

# Aprender, Ensinar, Avaliar: Reflexões e Reminiscências

Paulo Ferreira Leite

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – USP

30 de junho de 2009



# Introdução

## Palavras iniciais

- Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827)
- Maria Montessori (1870-1952)
- John Watson (1878-1958)
- Wolfgang Köhler (1887-1967)
- Lev Vygotsky (1896-1934)
- Jean Piaget (1896-1980)
- John Dewey (1859-1952)
- Burrhus Frederic Skinner (1904-1990)



***“Todo homem, por natureza, deseja saber”***

*–Aristóteles, Metafísica*

*Todo homem, por natureza, deseja saber. Uma evidência disso é o deleite que nossos sentidos nos proporcionam. Independentemente de sua utilidade, nós os amamos; e acima de todos os outros, amamos a visão. . . . A razão é que esse sentido, mais do que todos os outros, traz-nos conhecimento e ilumina as diferenças entre as coisas.*



# Aprender

E. Schroedinger, (1887-1961), prêmio Nobel em física 1933

*O objetivo principal da ação, tanto no homem como em qualquer outra espécie, é satisfazer suas necessidades e preservar a vida. A não ser que as condições de vida sejam extremamente desfavoráveis há sempre uma sobra de energia. ... No caso do homem esse mesmo excesso de energia leva ao esporte e às brincadeiras. ... entre essas brincadeiras devo incluir todo tipo de atividade intelectual bem como a Ciência<sup>1</sup> – senão toda a Ciência, pelo menos sua vanguarda, isto é, a pesquisa científica.*

---

<sup>1</sup>A palavra “ciência” é aqui a tradução usual de *Wissenschaft* que inclui literatura, arqueologia, filologia, história, etc.



*Uma das forças mais poderosas que impulsiona esse desejo de aprender é o que chamamos de **curiosidade**.*



*Na linguagem comum essa palavra tem dois significados principais:*

- *Desejo de aprender, conhecer, investigar.*
- *Desenho de conhecer os segredos e negócios alheios, bisbilhotice.*

*A psicologia nos ensina que a curiosidade humana passa essencialmente por três fases:*



### Primeira fase:

*Vai do nascimento até o momento em que a criança começa a falar. As manifestações de curiosidade estão muito longe do ato de pensar. É um transbordamento de vitalidade, resultado de um excedente de energia orgânica. A criança pega, cheira, olha, degusta.*



### Segunda fase:

*A curiosidade se desenvolve e se modifica através de estímulos sociais. A criança faz uma enorme quantidade de perguntas que lhe permitem aumentar e compartilhar um enorme cabedal de experiência.*



### Terceira fase:

*A curiosidade transcende o plano orgânico e social e começa a converter-se em algo intelectual. Esse processo depende de condições favoráveis e pode transformar-se em encanto e deslumbramento.*



*Os gregos antigos representavam Minerva, a deusa das artes e da sabedoria por uma coruja, o pássaro que tem os olhos arregalados de espanto, assombro e deslumbramento pelo mundo. A tradição grega atribui a esse sentimento a criação da Filosofia.*



Reminiscências...



*O sociólogo do início do século XX, Max Weber, rompeu de forma decisiva com o otimismo iluminista em relação à ciência e à tecnologia. No domínio das idéias, afirma ele, o espírito científico leva a um “desencanto do mundo”, criando um abismo entre nosso desejo de significado para a vida e o mundo sem sentido dos processos causais e os eventos aleatórios que a ciência oferece em substituição aos mundos míticos de outrora. No domínio da vida produtiva a tecnologia industrial substituiu os ritmos da natureza e as excelências da habilidade no trabalho artesanal pela gaiola de ferro do ambiente de fábrica.*

–Leonard Waks



## *Como se perde a curiosidade:*



## *Como se perde a curiosidade:*

- Rotina



## *Como se perde a curiosidade:*

- Rotina
- Dogmatismo

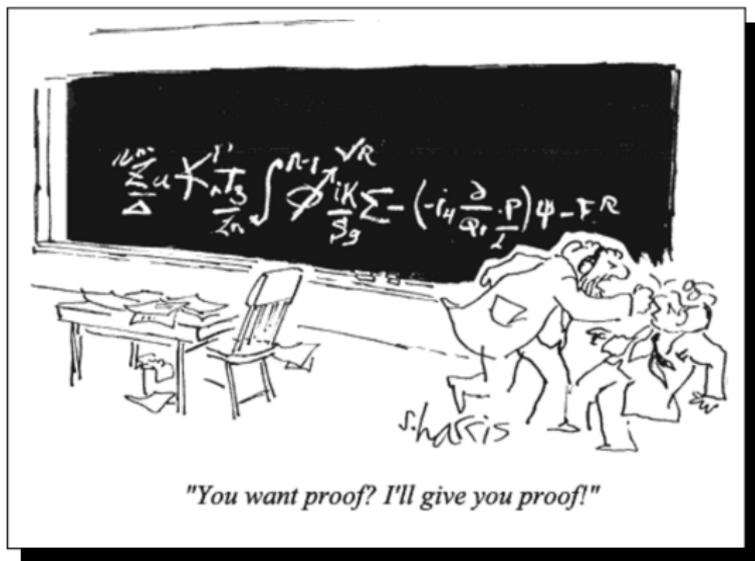


# Aprender

Curiosidade: transição da curiosidade infantil para a curiosidade intelectual

## Como se perde a curiosidade:

- Rotina
- Dogmatismo
- Ambiente pouco estimulante ou repressivo



# Aprender

Curiosidade: transição da curiosidade infantil para a curiosidade intelectual

***Como se cultiva a curiosidade:***



## *Como se cultiva a curiosidade:*

- Novidade



## *Como se cultiva a curiosidade:*

- Novidade
- Inesperado



## ***Como se cultiva a curiosidade:***

- Novidade
- Inesperado
- Surpresa



- Origem

- *History of Education*, Encyclopãdia Britannica, Vol 7, p. 983-1018, 1971.
- *Paideia, A Formação do Homem Grego*, Werner Jaeger, Editora Herder, São Paulo.
- *O desaparecimento da infância*, Neil Postman, Ed. Graphia, Rio de Janeiro, 1999.



# Ensinar

Em *Differential Germs and Catastrophes*, T. Bröcker, CUP, 1975 (Tradução)

Era uma vez um homem  
que aprendeu a matar dragões  
e deu tudo de si  
para dominar a arte.

Após três anos  
estava totalmente preparado mas,  
infelizmente, não apareceu oportu-  
nidade  
para exercitar suas habilidades.

–Dschuang Dsi.



**Isso o levou a ensinar a matar dragões.**

René Thom<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Medalha fields, 1958.



- Aprender a ler
- Formação e capacitação
- Sociabilização do indivíduo



- Neil Postman (1931-2003)
  - *Desaparecimento da infância*
  - *O fim da escola*
- Marshall McLuhan (1911-1980)
  - *Gutenberg's Galaxy*
  - *Understanding media*
  - *The media is the message*
- Walter Benjamin (1892-1940)
  - *A obra de arte na era de sua reprodutibilidade técnica*
- Jean Baudrillard (1929-2007)
  - Alguns artigos



*Dia a dia cresce em mim a suspeita de que nada do que realmente mereça ser aprendido possa, de fato, ser ensinado. Por maiores que sejam os cuidados do mestre haverá sempre um último acerto, um derradeiro esclarecimento, uma última e mais saborosa gota do caldo científico ou artístico que não nos poderá ser transmitido e que teremos que conquistar com doloroso esforço próprio. E esse último acerto, essa derradeira iluminação, essa gota mais saborosa e essencial, representa tudo na ciência, na arte e na vida. As outras coisas estão aí apenas como recipiente e artifício para evitar que o valor essencial evapore e se desvaneça.*

—Ortega Y Gasset (1883 - 1955)  
*La Pedagogia de la Contaminacion*

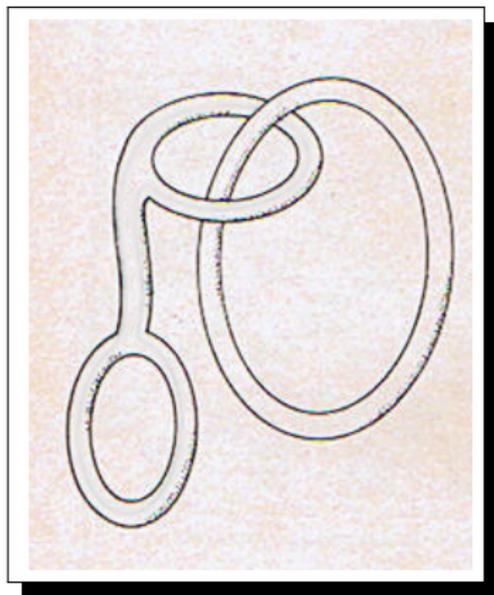
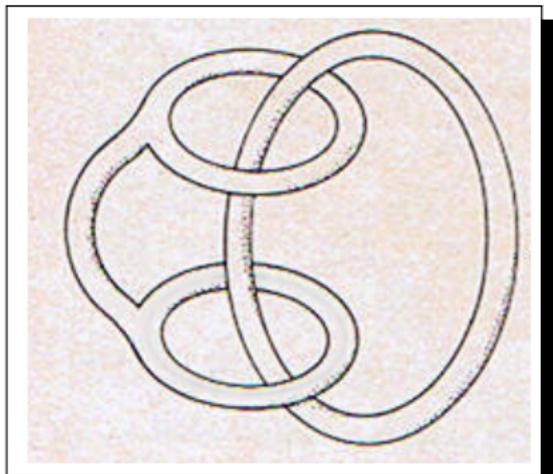


*Bons pesquisadores são, com frequência, professores médios; maus pesquisadores são, quase sempre, professores médios. A razão pela qual existem professores médios é que existem pessoas médios . . . que não tem nada a oferecer a seus estudantes além do assunto que ensinam. Falta-lhes joie de vivre (alegria de viver), entusiasmo e curiosidade para aprender. Seriam médios em qualquer profissão.*

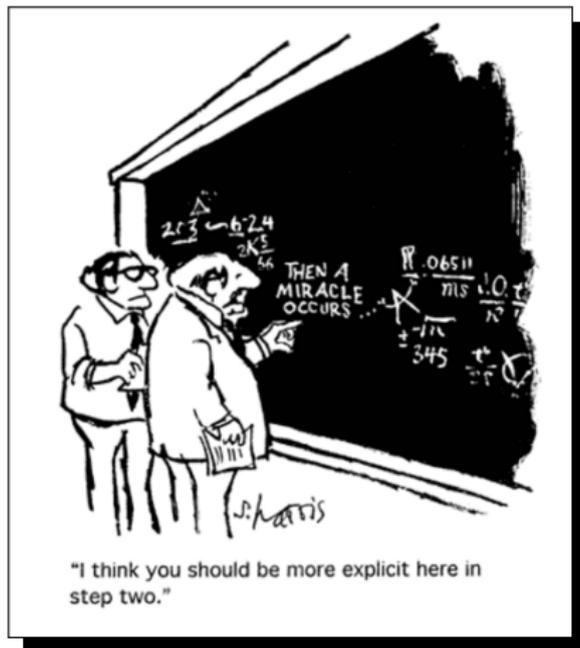
*–Herbert Robbins  
entrevista a Warren Page, Mathematical People  
– Profiles and Interviews, Birkhauser, 1986.*



É possível deformar um *link* no outro?



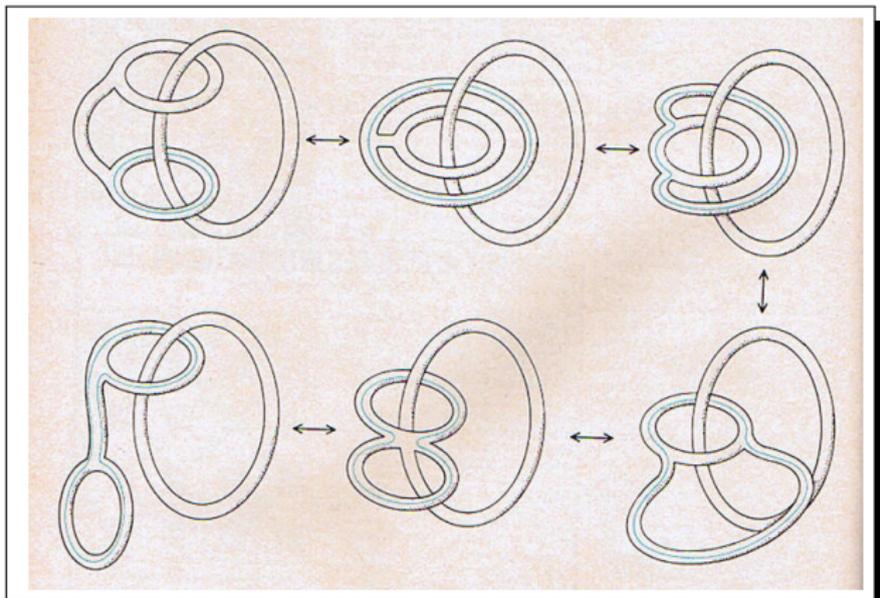
E então um milagre acontece...



"I think you should be more explicit here in step two."



Sim, estes *links* são homotopicamente equivalentes!



*Leia os mestres não os alunos.*

*–N.H. Abel<sup>2</sup> (1802 - 1829)*

---

<sup>2</sup>Niels Henrik Abel, grande matemático noruegues.



*Nunca apreciei ler textos de matemática, nem mesmo os mais belos. Minha forma espontânea de aprender matemática sempre foi fazendo-a ou refazendo-a (com ajuda, aqui e ali, de idéias e indicações fornecidas por colegas ou, no pior caso, de livros).*

–A. Grothendieck<sup>3</sup> (1928 - )

*Recoltes et Seimalles*

---

<sup>3</sup>Medalha Fields, 1966



*Uma das razões, sem dúvida ... é minha falta de disposição para ler e me informar sobre matemática, mesmo que seja a leitura de livros ou memórias para aprender o ABC de uma teoria “bem conhecida.” Na medida do possível, gosto de me informar através da palavra viva de quem está pesquisando o assunto.*

*–A. Grothendieck*

*Recoltes et Seimalles*



*A coisa essencial era que Serre sentia intensamente a rica substância atrás de um enunciado que, estando no papel, me deixaria totalmente indiferente. . . . está aí talvez o momento crucial de todo o trabalho de descoberta, o momento do “estalo”<sup>4</sup>, quando não se tem ainda nenhuma idéia, por mais vaga que seja, de como abordar o desconhecido e como penetrá-lo. É verdadeiramente o momento da “concepção” – o momento a partir do qual um trabalho de gestação pode ser feito, e de fato se faz, se as condições são propícias.*

–A. Grothendieck  
*Recoltes et Seimalles*

---

<sup>4</sup>Em francês, *ça fait tilt*.



### Problema (IMO - 1959)

*Prove que a fração*

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

*é irredutível para todo número natural  $n$ .*

### Problema (FUVEST)

*Dados dois pontos  $A$  e  $B$ , determinar, utilizando apenas um compasso, um ponto  $C$  de tal forma que  $B$  seja ponto médio do segmento  $\overline{AC}$ .*



*É um assunto de extrema importância, muito controverso e a respeito do qual existe uma vasta bibliografia. São duas as questões principais:*

- *O que deve ser avaliado*
- *Como deve ser feita a avaliação*



### Teoria de gestão de qualidade

#### Axioma (da qualidade)

*A qualidade experimentada pelo cliente é igual à pior qualidade da cadeia cliente/fornecedor interno.*



### Teoria de gestão de qualidade

#### Axioma (da qualidade)

*A qualidade experimentada pelo cliente é igual à pior qualidade da cadeia cliente/fornecedor interno.*

### Adaptação ao caso acadêmico

#### Axioma (da avaliação)

*Os aspectos negativos tendem a pesar mais do que os positivos na avaliação.*



A avaliação acadêmica abrange uma vasta gama de situações diferentes, entre elas, citamos as seguintes:

- 1 Concurso de ingresso na carreira acadêmica.
- 2 Concursos para progressão na carreira acadêmica.
- 3 Avaliação de monografias, dissertações, teses, etc.
- 4 Avaliação de alunos nos cursos de graduação e pós-graduação.
- 5 Avaliação dos professores feita por alunos dos cursos de graduação e pós-graduação.
- 6 Exames vestibulares.
- 7 Avaliação de livros didáticos.



*Ao avaliar o aluno, o professor pode optar por duas linhas distintas<sup>5</sup>:*

- *Verificar se o avaliado conhece alguma coisa em profundidade.*
- *Procurar identificar assuntos que o avaliado desconhece.*

---

<sup>5</sup>O Prof. Peter Hilton chamou-nos a atenção para esse importante aspecto da avaliação.





Disciplina: MAT0134 / 49 - Introducao a Algebra Linear

Docente:	Muito Fraco (1)		Fraco (2)		Regular (3)		Bom (4)		Muito Bom (5)		Desvio Média	Desvio Padrão	Não sei/ se aplica (9)	Total		
	n.	%	n.	%	n.	%	n.	%	n.	%					n.	%
1 Você foi informado adequadamente sobre os objetivos da disciplina		0,0		0,0		0,0	2	6,1	4	12,1	4,67	0,47		0,0	6	
2 Há integração desta disciplina com as demais do Curso		0,0		0,0		0,0	3	9,1	3	9,1	4,50	0,50		0,0	6	
3 A carga horária atribuída é adequada		0,0	1	3,0		0,0	4	12,1	1	3,0	3,83	0,90		0,0	6	
4 Você considera esta disciplina importante para sua formação		0,0		0,0		0,0	2	6,1	4	12,1	4,67	0,47		0,0	6	
5 Qual é a sua avaliação global para esta disciplina		0,0		0,0		0,0	3	9,1	3	9,1	4,50	0,50		0,0	6	
5 Consultei a bibliografia indicada		0,0		0,0		0,0	3	9,1	3	9,1	4,50	0,50		0,0	6	
7 Fiz os trabalhos propostos		0,0		0,0	1	3,0	3	9,1	2	6,1	4,17	0,69		0,0	6	
9 Tentei resolver dúvidas em aula		0,0	2	6,1	2	6,1	2	6,1	0	0,0	3,00	0,82		0,0	6	
9 Fui assíduo (frequência às atividades da disciplina)		0,0		0,0		0,0	4	12,1	2	6,1	4,33	0,47		0,0	6	
10 Usei adequadamente o horário atribuído as aulas		0,0		0,0		0,0	5	15,2	1	3,0	4,17	0,37		0,0	6	
11 Procurei o professor fora do horário das aulas		2	6,1		0,0	1	3,0	2	6,1	1	3,0	3,00	1,53		0,0	6
12 Tratei o professor de forma respeitosa		0,0		0,0		0,0	1	3,0	5	15,2	4,83	0,37		0,0	6	
13 Houve coerência entre os objetivos propostos e os conteúdos das aulas		0,0		0,0		0,0	4	12,1	2	6,1	4,33	0,47		0,0	6	
14 Os conteúdos foram ministrados de forma clara		0,0		0,0		0,0	2	6,1	4	12,1	4,67	0,47		0,0	6	
15 Mantém continuidade lógica dos conteúdos ministrados		0,0		0,0		0,0	1	3,0	5	15,2	4,83	0,37		0,0	6	
16 A forma de ensinar estimulou o interesse pela matéria		0,0		0,0	2	6,1	1	3,0	3	9,1	4,17	0,90		0,0	6	
17 Houve coerência entre o conteúdo ministrado e o exigido nas avaliações		0,0		0,0		0,0	2	6,1	4	12,1	4,67	0,47		0,0	6	
18 Estimulou a formação do espírito crítico		0,0		0,0		0,0	2	6,1	4	12,1	4,67	0,47		0,0	6	
9 A bibliografia ajudou no entendimento do conteúdo ministrado e avaliações		0,0	1	3,0	1	3,0	3	9,1	1	3,0	3,67	0,94		0,0	6	
10 Os trabalhos propostos contribuíram para aprendizagem dos conteúdos		0,0		0,0		0,0	3	9,1	3	9,1	4,50	0,50		0,0	6	
11 Mostrou-se disposto a resolver dúvidas em aulas		0,0		0,0		0,0	1	3,0	4	12,1	4,80	0,40	1	3,0	6	
12 Foi assíduo (Estava presente às aulas?)		0,0		0,0		0,0	1	3,0	5	15,2	4,83	0,37		0,0	6	
13 Usou adequadamente o horário atribuído às aulas		0,0		0,0		0,0	1	3,0	4	12,1	4,80	0,40	1	3,0	6	
14 Dispôs-se a atender os alunos fora do horário das aulas		0,0		0,0		0,0	1	3,0	4	12,1	4,80	0,40	1	3,0	6	
15 Incentivou atividades acadêmicas fora da sala de aula		0,0	1	3,0	1	3,0	2	6,1	1	3,0	3,60	1,02	1	3,0	6	
16 Tratou os alunos de forma respeitosa		0,0		0,0	1	3,0	1	3,0	4	12,1	4,50	0,76		0,0	6	

Questionários	Total	%	Grupo de Questões:	PROFESSOR		DEPARTAMENTO		UNIDADE		USP	
				Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
Válidos	6	16,2	Disciplina	4,43	0,31	3,88	0,80	3,88	0,79	4,00	0,55
Em branco	27	81,8	Auto-avaliação	4,00	0,27	3,80	0,70	3,80	0,69	3,99	0,54
			Didática	4,50	0,27	3,88	0,84	3,84	0,79	3,95	0,58



### Questão (FUVEST)

*Uma caixa d'água cúbica, cujas arestas medem um metro, está completamente cheia. Se retirarmos um litro de água da caixa, o nível da água baixará*

- a) *um milímetro;*
- b) *um centímetro;*
- c) *cinco centímetros;*
- d) *cincoenta centímetros;*
- e) *um metro.*



## Questão (FUVEST - 1983)

O número  $x = \left[ (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \right]^{\sqrt{2}}$  é racional.

- i) Usando propriedades das potências, calcule  $x$ .
- ii) Provar que existem dois números irracionais  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\alpha^\beta$  é racional.



*Com frequência os livros didáticos apresentam demonstrações, exemplos, ilustrações gráficas que podem induzir o aluno a uma visão restrita e até mesmo deformada do assunto abordado.*



### Exemplo (Relações de Girard para equações de segundo grau)

Se  $x_1$  e  $x_2$  são raízes da equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , valem as fórmulas:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad e \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$



Primeira versão.

Da fórmula de Báskara,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

somando e multiplicando, obtém-se as relações desejadas. □



### Princípio (do polinômio identicamente nulo)

*Um polinômio  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  é identicamente nulo se, e somente se, todos os seus coeficientes são nulos.*

### Corolário (princípio de identidade de polinômios)

*Dois polinômios são idênticos se, e somente se, eles tem os mesmos coeficientes.*



### Segunda versão.

Se  $x_1$  e  $x_2$  são raízes do polinômio  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , então

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

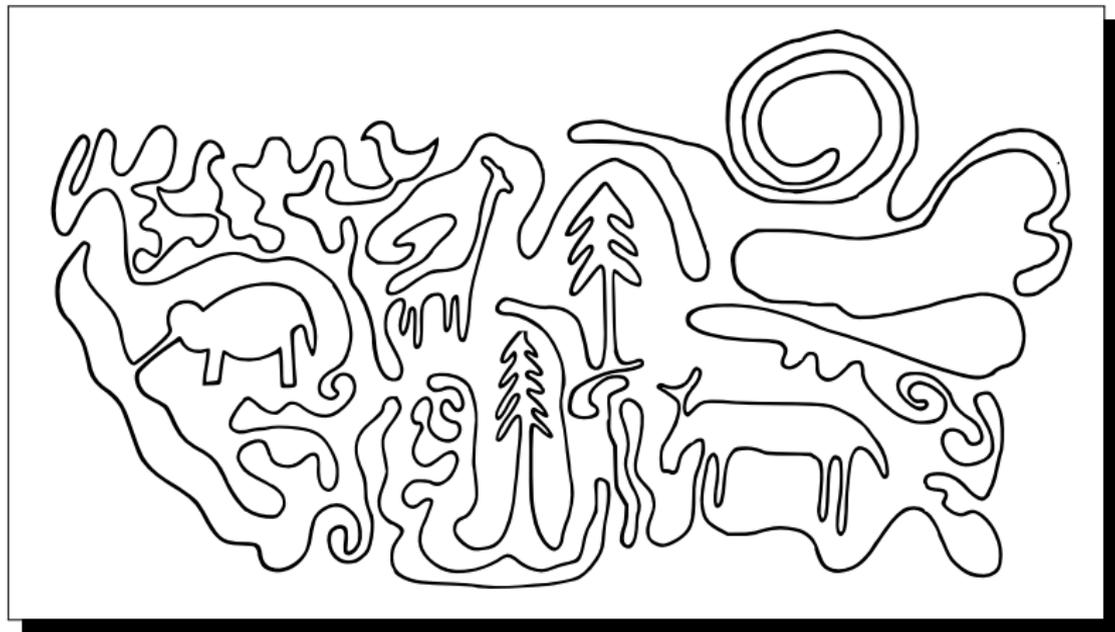
i.e.,

$$p(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a(x_1 x_2).$$

Pelo princípio de identidade de polinômios, temos as relações desejadas. □



## Curva de Jordan



## Questão

*Em seu artigo Geometria e experiência, A. Einstein discute as relações entre a matemática e o mundo físico.*

*Explique o que o autor entende, neste artigo, por **geometria axiomática pura** e por **geometria prática**. Como essas geometrias se relacionam com o mundo físico? Qual a importância que Einstein atribui ao método axiomático? Você acha que a discussão desse assunto é relevante para um professor de matemática?*



## Questão

*Defina o plano de Moulton e prove que ele satisfaz os axiomas de incidência do plano euclidiano. Enuncie o teorema de Desargues e mostre, através de uma figura, que ele não é válido no plano de Moulton.*



## Questão

*Descreva as principais características e diferenças entre as formas de Euclides, Hilbert e Birkhoff fundamentarem a geometria euclidiana. Discuta, em particular, os axiomas da régua e do transferidor. De que forma o conhecimento dessas diversas formas de fundamentar a geometria pode auxiliar o professor na organização de um curso de geometria.*



# Encerramento

*Finis coronat opus*

