MAT-230 Diurno – 1ª Folha de Exercícios

Prof. Paulo F. Leite

agosto de 2009

1 Problemas de Geometria

1. Num triângulo isósceles a mediana, a bissetriz e a altura relativas à base coincidem.

2. Sejam A e B dois pontos distintos. Mostre que o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos pontos A e B é uma reta perpendicular à reta AB que intersepta o segmento AB em seu ponto médio. Essa reta chama-se *mediatriz* do segmento AB.

3. Prove que as tres mediatrizes de um triângulo se encontram num ponto.

4. Prove que as tres alturas de um triângulo se encontram num ponto.

5. Se no quadrilátero $ABCD$ estiverem verificadas as congruências

$$AB \cong AD \quad \text{e} \quad BC \cong DC$$

   as diagonais AC e BD serão perpendiculares e se interseptam num ponto M que é ponto médio do segmento BD.

6. Suponha que duas circunferências C e C' se interseptam nos pontos P e P'. Prove que esses pontos são simétricos em relacão à reta definida pelos centros dessas circunferências.

7. Em qualquer triângulo a mediana traçada por um dos vértices é equidistante dos outros dois vértices.

8. Prove que as três medianas de um triângulo ABC se encontram num ponto.

9. Prove que as três bissetrizes de um triângulo ABC se encontram num ponto.

10. São dados no plano uma reta r e dois pontos A e B situados em um dos semiplanos determinados por r.

    (a) Determinar um ponto C sobre a reta r de tal forma que a soma dos comprimentos dos segmentos AC e CB seja mínima.

    (b) Seja P um ponto da perpendicular à reta r passando por C situado no mesmo semiplano dos pontos A e B. Prove que os ângulos $A\hat{C}P$ e $B\hat{C}P$ são congruentes.

11. Suponha dado um ponto P sobre o lado BC de um triângulo acutângulo ABC. Determinar os pontos B' no lado AC e C' no lado AB de tal forma que o perímetro do triângulo $PB'C'$ seja mínimo.

12. Considere um ponto P sobre o lado BC de um triângulo acutângulo ABC. Sejam P' e P'', respectivamente, os pontos simétricos do ponto P em relação aos lados AB e AC do triângulo ABC. Determinar a posição do ponto P sobre o lado AB na qual o comprimento do segmento $P'P''$ é mínimo.

13. Inscrever num triângulo acutângulo ABC um triângulo de perímetro mínimo.

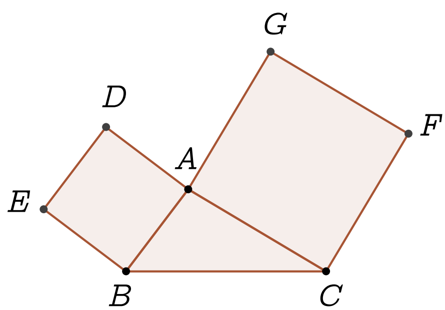
14. (Problema de **Fermat (1601 - 1665)**) Considere um triângulo ABC. Determinar um ponto P do plano de tal forma que a soma $AP + BP + CP$ dos comprimentos dos segmentos indicados seja mínima.

15. Suponha dados numa circunferência de raio duas cordas AB e AC. Prove que se A' é o simétrico do ponto A em relação à reta BC os comprimentos das cordas e do segmento AA' satisfazem a relação

$$AB.AC = rAA'$$

Mostre que esse fato fornece um método para calcular uma quarta proporcional utilizando apenas um compasso.

16. Sobre os lados AB e AC de um triângulo ABC constroem-se dois quadrados como indicado na figura ao lado. Provar que a altura relativa ao vértice A do triângulo ABC passa pelo ponto de intersecção das retas BF e CE.



2 Construções com um Compasso Euclidiano.

Atualmente utilizamos o compasso não apenas para traçar circunferências de centro conhecido e passando por um ponto dado como também para transportar segmentos

1. Dividir uma circunferência em seis partes iguais.

2. Dados dois pontos distintos A e B, determinar um ponto C tal que B seja ponto médio do segmento AC.

3. Suponha dados os pontos A, B e C, não alinhados. Construir o ponto C', simétrico do ponto C em relação à reta AB.

4. Descreva uma maneira de verificar se tres pontos distintos A,B e C pertencem a uma mesma reta.

5. Dados os pontos A e B, contruir pontos C e D tais que $AC = \sqrt{2}AB$ e $AD = \sqrt{3}AB$.

6. Dados dois pontos distintos A e B, construir um quadrado de lado AB.

7. Dados dois pontos distintos A e C, construir um quadrado que tenha o segmento AC como diagonal.

8. Dados dois pontos distintos A e B construir o ponto médio do segmento AB.

9. São dados todos os pontos de uma circunferência cujo centro não é conhecido. Determinar o centro dessa circunferência, sabendo-se que o seu raio é congruente a um segmento dado.

10. Suponha dados os pontos A, B e C, não alinhados. Construir pelo ponto C uma reta perpendicular à reta AB. Determinar o ponto de intersecção dessa perpendicular com a reta AB.

11. São dados dois pontos distintos A e B. Construir um ponto C tal que a razão entre os segmentos AC e CB seja $1/n$ onde n é um número natural.

12. São dados dois pontos distintos A e B. Construir um ponto C tal que a razão entre os segmentos AC e CB seja k/n onde k e n são números naturais.

13. Dados tres pontos não colineares A, B e C, constuir um paralelogramo $ABCD$.

14. Transportar um segmento AB para um ponto C.

15. Prove que o compasso euclidiano permite efetuar as mesmas construções que o compasso moderno.

16. São dados três pontos A, B e P, não alinhados. Construir por P uma reta paralela à reta AB.

17. Suponha dados uma circunferência C, seu centro O e dois pontos A e B tais que a reta AB intersepta a circunferência mas não passa pelo seu centro. Determine os pontos de intersecção da reta AB com a circunferência.

18. Dado um arco de circunferência e seu centro, determine o ponto médio desse arco.

19. Suponha dados uma circunferência C, seu centro O e dois pontos A e B tais que a reta AB passa pelo centro O da circunferência. Determine os pontos de intersecção da reta AB com a circunferência.

20. Dividir uma circunferência em dez partes iguais.

21. Determine o centro de uma circunferência da qual se conhece apenas um arco.

22. Dados tres segmentos medindo, respectivamente, a, b e c, construir um segmento de comprimento d tal que $a/b = c/d$.

23. Sejam A,B, C e D quatro pontos distintos tais que as retas AB e CD sejam concorrentes. Determine o ponto de encontro das retas AB e CD.

24. O matemático dinamarques **George Mohr (1640- 1697)** publicou em **1672** um pequeno livro intitulado *Euclides Danicus* (*Euclides dinamarques*) no qual mostra que qualquer construção feita com régua e compasso pode ser realizada utilizando-se apenas um compasso. Sua publicação passou despercebida e caiu no esquecimento. Mais de um século depois, em 1797, um matemático (e poeta) italiano, **Lorenzo Mascheroni (1780 - 1800)** redescobriu esse fato, e o publicou no livro *La Geometria del Compasso*, que dedicou a **Napoleão**. Hoje esse resultado é conhecido como **teorema de Mohr-Mascheroni**.

    Demonstre esse resultado.