa lógica e partindo de um sistema de axiomas explicitado; como essas regras lógicas estão totalmente codificadas, a verificação de uma demonstração é em princípio um trabalho mecânico, desde que ela seja suficientemente explícita; essa tarefa pode ser longa e penosa e exigir o trabalho independente de muitos especialistas quando se trata de uma demonstração que se prolonga por diversas centenas de páginas, o que hoje não é raro; e, para determinadas demonstrações, a verificação exige o uso de computadores, o que introduz um certo elemento de incerteza (é o que ocorre no caso do teorema das quatro cores).

Rigor

Generalidades — continuação (Dieudonné)

É bom que se entenda que quando um matemático imagina uma demonstração nova, o papel de sua "intuição" é preponderante a "parte formal" só aparece em seguida. Alguns consideram essa uma tarefa ingrata e infelizmente indispensável: eles esperam então que alguns de seus colegas ou alunos os substituam nessa atividade o que de fato ocorre no decorrer de alguns meses ou de alguns anos, sobretudo se o resultado é considerado nuito importante. Mas até que a demonstração tenha sido escrita de forma suficientemente explícita e verificada, o resultado permanece incerto: existem no momento diversos exemplos dessa situação.

* * *

Rigor

Lógica Matemática

> *É um erro comum acreditar que o principal interesse da lógica matemática é o pensamento formal. O mais importante é precisar o conceito de formal e assim poder raciocinar matematicamente sobre sistemas formais. Isso acrescenta uma dimensão nova à matemática.*
>
> *Existem pessoas que reconhecidamente foram atraídas para a lógica matemática parcialmente por sua obcessão em querer fazer tudo de forma absolutamente explícita e segura até mesmo para uma inteligência mecânica. Deduções formais parecem oferecer a solução. A habilidade de ser tão formal pode ser útil para escrever programas de computação (incluindo os que servem para instalar linguagens de programação) mas ao fazermos lógica matemática é mais útil ver que a formalização pode ser feita do que fazê-la efetivamente.*
>
> —***Hao Wang***

Na lógica **tradicional** são válidos os seguintes princípios:

1. $\neg\,(p \wedge \neg\, p)$ (princípio da contradição)
2. $p \vee \neg\, p$ (princípio do terceiro excluído)
3. $\neg\,\neg p \iff p$ (princípio da dupla negação)

Na lógica **intuicionista** (1) é válido mas (2) e (3) não são válidos.

Cálculo Proposicional — Esquemas de axiomas

1. $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$
2. $((\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$
3. $\big(((\neg\mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})\big)$

PROBLEMA

O número $x = \left[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$ *é racional.*

(I) *Usando propriedades das potências, calcule* x.

(II) *Provar que existem dois números irracionais* α *e* β *tais que* α^{β} *é racional.*

Rigor
Perguntas

O que se entende por rigor em matemática?

Qual a sua função?

Expontaneidade e Rigor

por Grothendieck, parte primeira

Expontaneidade e rigor são duas vertentes "sombra" e "luz" de uma mesma qualidade indivisível. É do casamento de ambas que nasce aquela qualidade particular do texto, ou do ser, que podemos tentativamente caracterizar como "atributo de veracidade."

Esse rigor se exerce sobre si mesmo zelando para que a delicada "escolha" que ele precisa fazer entre a multidão de coisas que se passam no campo da consciência para separar e decantar incessantemente o significativo ou essencial do fortuito e do acessório para que o processo não se espesse e congele em automorfismos de censura e de complacência. Só nossa curiosidade, a sede que temos de conhecer nos desperta e cria uma vigilância leve e uma vivacidade capaz de confrontar a imensa e onipresente inércia, as "inclinações (ditas) naturais," criadas pelas idéias prontas, expressões de nossos medos e condicionamentos.

Esse mesmo rigor, essa mesma atenção vigilante se dirige tanto para a espontaneidade como também para aquilo que se incorpora para participar dela, de suas inclinações, de tudo que há de natural e distinguilas daquilo que verdadeiramente jorra das camadas profundas do ser, da pulsão original de conhecimento e de ação levando-nos ao encontro do mundo.

Expontaneidade e Rigor

por Grothendieck, parte segunda

Ao nível da escrita, o rigor se manifesta por uma preocupação constante de circunscrever de forma tão precisa e fiel quanto possível, com a ajuda da linguagem, os pensamentos, sentimentos, percepções, imagens, intuições... que se deseja exprimir, sem se contentar com termos vagos ou aproximados quando o que se quer exprimir tem contornos nitidamente delineados, nem usar termos artificialmente precisos (e portanto inadequados) para exprimir algo que permanece envolto em brumas e que é apenas pressentido. Quando tentarmos captá-la num preciso instante, a coisa desconhecida nos revela sua verdadeira natureza como se estivesse a luz do dia se ela é feita para o dia, obedecendo nosso desejo de despojá-la de seus véus de sombra e de bruma. Nosso papel não é querer descrever e fixar o que ignoramos e o que nos escapa, mas humildemente, apaixonadamente, tomar consciência do desconhecido e do mistério que nos cerca de todos os lados.

Isto é, o papel da escrita não é relatar os resultados de uma pesquisa mas sim descrever o próprio processo da pesquisa [...]

Encerramento

Ortega y Gasset em "A pedagogia da contaminação"

A maior parte dos homens vive atenta apenas ao pequeno negócio, ao interesse que tem diante de si: se os deixássemos a sós a vida teria neles cada vez menos pulsações. O pequeno negócio seria cada vez mais, pequeno negócio: o campo visual, cada vez mais fechado e os corações, cada vez mais estreitos. Por isso, é a missão do intelectual e sobretudo do filósofo, proclamar fervorosamente, exasperadamente, a obrigação do esforço espiritual que dilata as almas e potencializa a vida. Diante do homem utilitário terá ele que adotar uma absurda atitude de desinteresse e viver como fogo consumindo-se a si próprio. Esta tem que ser a atitude do filósofo e, por isso, quando aparece um verdadeiro filósofo a humanidade o sente como uma verdadeira ferroada.

Nem é preciso dizer que não pretendo ser esse verdadeiro filósofo, nem mesmo um filósofo qualquer. Somente por uma obrigação administrativa carrego o título de professor de metafísica, uma coisa que não conheço bem e que, mesmo quando bem conhecida, não pode, a rigor, ser ensinada. Convido-os pois a se juntar a mim em não levar a sério este meu encargo administrativo.

Minha pretensão é incomparavelmente mais modesta: contentar-me-ia em andar ao lado de almas mais acomodadas que a minha e introduzir-lhes fermentos de dúvida, ambição e esperança. Havereis notado que, ao estarmos na borda de um lago de águas paradas e observarmos a superfície imóvel, polida e indiferente, onde se refletem nuvens viajantes — nuvens de abril, redondas e barrocas — se apodera de nós uma inquietação e um desejo de romper esse polimento e essa calma fictícia que ocultam a vida efervescente no fundo lodoso. E, sem nos darmos conta, nossa mão apanha uma pedrinha e a atira na água cujo cristal se quebra e vibra, trêmulo e vivo, deixando escapar borbulhos que sobem do fundo como suspiros. Feito isso, nos afastamos ingenuamente satisfeitos. Agradar-me-ia fazer algo, não menos ingênuo, com as almas demasiadamente acomodadas — minhas pretensões, como veis, se esgotam ao chegar a ser um professor de atirar pedrinhas em águas paradas.

Referências Bibliográficas

- **Aristóteles**, *Metafísica*
- **Walter Benjamin**, *The Work of Art in the Age of its Technological Reproducibility*
- **John Berger**, *Ways of Seeing*, [Pelican, 1972]
- **António Damásio**, *O Erro de Descartes*. Companhia Das Letras
- **Tobias Dantzig**, NÚMERO: A linguagem da Ciência, [Zahar Editores, 1970]
- **René Descartes**, *Règles pour la direction de l'esprit*, [Le Livre de Poche, 1999]
- **Ortega y Gasset**, *Mision de la Universidad*, [Revista de Ocidente en Alianza Editorial, 1982]
- **Ortega y Gasset**, *Lições de Metafísica*
- **Ortega y Gasset**, *Papeles sobre Velazquez y Goya* [Revista de Ocidente en Alianza Editorial, 1980]

Referências Bibliográficas

- **John Dewey**, *Como Pensamos*
- **Jacques Hadamard**, The psychology of invention in the mathematical field, [Dover Publications Inc., 1949]
- **G. H. Hardy**, A Mathematician's Apology, [Cambridge University Press, 1976]
- **Arthur Koestler**, *The Sleepwalkers — A history of man's changing Vision of the Universe*, [Penguin Books, 1964]
- **Arthur Koestler**, *The Act of Creation*, [Picador — Pan Books]
- **J. E. Littlewood**, *A Mathematician's Miscellany*
- **James J. O'Donnell**, *Avatars of the Word*, [Harvard University Press, 1998]
- **Norbert Wiener**, *The Human Use of Human Beings*, [Sphere Books, ltd. 1968]
- **Unknown Author**, *I Ching — book of changes*, [Bantam Books, 1964]

Referências Bibliográficas

- **Blaise Pascal**, *Pensées*, [1669]
- **Sigmund Freud**, *Jokes and Their Relation to the Unconscious*, [Penguin Books, 1976]
- **Henri Bergson**, *Le Rire — essai sur la signification du comique*, [Press Universitaires de France, 1975]
- **George Polya**, *How to solve it*, [Princeton University Press, 1945]
- **George Polya**, *Induction and Analogy in Mathematics*, [Princeton University Press, 1973]
- **George Polya**, *Pattens of Plausible Inference*, [Princeton University Press, 1968]
- **Mário Schenberg**, *Pensando a Física*, [Editora Brasiliense, 1985]
- **Erwin Schroendinger**, *Science Theory and Man*
- **Unknown Author**, *The Secret of Golden Flower — the chinese book of life*, [Routledge & Kegan Paul, 1979]