

# A Implausível Eficácia da Matemática nas Ciências Naturais

EUGENE F. WIGNER  
Princeton University

“A matemática, apropriadamente vista, é dotada não somente de verdade, mas de uma beleza suprema, uma beleza fria e austera, como a de uma escultura, sem suplicar a nenhuma parte de nossa fraca natureza, sem as deslumbrantes armadilhas da pintura e da música, por ora sublimemente pura e susceptível a uma severa perfeição tal qual somente a maior das artes pode revelar. O verdadeiro espírito de deleite, a exaltação, o senso de ser mais que Homem, que é o crivo da mais alta excelência, é encontrada na matemática tão seguramente quanto na poesia.”

—BERTRAND RUSSELL, *Estudo da Matemática*

Existe uma história a respeito de dois amigos, colegas de classe no colégio, falando sobre suas profissões. Um deles tornou-se um estatístico e estava trabalhando com estudos populacionais. Ele mostrou uma publicação ao seu antigo colega de classe. A publicação começava, como de hábito, com a distribuição gaussiana e o estatístico explicou ao colega o significado dos símbolos para a população real, para a população média e assim por diante. Seu colega se mostrava um pouco incrédulo e parecia não estar certo de que não estava sendo vítima de uma brincadeira. “Como você pode saber isso?” foi sua pergunta. “E o que é este símbolo aqui?” “Ah,” disse o estatístico, “isso é  $\pi$ .” “O que é isso?” “A razão entre a circunferência do círculo e seu diâmetro.” “Agora você está levando a brincadeira longe demais,” disse o colega, “certamente a população não tem nada a ver com a circunferência de um círculo.”

Nossa inclinação natural é sorrir diante

# The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences

“Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty, a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than Man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as in poetry.”

—BERTRAND RUSSELL, *Study of Mathematics*

There is a story about two friends, who were classmates in high school, talking about their jobs. One of them became a statistician and was working on population trends. He showed a reprint to his former classmate. The reprint started, as usual, with the Gaussian distribution and the statistician explained to his former classmate the meaning of the symbols for the actual population, for the average population, and so on. His classmate was a bit incredulous and was not quite sure whether the statistician was pulling his leg. “How can you know that?” was his query. “And what is this symbol here?” “Oh,” said the statistician, “this is  $\pi$ .” “What is that?” “The ratio of the circumference of the circle to its diameter.” “Well, now you are pushing your joke too far,” said the classmate, “surely the population has nothing to do with the circumference of the circle.”

Naturally, we are inclined to smile

da simplicidade desse ponto de vista. No entanto, sempre que ouço essa história, sou tomado por um sentimento sinistro pois na reação do colega do estatístico não há nada mais que uma manifestação de puro e simples bom senso. Fiquei ainda mais confuso quando, alguns dias mais tarde, alguém expressou a mim seu espanto<sup>1</sup> com o fato de que fazemos escolhas muito restritas quando escolhemos os dados que vamos utilizar para testar nossas teorias. “Como podemos saber que não é possível, levando-se em conta o que havíamos desprezado e desprezando o que havíamos considerado, construir uma nova teoria, em tudo diferente da que temos mas que, tanto quanto ela, é capaz de explicar um grande número de fatos significativos”. Temos que admitir que não existe nenhuma evidência definitiva de que isso não é possível.

1 A observação a ser citada foi feita a mim por F. Werner na época em que era estudante em Princeton.

2 The remark to be quoted was made by F. Werner when he was a student in Princeton.

As duas histórias precedentes ilustram duas questões principais que são o assunto do presente discurso. A primeira delas é que os conceitos matemáticos aparecem em situações totalmente inesperadas. Além disso, eles permitem, com frequência, descrições, surpreendentemente próximas e precisas, dos fenômenos em questão. A segunda é que, exatamente por causa das circunstâncias descritas e também por não entendermos as razões dessa utilidade, não podemos saber se a teoria formulada em termos desses conceitos matemáticos é a única apropriada. Estamos numa situação parecida com a do homem que recebeu um molho de chaves e que, tendo de abrir seguidamente diversas portas, sempre encontra, na primeira ou na segunda tentativa, a chave certa. Esse fato o torna cético em relação à unicidade da correspondência entre chaves e portas.

Muito do que será dito a respeito dessas questões não será novidade; provavelmente já ocorreu, de uma forma ou de outra, para a maioria dos cientistas. Meu

about the simplicity of the classmate's approach. Nevertheless, when I heard this story, I had to admit to an eerie feeling because, surely, the reaction of the classmate betrayed only plain common sense. I was even more confused when, not many days later, someone came to me and expressed his bewilderment<sup>2</sup> with the fact that we make a rather narrow selection when choosing the data on which we test our theories. “How do we know that, if we made a theory which focuses its attention on phenomena we disregard and disregards some of the phenomena now commanding our attention, that we could not build another theory which has little in common with the present one but which, nevertheless, explains just as many phenomena as the present theory?” It has to be admitted that we have no definite evidence that there is no such theory.

The preceding two stories illustrate the two main points which are the subjects of the present discourse. The first point is that mathematical concepts turn up in entirely unexpected connections. Moreover, they often permit an unexpectedly close and accurate description of the phenomena in these connections. Secondly, just because of this circumstance, and because we do not understand the reasons of their usefulness, we cannot know whether a theory formulated in terms of mathematical concepts is uniquely appropriate. We are in a position similar to that of a man who was provided with a bunch of keys and who, having to open several doors in succession, always hit on the right key on the first or second trial. He became skeptical concerning the uniqueness of the coordination between keys and doors.

Most of what will be said on these questions will not be new; it has probably occurred to most scientists in one form or another. My principal aim is to illuminate it

principal objetivo será iluminar a questão de diversos ângulos. O primeiro aspecto a ser considerado é que a enorme utilidade da matemática para as ciências naturais é algo que beira o mistério e que não pode ser racionalmente explicado. Em segundo lugar, é exatamente essa misteriosa utilidade dos conceitos matemáticos que levanta a questão da unicidade de nossas teorias físicas. Para tratar da primeira questão, que a matemática desempenha uma função na física cuja importância ultrapassa o razoável, será útil dizer alguma coisa sobre a questão “O que é a matemática?” e a seguir sobre “O que é a física?” e, em seguida, sobre como a matemática aparece nas teorias físicas e, finalmente, sobre a razão do sucesso da matemática ao tratar com a física ser tão desconcertante. Muito menos se dirá sobre a segunda questão: a unicidade das teorias físicas. Uma resposta adequada para esta questão exigiria um trabalho teórico e experimental que até hoje ainda não foi realizado.

O QUE É A MATEMÁTICA? Alguém disse, certa vez, que filosofia é o mau uso de uma terminologia inventada exatamente com esse propósito.<sup>1</sup> Nessa mesma linha, eu diria que a matemática é a ciência de engenhosas operações com regras e conceitos inventados exatamente com esse propósito. A principal ênfase está na invenção dos conceitos. A matemática veria esgotar rapidamente seus teoremas interessantes se eles fossem formulados apenas em termos dos conceitos que já apareceram nos postulados. Além disso, apesar de ser inquestionável que os conceitos da matemática elementar, particularmente os da geometria elementar, são formulados para descrever entidades que são diretamente sugeridas pelo mundo real, o mesmo não parece ser verdadeiro para os conceitos mais avançados, em particular para os conceitos que desempenham um papel fundamental para a física. Assim, as regras para operar com pares de números são obviamente formuladas para fornecer os mes-

from several sides. The first point is that the enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and that there is no rational explanation for it. Second, it is just this uncanny usefulness of mathematical concepts that raises the question of the uniqueness of our physical theories. In order to establish the first point, that mathematics plays an unreasonably important role in physics, it will be useful to say a few words on the question, “What is mathematics?”, then, “What is physics?”, then, how mathematics enters physical theories, and last, why the success of mathematics in its role in physics appears so baffling. Much less will be said on the second point: the uniqueness of the theories of physics. A proper answer to this question would require elaborate experimental and theoretical work which has not been undertaken to date.

WHAT IS MATHEMATICS? Somebody once said that philosophy is the misuse of a terminology which was invented just for this purpose.<sup>3</sup> In the same vein, I would say that mathematics is the science of skillful operations with concepts and rules invented just for this purpose. The principal emphasis is on the invention of concepts. Mathematics would soon run out of interesting theorems if these had to be formulated in terms of the concepts which already appear in the axioms. Furthermore, whereas it is unquestionably true that the concepts of elementary mathematics and particularly elementary geometry were formulated to describe entities which are directly suggested by the actual world, the same does not seem to be true of the more advanced concepts, in particular the concepts which play such an important role in physics. Thus, the rules for operations with pairs of numbers are obviously designed to give the same results as the operations with fractions which we first learned without

mos resultados que os das operações com frações que inicialmente aprendemos sem fazer referência a “pares de números”. As regras para operações com seqüências, isto é, com números irracionais, ainda pertencem a categoria das regras que foram formuladas para reproduzir regras de operações de quantidades que já eram por nós conhecidas. A maior parte dos conceitos matemáticos mais avançados, tais como os números complexos, álgebras, operadores lineares, conjuntos de Borel – e a lista pode ser prolongada quase indefinidamente – foram concebidas de forma a serem entidades com as quais o matemático pode demonstrar toda sua engenhosidade e senso de beleza. De fato, a definição desses conceitos, com a percepção de que considerações engenhosas e interessantes poderiam ser a eles aplicadas, é a primeira demonstração de engenhosidade do matemático que os define. A profundidade de pensamento que entra na formulação de conceitos matemáticos é justificada, *a posteriori*, pela habilidade (eficácia) com que esses conceitos são utilizados. O grande matemático explora integralmente, quase implacavelmente, os domínios dos raciocínios permissíveis até o limite dos não permissíveis. Que esse atrevimento não o leve a um pântano de contradições é, em si mesmo, um milagre: é difícil de acreditar que nosso poder de raciocínio foi levado, por um processo de seleção natural Darwiniano, à perfeição que aparenta possuir. Esse não é, no entanto, o assunto de que estamos tratando. O ponto principal que terá que ser recordado mais tarde é que se o matemático não quiser que a matemática fique restrita a uns poucos teoremas interessantes, será necessário definir novos conceitos além daqueles já contidos nos axiomas, mais ainda do que isso, esses conceitos precisam ser definidos de forma a permitir hábeis operações lógicas, com forte apelo estético, tanto no que se refere as operações como também em termos de resultados de grande generalidade e sim-

reference to “pairs of numbers.” The rules for the operations with sequences, that is, with irrational numbers, still belong to the category of rules which were determined so as to reproduce rules for the operations with quantities which were already known to us. Most more advanced mathematical concepts, such as complex numbers, algebras, linear operators, Borel sets and this list could be continued almost indefinitely were so devised that they are apt subjects on which the mathematician can demonstrate his ingenuity and sense of formal beauty. In fact, the definition of these concepts, with a realization that interesting and ingenious considerations could be applied to them, is the first demonstration of the ingeniousness of the mathematician who defines them. The depth of thought which goes into the formulation of the mathematical concepts is later justified by the skill with which these concepts are used. The great mathematician fully, almost ruthlessly, exploits the domain of permissible reasoning and skirts the impermissible. That his recklessness does not lead him into a morass of contradictions is a miracle in itself: certainly it is hard to believe that our reasoning power was brought, by Darwin’s process of natural selection, to the perfection which it seems to possess. However, this is not our present subject. The principal point which will have to be recalled later is that the mathematician could formulate only a handful of interesting theorems without defining concepts beyond those contained in the axioms and that the concepts outside those contained in the axioms are defined with a view of permitting ingenious logical operations which appeal to our aesthetic sense both as operations and also in their results of great generality and simplicity.<sup>4</sup>

plicidade.<sup>2</sup>

- 1 Essa afirmação foi retirada de W. Dubislav's *Die Philosophie der mathematik in der Gegenwart*. Junker und Duhnhaupt Verlag, Berlin, 1932, pág. 1.
- 2 M. Polanyi em seu *Personal Knowledge*, University of Chicago Press, 1958 diz: "Todas essas dificuldades não são nada além de consequências de nossa recusa em ver que a matemática não pode ser definida sem levar em conta sua mais óbvia característica: isto é, que ela é interessante," (pág. 188).
- 3 This statement is quoted here from W. Dubislav's *Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart* (Berlin: Junker and Duhnhaupt Verlag, 1932), p. 1.
- 4 M. Polanyi, in his *Personal Knowledge* (Chicago: University of Chicago Press, 1958), says: "All these difficulties are but consequences of our refusal to see that mathematics cannot be defined without acknowledging its most obvious feature: namely, that it is interesting" (p. 188).

Os números complexos fornecem um exemplo notável para o que vem a seguir. É certo que não há nada em nossa experiência que possa sugerir a introdução dessas quantidades. De fato, se pedirmos a um matemático para que justifique seu interesse por esses números ele apontará, com alguma indignação, para o grande número de belos teoremas na teoria das equações, para a teoria de séries de potências e para a teoria geral das funções analíticas cuja origem está ligada a introdução dos números complexos. O matemático não pretende abrir mão de seu interesse por essas belas criações de seu gênio.<sup>1</sup>

The complex numbers provide a particularly striking example for the foregoing. Certainly, nothing in our experience suggests the introduction of these quantities. Indeed, if a mathematician is asked to justify his interest in complex numbers, he will point, with some indignation, to the many beautiful theorems in the theory of equations, of power series, and of analytic functions in general, which owe their origin to the introduction of complex numbers. The mathematician is not willing to give up his interest in these most beautiful accomplishments of his genius.<sup>2</sup>

- 1 O leitor pode estar interessado, com relação a isso, nas observações muito irritadas de Hilbert em relação ao intuicionismo "que procura fracionar e desfigurar a matemática", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, vol 157, 1922 ou *Gesammelte Werke*, Springer, Berlin, 1935, pág. 188.
- 2 The reader may be interested, in this connection, in Hilbert's rather testy remarks about intuitionism which "seeks to break up and to disfigure mathematics," *Abh. Math. Sem., Univ. Hamburg*, 157 (1922), or *Gesammelte Werke* (Berlin: Springer, 1935), p. 188.

O QUE É FÍSICA? O físico se interessa em descobrir as leis da natureza inanimada. Para entendermos essa afirmação é necessário analisarmos o conceito de "lei natural".

O mundo ao nosso redor é de desconcertante complexidade e o fato mais óbvio a seu respeito é que não podemos prever o futuro. Embora se costume dizer que somente o otimista acha o futuro incerto, o otimista está, nesse caso, certo: o futuro é imprevisível. É, como Schroedinger observou, um milagre que certas regularidades nos eventos, apesar da desconcertante complexidade do mundo, possam ser descobertas [1]. Uma dessas regularidades, descoberta por Galileu, é que duas pedras, soltas no mesmo instante, de uma

WHAT IS PHYSICS? The physicist is interested in discovering the laws of inanimate nature. In order to understand this statement, it is necessary to analyze the concept, "law of nature."

The world around us is of baffling complexity and the most obvious fact about it is that we cannot predict the future. Although the joke attributes only to the optimist the view that the future is uncertain, the optimist is right in this case: the future is unpredictable. It is, as Schroedinger has remarked, a miracle that in spite of the baffling complexity of the world, certain regularities in the events could be discovered. One such regularity, discovered by Galileo, is that two rocks, dropped at the same time from the same height, reach the ground at

mesma altura, atingem o chão simultaneamente. As leis da natureza se referem a essas regularidades. A regularidade de Galileu é um protótipo de uma grande classe delas. Por três razões, essa regularidade é surpreendente.

A primeira razão pela qual ela é surpreendente é que ela não é verdadeira apenas em Pisa, no tempo de Galileu mas é verdadeira em todos os lugares da terra, foi verdadeira no passado e continuará, sempre, sendo verdadeira. Essa propriedade é claramente uma propriedade de invariância e, como tive a oportunidade de observar algum tempo atrás [2], sem princípios de invariância semelhantes a esse, obtido pela generalização das observações de Galileu, a física não é possível. A segunda razão para essa regularidade que estamos discutindo é surpreendente é o fato dela não depender de muitas condições que poderiam afetá-la. Chovendo ou não chovendo, sendo realizada numa sala ou na Torre Inclinada e independentemente de ser homem ou mulher a pessoa que solta a pedra, ela é válida. Continua válida também no caso das duas pedras serem soltas, simultaneamente e da mesma altura, por duas pessoas diferentes. Existem, obviamente, enumeráveis outras condições que não interferem na validade da regularidade de Galileu. A irrelevância de muitas circunstâncias que *podariam* intervir num fenômeno observado também tem sido chamado de invariância [2]. Essa invariância tem, no entanto, características diferentes da anterior em virtude do fato dela não poder ser formulada como um princípio geral. A exploração das condições que afetam ou não um determinado fenômeno faz parte das pesquisas experimentais iniciais que são feitas ao se estudar de um campo. É a perícia e a argúcia do experimentador que irão indicar a ele fenômenos que dependem de um número relativamente pequeno de condições que podem ser facilmente percebidas e reproduzidas.<sup>1</sup> No caso presente, a restrição feita por Galileu de só trabalhar com cor-

the same time. The laws of nature are concerned with such regularities. Galileo's regularity is a prototype of a large class of regularities. It is a surprising regularity for three reasons.

The first reason that it is surprising is that it is true not only in Pisa, and in Galileo's time, it is true everywhere on the Earth, was always true, and will always be true. This property of the regularity is a recognized invariance property and, as I had occasion to point out some time ago, without invariance principles similar to those implied in the preceding generalization of Galileo's observation, physics would not be possible. The second surprising feature is that the regularity which we are discussing is independent of so many conditions which could have an effect on it. It is valid no matter whether it rains or not, whether the experiment is carried out in a room or from the Leaning Tower, no matter whether the person who drops the rocks is a man or a woman. It is valid even if the two rocks are dropped, simultaneously and from the same height, by two different people. There are, obviously, innumerable other conditions which are all immaterial from the point of view of the validity of Galileo's regularity. The irrelevancy of so many circumstances which could play a role in the phenomenon observed has also been called an invariance. However, this invariance is of a different character from the preceding one since it cannot be formulated as a general principle. The exploration of the conditions which do, and which do not, influence a phenomenon is part of the early experimental exploration of a field. It is the skill and ingenuity of the experimenter which show him phenomena which depend on a relatively narrow set of relatively easily realizable and reproducible conditions.<sup>2</sup> In the present case, Galileo's restriction of his observations to relatively heavy bodies was the most important step in this regard. Again, it is true that if there

pos relativamente pesados, é a mais importante. Voltamos a insistir que, se não existissem fenômenos dependentes apenas de um pequeno número de condições que podemos controlar, a física não seria possível.

- 1 Veja a esse respeito, o ensaio gráfico de M. Deutsch, *Daedalus*, Vol. 87, 1958, pág. 86. A Shimony chamou minha atenção para uma passagem semelhante em C. S. Peirce's *Essays in the Philosophy of Science*, The Liberal Arts Press, New York, 1957 (pág. 237).
- 2 See, in this connection, the graphic essay of M. Deutsch, *Daedalus* 87, 86 (1958). A. Shimony has called my attention to a similar passage in C. S. Peirce's *Essays in the Philosophy of Science* (New York: The Liberal Arts Press, 1957), p. 237.

Os dois pontos precedentes, embora muito significativos para o filósofo, não foram os que mais surpreenderam Galileu uma vez que eles não contêm uma lei da natureza. A lei da natureza está contida na afirmação de que o intervalo de tempo necessário para um objeto pesado cair de uma determinada altura é independente do tamanho, da forma e do material de que é feito o corpo que cai. No contexto da segunda "lei" de Newton isso equivale à afirmação de que a força gravitacional que age no corpo em queda livre é proporcional a sua massa mas, independe do tamanho, da forma e do material do qual o corpo é feito.

A discussão precedente tem a intenção de lembrar, em primeiro lugar que não é nada natural que "leis da natureza" existam e, muito menos, que o homem seja capaz de descobri-las.<sup>1</sup> O presente autor teve a ocasião, algum tempo atrás, de chamar a atenção para os sucessivos níveis de "leis da natureza", cada nível contendo leis mais gerais e abrangentes do que o anterior e também para o fato de as descobertas desses níveis constituírem-se num crescente aprofundamento na estrutura do universo em relação aos níveis conhecidos anteriormente [3]. No entanto, o ponto mais importante no presente contexto é que todas essas leis da natureza, mesmo em suas mais remotas conseqüências, contém apenas um pequeno fragmento de nosso conhecimento da natureza inanimada. Todas as leis da natureza são afirmações condicionais que permitem, a partir do conhecimento do presente, predizer alguns eventos

were no phenomena which are independent of all but a manageably small set of conditions, physics would be impossible.

The preceding two points, though highly significant from the point of view of the philosopher, are not the ones which surprised Galileo most, nor do they contain a specific law of nature. The law of nature is contained in the statement that the length of time which it takes for a heavy object to fall from a given height is independent of the size, material, and shape of the body which drops. In the framework of Newton's second "law," this amounts to the statement that the gravitational force which acts on the falling body is proportional to its mass but independent of the size, material, and shape of the body which falls.

The preceding discussion is intended to remind us, first, that it is not at all natural that "laws of nature" exist, much less that man is able to discover them.<sup>3</sup> The present writer had occasion, some time ago, to call attention to the succession of layers of "laws of nature," each layer containing more general and more encompassing laws than the previous one and its discovery constituting a deeper penetration into the structure of the universe than the layers recognized before. However, the point which is most significant in the present context is that all these laws of nature contain, in even their remotest consequences, only a small part of our knowledge of the inanimate world. All the laws of nature are conditional statements which permit a prediction of some future events on the basis of the knowledge of the present, except that some aspects of the present state of the world, in practice the overwhelming majority

futuros; na realidade, apenas alguns aspectos do atual estado do mundo são necessários pois, na prática, a maioria esmagadora das condições que determinam o estado presente do mundo são, do ponto de vista da previsão, irrelevantes. A irrelevância é entendida aqui no sentido do segundo ponto da discussão do teorema de Galileu.<sup>2</sup>

- 1 E. Schroedinger, em *What is Life*, Cambridge University Press, 1945, diz que esse segundo milagre pode, muito bem, estar além da compreensão humana (pág. 31).
- 2 O autor está seguro de que é desnecessário mencionar que o teorema de Galileu, como foi abordado no texto, não exaure o conteúdo das observações de Galileu relativas às leis dos corpos em queda livre.
- 3 E. Schroedinger, in his *What Is Life?* (Cambridge: Cambridge University Press, 1945), p. 31, says that this second miracle may well be beyond human understanding.
- 4 The writer feels sure that it is unnecessary to mention that Galileo's theorem, as given in the text, does not exhaust the content of Galileo's observations in connection with the laws of freely falling bodies.

No que se refere ao estado presente do mundo, tal como a existência da Terra em que vivemos e onde os experimentos de Galileu foram feitos, a existência do Sol e de todos os nossos arredores, as leis da natureza nada dizem. É em consonância com isso que as leis da natureza só podem ser utilizadas para predizer eventos futuros sob circunstâncias excepcionais – quando todos os fatores que determinam o presente estado do mundo são conhecidos. É também em consonância com isso que a construção de máquinas cujo funcionamento podemos prever, constitui as mais espetaculares realizações dos físicos. Nessas máquinas, o físico cria uma situação em que todas as coordenadas relevantes são conhecidas de tal forma que o comportamento da máquina pode ser predito. Radares e reatores nucleares são exemplos desse tipo de máquinas.

O principal propósito da presente discussão é salientar o fato de que as leis da natureza são afirmações condicionais e que se relacionam apenas com uma parte muito pequena de nosso conhecimento do mundo. Assim, a mecânica clássica, que é o mais conhecido protótipo de todas as teorias físicas, dá, a partir do conhecimento das posições, etc. dos corpos, as derivadas segundas das coordenadas de posição de todos esses corpos. Não dá porém, nenhuma informação sobre a existência, as

of the determinants of the present state of the world, are irrelevant from the point of view of the prediction. The irrelevancy is meant in the sense of the second point in the discussion of Galileo's theorem.<sup>4</sup>

As regards the present state of the world, such as the existence of the earth on which we live and on which Galileo's experiments were performed, the existence of the sun and of all our surroundings, the laws of nature are entirely silent. It is in consonance with this, first, that the laws of nature can be used to predict future events only under exceptional circumstances when all the relevant determinants of the present state of the world are known. It is also in consonance with this that the construction of machines, the functioning of which he can foresee, constitutes the most spectacular accomplishment of the physicist. In these machines, the physicist creates a situation in which all the relevant coordinates are known so that the behavior of the machine can be predicted. Radars and nuclear reactors are examples of such machines.

The principal purpose of the preceding discussion is to point out that the laws of nature are all conditional statements and they relate only to a very small part of our knowledge of the world. Thus, classical mechanics, which is the best known prototype of a physical theory, gives the second derivatives of the positional coordinates of all bodies, on the basis of the knowledge of the positions, etc., of these bodies. It gives no information on the existence, the present positions, or velocities of these



posições no momento, nem da velocidade desses corpos. A bem da precisão precisamos mencionar que aprendemos, há mais ou menos trinta anos, que mesmo as afirmações condicionais não podem ser completamente precisas: as afirmações condicionais são leis de probabilidade que somente nos capacitam a fazer apostas inteligentes, fundadas em nosso conhecimento do presente, sobre as propriedades que o mundo inanimado terá no futuro. Elas não nos permite fazer afirmações categóricas, nem mesmo afirmações condicionais categóricas, fundadas em nosso conhecimento do presente. A natureza probabilística das “leis da natureza” se manifesta também no caso das máquinas, pelo menos no caso dos reatores nucleares quando os fazemos funcionar com potências muito baixas isso pode ser verificado. Todavia essa limitação adicional ao escopo das leis da natureza,<sup>1</sup> imposta pela sua natureza probabilística, não desempenhará papel algum no resto de nossa discussão.

1 Veja, por exemplo, E. Schroedinger, referência [1].

O PAPEL DA MATEMÁTICA NAS TEORIAS FÍSICAS. Após havermos analisado aspectos essenciais da matemática e da física, devemos estar em melhor posição para discutir o papel da matemática nas teorias físicas.

É, naturalmente, corriqueiro o uso da matemática na física para calcular os resultados das aplicações das leis da natureza, isto é, para aplicar as afirmações condicionais às particulares condições que prevalecem no momento ou àquelas em que tivermos interesse. Para que isso seja possível, as leis da natureza precisam já estar formuladas em linguagem matemática. No entanto, a função de calcular as consequências de teorias já estabelecidas não é o papel mais importante da matemática na física. À matemática, ou melhor, à matemática aplicada não desempenha o principal papel nessa função: ela é apenas uma ferreamente auxiliar.

A matemática, todavia, desempenha

bodies. It should be mentioned, for the sake of accuracy, that we discovered about thirty years ago that even the conditional statements cannot be entirely precise: that the conditional statements are probability laws which enable us only to place intelligent bets on future properties of the inanimate world, based on the knowledge of the present state. They do not allow us to make categorical statements, not even categorical statements conditional on the present state of the world. The probabilistic nature of the “laws of nature” manifests itself in the case of machines also, and can be verified, at least in the case of nuclear reactors, if one runs them at very low power. However, the additional limitation of the scope of the laws of nature which follows from their probabilistic nature will play no role in the rest of the discussion.

THE ROLE OF MATHEMATICS IN PHYSICAL THEORIES. Having refreshed our minds as to the essence of mathematics and physics, we should be in a better position to review the role of mathematics in physical theories.

Naturally, we do use mathematics in everyday physics to evaluate the results of the laws of nature, to apply the conditional statements to the particular conditions which happen to prevail or happen to interest us. In order that this be possible, the laws of nature must already be formulated in mathematical language. However, the role of evaluating the consequences of already established theories is not the most important role of mathematics in physics. Mathematics, or, rather, applied mathematics, is not so much the master of the situation in this function: it is merely serving as a tool.

Mathematics does play, however, also a

um papel bem mais importante em física. Isso já estava implícito quando afirmamos, ao discutir o papel da matemática aplicada, que as leis da natureza já deviam estar formuladas em linguagem matemática para poderem ser por ela utilizadas. A afirmação de que as leis da natureza são escritas em linguagem matemática já foi feita, muito adequadamente, trezentos anos atrás;<sup>1</sup> essa afirmação é agora ainda mais verdadeira do que jamais foi. Para mostrar a importância que os conceitos matemáticos têm na formulação das leis físicas, vamos, como um exemplo, recordar os axiomas da mecânica quântica formulados, de forma explícita, pelo grande matemático von Neumann, ou, implicitamente, pelo grande físico Dirac [4,5]. Existem dois conceitos básicos em mecânica quântica: estados e observáveis. Os estados são vetores num espaço de Hilbert e os observáveis são operadores auto-adjuntos nesse espaço. Os possíveis valores das observações são os valores característicos dos operadores – é, no entanto, melhor parar por aqui para não termos que fazer uma lista de conceitos matemáticos criados pela teoria dos operadores.

1 Essa afirmação é atribuída a Galileu.

2 It is attributed to Galileo.

É claro que é verdade que a física escolhe certos conceitos matemáticos para formular as leis da natureza e, certamente, apenas uma pequena fração desses conceitos é utilizada na física. Também é verdade que eles não foram escolhidos, de forma arbitrária, entre os conceitos que figuram numa lista de termos matemáticos mas, ao contrário, foram, em muitos casos, se não na maioria deles, desenvolvidos, de forma independente pelo físico e, somente *a posteriori*, reconhecidos como tendo sido concebidos previamente pelo matemático. Não é verdade, porém, como é afirmado com frequência, que isso teria que acontecer porque a matemática utiliza os conceitos mais simples possíveis e, em virtude disso, eles teriam que aparecer em qualquer

more sovereign role in physics. This was already implied in the statement, made when discussing the role of applied mathematics, that the laws of nature must have been formulated in the language of mathematics to be an object for the use of applied mathematics. The statement that the laws of nature are written in the language of mathematics was properly made three hundred years ago;<sup>2</sup> it is now more true than ever before. In order to show the importance which mathematical concepts possess in the formulation of the laws of physics, let us recall, as an example, the axioms of quantum mechanics as formulated, explicitly, by the great physicist, Dirac. There are two basic concepts in quantum mechanics: states and observables. The states are vectors in Hilbert space, the observables self-adjoint operators on these vectors. The possible values of the observations are the characteristic values of the operators—but we had better stop here lest we engage in a listing of the mathematical concepts developed in the theory of linear operators.

It is true, of course, that physics chooses certain mathematical concepts for the formulation of the laws of nature, and surely only a fraction of all mathematical concepts is used in physics. It is true also that the concepts which were chosen were not selected arbitrarily from a listing of mathematical terms but were developed, in many if not most cases, independently by the physicist and recognized then as having been conceived before by the mathematician. It is not true, however, as is so often stated, that this had to happen because mathematics uses the simplest possible concepts and these were bound to occur in any formalism. As we saw before, the concepts of mathematics are not chosen for their conceptual simplicity—even sequences

formalismo. Como já vimos, os conceitos matemáticos não são escolhidos por sua simplicidade conceitual – mesmo sequência de pares de números estão muito longe de estar entre os conceitos mais simples – e sim por se prestarem a manipulações astutas e a argumentos brilhantes. Não devemos esquecer que o espaço de Hilbert da mecânica quântica é um espaço sobre os números complexos com produto escalar Hermitiano. Certamente para o espírito despreocupado, os números complexos estão longe de ser naturais e simples e não podem ser sugeridos por observações físicas. Além disso, o uso de números complexos não é, nesse caso, um truque computacional de matemática aplicada mas se aproxima de uma necessidade na formulação das leis da mecânica quântica. Finalmente, começa agora a parecer que as chamadas funções analíticas estão destinadas a desempenhar papel decisivo na formulação da teoria quântica. Estou me referindo ao rápido desenvolvimento da teoria das relações de dispersão.

É difícil evitar a impressão de que nos defrontamos aqui com um milagre, que pela sua surpreendente natureza, se compara com outro que é a capacidade que a mente humana tem de encadear mil argumentos sem cair em contradição ou ainda a dois outros que são a existência das leis da natureza e a capacidade da mente humana de adivinhá-las. Que eu saiba, a observação que mais se aproxima de uma explicação para o fato dos conceitos de matemática aparecerem tanto em física foi feita por Einstein que afirmou que as únicas teorias físicas que estamos dispostos a aceitar são as bonitas. Resta argumentar que os conceitos matemáticos, que convidam ao exercício de tanta argúcia, tem a qualidade de beleza. No entanto, a observação de Einstein pode, na melhor das hipóteses, explicar propriedades de teorias que queremos aceitar mas, ela não faz referência à precisão intrínseca dessas teorias. Retornaremos, mais tarde a essa questão.

of pairs of numbers are far from being the simplest concepts but for their amenability to clever manipulations and to striking, brilliant arguments. Let us not forget that the Hilbert space of quantum mechanics is the complex Hilbert space, with a Hermitian scalar product. Surely to the unpreoccupied mind, complex numbers are far from natural or simple and they cannot be suggested by physical observations. Furthermore, the use of complex numbers is in this case not a calculational trick of applied mathematics but comes close to being a necessity in the formulation of the laws of quantum mechanics. Finally, it now begins to appear that not only complex numbers but so-called analytic functions are destined to play a decisive role in the formulation of quantum theory. I am referring to the rapidly developing theory of dispersion relations.

It is difficult to avoid the impression that a miracle confronts us here, quite comparable in its striking nature to the miracle that the human mind can string a thousand arguments together without getting itself into contradictions, or to the two miracles of the existence of laws of nature and of the human mind's capacity to divine them. The observation which comes closest to an explanation for the mathematical concepts' cropping up in physics which I know is Einstein's statement that the only physical theories which we are willing to accept are the beautiful ones. It stands to argue that the concepts of mathematics, which invite the exercise of so much wit, have the quality of beauty. However, Einstein's observation can at best explain properties of theories which we are willing to believe and has no reference to the intrinsic accuracy of the theory. We shall, therefore, turn to this latter question.

O SUCESSO DAS TEORIAS FÍSICAS É REALMENTE SURPREENDENTE? Uma possível forma de explicar o uso que o físico faz da matemática para formular suas leis da natureza é que ele é uma pessoa até certo ponto irresponsável. Por causa disso, quando ele encontra uma conexão entre duas quantidades que se assemelha a uma conexão já conhecida em matemática ele conclui imediatamente, que a conexão da física é a da matemática já que ele não conhece nenhuma outra similar. Não pretendemos aqui refutar essa acusação de certa irresponsabilidade por parte do físico. Pode ser que ele seja assim. É, no entanto, importante observar que a formulação matemática de uma experiência física, às vezes rudimentar, leva, um número surpreendente de vezes, a uma descrição extraordinariamente precisa de uma classe muito grande de fenômenos. Isso mostra que a linguagem matemática tem mais a recomendá-la do que ser a única linguagem que sabemos utilizar; mostra um sentido muito real que é a linguagem correta. Vamos examinar alguns exemplos.

O primeiro exemplo, frequentemente citado, é o do movimento planetário. As leis dos corpos em queda livre ficaram muito bem estabelecidas em consequência de experiências efetuadas principalmente na Itália. Essas experiências, em parte por causa do efeito causado pela resistência do ar e, em parte, pela impossibilidade que se tinha na época de medir intervalos de tempo muito pequenos, não poderiam ter sido muito precisas. Entretanto, não causa grande surpresa que os cientistas naturais italianos tenham adquirido familiaridade com a forma como os objetos se movimentam através da atmosfera. Foi Newton quem relacionou a lei que rege os objetos em queda livre com o movimento da Lua, notou que a parábola descrita pela pedra atirada na Terra e a trajetória circular da Lua no céu são casos particulares de um mesmo objeto matemático e, apoiado apenas numa única e, na época, pouco precisa

IS THE SUCCESS OF PHYSICAL THEORIES TRULY SURPRISING? A possible explanation of the physicist's use of mathematics to formulate his laws of nature is that he is a somewhat irresponsible person. As a result, when he finds a connection between two quantities which resembles a connection well-known from mathematics, he will jump at the conclusion that the connection is that discussed in mathematics simply because he does not know of any other similar connection. It is not the intention of the present discussion to refute the charge that the physicist is a somewhat irresponsible person. Perhaps he is. However, it is important to point out that the mathematical formulation of the physicist's often crude experience leads in an uncanny number of cases to an amazingly accurate description of a large class of phenomena. This shows that the mathematical language has more to commend it than being the only language which we can speak; it shows that it is, in a very real sense, the correct language. Let us consider a few examples.

The first example is the oft-quoted one of planetary motion. The laws of falling bodies became rather well established as a result of experiments carried out principally in Italy. These experiments could not be very accurate in the sense in which we understand accuracy today partly because of the effect of air resistance and partly because of the impossibility, at that time, to measure short time intervals. Nevertheless, it is not surprising that, as a result of their studies, the Italian natural scientists acquired a familiarity with the ways in which objects travel through the atmosphere. It was Newton who then brought the law of freely falling objects into relation with the motion of the moon, noted that the parabola of the thrown rock's path on the earth and the circle of the moon's path in the sky are particular cases of the same mathematical object of an ellipse, and postulated the universal law of gravitation

coincidência numérica, formulou e postulou a lei da gravitação universal. Do ponto de vista filosófico, a lei de gravitação, da forma como foi formulada por Newton, era repugnante não apenas a seu tempo mas também a si próprio. Baseava-se em observações empíricas muito escassas. A linguagem matemática na qual era formulada continha o conceito de segunda derivada e aqueles de nós que já tentaram desenhar um círculo osculador de uma curva sabem que uma segunda derivada não é um conceito muito imediato. A lei de gravitação que Newton estabeleceu de forma tão relutante e que foi capaz de verificar com precisão de aproximadamente 4% provou ser correta dentro de uma aproximação de um sobre dez mil por cento e tornou-se tão associada a idéia de exatidão absoluta que apenas recentemente os físicos adquiriram coragem para questionar os limites dessa exatidão.<sup>1</sup> Sem dúvida, o exemplo da lei de Newton, citado tão frequentemente, deve ser o primeiro a ser mencionado como um exemplo monumental de uma lei formulada em termos que parecem simples para um matemático e que mostrou uma precisão além de qualquer expectativa razoável. Vale a pena recapitular nossa tese nesse exemplo: em primeiro lugar a lei, particularmente por conter uma derivada segunda, é simples apenas para o matemático e não para o senso comum ou para uma mente não matemática; em segundo lugar é uma lei condicional de escopo muito limitado. Ela não explica nada sobre a Terra que atrai as pedras lançadas por Galileu ou sobre a órbita circular da Lua ou sobre os planetas do Sol. A explicação dessas condições iniciais é relegada ao geólogo e ao astrônomo que enfrentam, com isso, grandes dificuldades.

1 Veja, por exemplo, R. H. Dicke, *American Scientist*, Vol. 25, 1959.

2 See, for instance, R. H. Dicke, *Am. Sci.*, 25 (1959).

O segundo exemplo refere-se a mecânica quântica elementar. Originou-se com a observação feita por Max Born de que algumas regras de cálculo formuladas

on the basis of a single, and at that time very approximate, numerical coincidence. Philosophically, the law of gravitation as formulated by Newton was repugnant to his time and to himself. Empirically, it was based on very scanty observations. The mathematical language in which it was formulated contained the concept of a second derivative and those of us who have tried to draw an osculating circle to a curve know that the second derivative is not a very immediate concept. The law of gravity which Newton reluctantly established and which he could verify with an accuracy of about 4% has proved to be accurate to less than a ten thousandth of a per cent and became so closely associated with the idea of absolute accuracy that only recently did physicists become again bold enough to inquire into the limitations of its accuracy.<sup>2</sup> Certainly, the example of Newton's law, quoted over and over again, must be mentioned first as a monumental example of a law, formulated in terms which appear simple to the mathematician, which has proved accurate beyond all reasonable expectations. Let us just recapitulate our thesis on this example: first, the law, particularly since a second derivative appears in it, is simple only to the mathematician, not to common sense or to non-mathematically-minded freshmen; second, it is a conditional law of very limited scope. It explains nothing about the earth which attracts Galileo's rocks, or about the circular form of the moon's orbit, or about the planets of the sun. The explanation of these initial conditions is left to the geologist and the astronomer, and they have a hard time with them.

The second example is that of ordinary, elementary quantum mechanics. This originated when Max Born noticed that some rules of computation, given by Heisenberg,

por Heisenberg eram formalmente idênticas a regras de cálculo com matrizes, estabelecidas muito antes, pelos matemáticos. Born, Jordan e Heisenberg propuseram então substituir a posição e o momento nas equações da mecânica clássica por variáveis matriciais [6]. Eles aplicaram as regras da mecânica matricial a uns poucos problemas, altamente idealizados, e os resultados foram bem satisfatórios. Entretanto, não havia naquela época nenhuma evidência racional de que essa mecânica matricial pudesse, em condições mais realistas, vir a ser correta. Eles, de fato, se perguntaram: “A mecânica, da forma proposta, em seus traços essenciais, não poderia estar correta?” Na realidade, a primeira aplicação dessa mecânica a um problema real, o do átomo de hidrogênio, foi feita, alguns meses mais tarde, por Pauli. Essa aplicação forneceu resultados concordantes com a experiência. Isso era satisfatório mas ainda compreensível porque as regras de cálculo de Heisenberg foram formuladas a partir de problemas que incluíam a antiga teoria do átomo de hidrogênio. O verdadeiro milagre ocorreu apenas quando a mecânica matricial, ou uma teoria matematicamente equivalente, foi aplicada a problemas para os quais as regras de cálculo de Heisenberg não faziam sentido. As regras de Heisenberg tinham como pressuposto que as equações clássicas do movimento tivessem soluções com certas propriedades de periodicidade. Com dois elétrons, no caso do átomo de hélio, ou um número ainda maior quando se trata de átomos mais pesados, as equações do movimento não têm essas propriedades e portanto as regras de Heisenberg não podem ser aplicadas. No entanto, o cálculo feito no nível mais baixo de energia do hélio, feito alguns meses atrás por Kinoshita em Cornell e por Bazley no *Bureau of Standards*, concorda com os dados experimentais dentro dos limites de precisão da observação que é de um sobre dez milhões. Desta vez, tiramos das equações, algo que, certamente, não havíamos

were formally identical with the rules of computation with matrices, established a long time before by mathematicians. Born, Jordan, and Heisenberg then proposed to replace by matrices the position and momentum variables of the equations of classical mechanics. They applied the rules of matrix mechanics to a few highly idealized problems and the results were quite satisfactory. However, there was, at that time, no rational evidence that their matrix mechanics would prove correct under more realistic conditions. Indeed, they say “if the mechanics as here proposed should already be correct in its essential traits.” As a matter of fact, the first application of their mechanics to a realistic problem, that of the hydrogen atom, was given several months later, by Pauli. This application gave results in agreement with experience. This was satisfactory but still understandable because Heisenberg’s rules of calculation were abstracted from problems which included the old theory of the hydrogen atom. The miracle occurred only when matrix mechanics, or a mathematically equivalent theory, was applied to problems for which Heisenberg’s calculating rules were meaningless. Heisenberg’s rules presupposed that the classical equations of motion had solutions with certain periodicity properties; and the equations of motion of the two electrons of the helium atom, or of the even greater number of electrons of heavier atoms, simply do not have these properties, so that Heisenberg’s rules cannot be applied to these cases. Nevertheless, the calculation of the lowest energy level of helium, as carried out a few months ago by Kinoshita at Cornell and by Bazley at the Bureau of Standards, agrees with the experimental data within the accuracy of the observations, which is one part in ten million. Surely in this case we “got something out” of the equations that we did not put in.

posto nelas.

O mesmo é verdadeiro em relação as características qualitativas dos “espectros complexos”, isto é, dos espectros dos átomos mais pesados. Desejo relatar uma conversa com Jordan que me contou, na época em que as propriedades qualitativas dos espectros foram deduzidas, que uma discordância entre as regras derivadas da teoria da mecânica quântica e as regras estabelecidas por pesquisa empírica, teriam fornecido uma última oportunidade para fazer uma mudança na mecânica matricial. Em outras palavras, Jordan sentiu que teríamos ficado, pelo menos temporariamente, perdidos caso houvesse ocorrido um inesperado desacordo na teoria do átomo de hélio. A verificação da concordância foi feita, na época, por Kellner e Hilleraas. O formalismo matemático era muito claro e imutável de forma que, não houvesse ocorrido o milagre descrito anteriormente com o hélio, uma verdadeira crise estaria instalada. Certamente, de uma forma ou de outra a física teria superado essa crise. Por outro lado é verdade que a física como a conhecemos hoje não seria possível sem a constante repetição de milagres similares ao do átomo de hélio que é provavelmente o mais extraordinário que ocorreu no desenvolvimento da mecânica quântica elementar, mas está muito longe de ser o único. De fato esse número de milagres só é limitado por nossa disposição de buscar outros. A mecânica quântica teve muitos outros sucessos, quase igualmente extraordinários, o que nos dá a firme convicção de que ela é, o que chamamos, correta.

O último exemplo é o da eletrodinâmica quântica, ou a teoria do deslocamento de Lamb. Enquanto a teoria da gravitação de Newton ainda estava obviamente ligada a experiência, esta só participa da formulação da mecânica matricial de uma forma muito refinada ou sublimada através das prescrições de Heisenberg. A teoria quântica do deslocamento de Lamb da forma concebida por Bethe e estabe-

The same is true of the qualitative characteristics of the “complex spectra,” that is, the spectra of heavier atoms. I wish to recall a conversation with Jordan, who told me, when the qualitative features of the spectra were derived, that a disagreement of the rules derived from quantum mechanical theory and the rules established by empirical research would have provided the last opportunity to make a change in the framework of matrix mechanics. In other words, Jordan felt that we would have been, at least temporarily, helpless had an unexpected disagreement occurred in the theory of the helium atom. This was, at that time, developed by Kellner and by Hilleraas. The mathematical formalism was too dear and unchangeable so that, had the miracle of helium which was mentioned before not occurred, a true crisis would have arisen. Surely, physics would have overcome that crisis in one way or another. It is true, on the other hand, that physics as we know it today would not be possible without a constant recurrence of miracles similar to the one of the helium atom, which is perhaps the most striking miracle that has occurred in the course of the development of elementary quantum mechanics, but by far not the only one. In fact, the number of analogous miracles is limited, in our view, only by our willingness to go after more similar ones. Quantum mechanics had, nevertheless, many almost equally striking successes which gave us the firm conviction that it is, what we call, correct.

The last example is that of quantum electrodynamics, or the theory of the Lamb shift. Whereas Newton’s theory of gravitation still had obvious connections with experience, experience entered the formulation of matrix mechanics only in the refined or sublimated form of Heisenberg’s prescriptions. The quantum theory of the Lamb shift, as conceived by Bethe and established by Schwinger, is a purely mathe-

lecida por Schwinger é uma teoria puramente matemática e a única contribuição experimental direta foi a demonstração da existência de um efeito mensurável. A concordância com os cálculos é melhor do que uma parte em mil.

Os três exemplos precedentes, que poderiam ser aumentados quase indefinidamente, devem ilustrar a propriedade e a precisão da formulação matemática das leis da natureza em termos dos conceitos escolhidos pela sua manipulabilidade, sendo as “leis da natureza” de uma precisão quase fantástica mas de escopo estritamente limitado. Proponho chamar de lei empírica da epistemologia as observações que esses exemplos ilustram. Ela forma, junto com as leis de invariância das leis físicas, a indispensável fundamentação dessas teorias. Sem as leis de invariância as teorias físicas não poderiam ser fundamentadas com fatos; se a lei empírica da epistemologia não fosse correta teríamos falta de estímulo e segurança que são necessidades emocionais sem as quais as “leis da natureza” não poderiam ter sido exploradas com sucesso. O Dr. R. G. Sachs com quem discuti a lei empírica da epistemologia chamou-a de artigo de fé do físico teórico e, sem dúvida nenhuma, é isso mesmo que ela é. No entanto, o que ele chamou de nosso artigo de fé pode ser ilustrado por exemplos verdadeiros – muitos outros exemplos além dos três que mencionamos.

**A UNICIDADE DAS TEORIAS FÍSICAS.** A natureza empírica da observação anterior me parece óbvia. Ela certamente não é uma “necessidade do pensamento” e não deveria ser necessário para provar isso apelar para o fato de que ela somente se aplica a uma pequena parte do nosso conhecimento do mundo inanimado. É absurdo acreditar que a existência de expressões matemáticas simples para a derivada segunda da (função) posição é evidente quando nenhuma expressão similar para a posição ou para a velocidade existem. É, portanto, muito surpreendente a presteza

mathematical theory and the only direct contribution of experiment was to show the existence of a measurable effect. The agreement with calculation is better than one part in a thousand.

The preceding three examples, which could be multiplied almost indefinitely, should illustrate the appropriateness and accuracy of the mathematical formulation of the laws of nature in terms of concepts chosen for their manipulability, the “laws of nature” being of almost fantastic accuracy but of strictly limited scope. I propose to refer to the observation which these examples illustrate as the empirical law of epistemology. Together with the laws of invariance of physical theories, it is an indispensable foundation of these theories. Without the laws of invariance the physical theories could have been given no foundation of fact; if the empirical law of epistemology were not correct, we would lack the encouragement and reassurance which are emotional necessities, without which the “laws of nature” could not have been successfully explored. Dr. R. G. Sachs, with whom I discussed the empirical law of epistemology, called it an article of faith of the theoretical physicist, and it is surely that. However, what he called our article of faith can be well supported by actual examples—many examples in addition to the three which have been mentioned.

**THE UNIQUENESS OF THE THEORIES OF PHYSICS.** The empirical nature of the preceding observation seems to me to be self-evident. It surely is not a “necessity of thought” and it should not be necessary, in order to prove this, to point to the fact that it applies only to a very small part of our knowledge of the inanimate world. It is absurd to believe that the existence of mathematically simple expressions for the second derivative of the position is self-evident, when no similar expressions for the position itself or for the velocity exist. It is therefore surprising how readily the



com que o maravilhoso presente contido na lei empírica da epistemologia foi dado como evidente. A habilidade da mente humana, já mencionada anteriormente, de encadear mil argumentos de forma “correta” é um dom similar.

Toda lei empírica tem a inquietante qualidade de não se conhecer suas limitações. Vimos que existem regularidades nos eventos do mundo que nos cerca que podem ser formuladas em termos de conceitos matemáticos com incrível precisão. Existem, por outro lado, aspectos do mundo em relação aos quais não acreditamos na existência de regularidades precisas. Esses aspectos recebem o nome de condições iniciais. A questão que se apresenta é se essas diferentes regularidades, isto é, as diferentes leis da natureza que serão descobertas irão se fundir numa única unidade consistente ou se, pelo menos, se aproximarão assintoticamente dessa fusão. Por outro lado é possível que sempre existam algumas leis da natureza que não tenham nada em comum umas com as outras. No presente, isso ocorre, por exemplo, com as leis da hereditariedade e as da física. É até mesmo possível que algumas leis da natureza, em suas implicações estejam em conflito umas com as outras mas que sejam tão convincentes em seus próprios domínios que não se queira abandoná-las. Podemos nos resignar a esse estado de coisas ou ainda mais, nosso interesse em resolver esse conflito entre as diversas teorias, pode desaparecer. Podemos perder nosso interesse pela “verdade última”, isto é, um panorama que seja a fusão consistente das diversas imagens locais formadas por cada um dos diversos aspectos da natureza.

Pode ser útil ilustrar as alternativas por um exemplo. Temos agora, em física duas teorias de grande poder e interesse: a teoria dos fenômenos quânticos e a teoria da relatividade. Essas teorias tem suas raízes em grupos de fenômenos mutuamente exclusivos. A teoria da relatividade se aplica a corpos macroscópicos como, por exemplo,

wonderful gift contained in the empirical law of epistemology was taken for granted. The ability of the human mind to form a string of 1000 conclusions and still remain “right,” which was mentioned before, is a similar gift.

Every empirical law has the disquieting quality that one does not know its limitations. We have seen that there are regularities in the events in the world around us which can be formulated in terms of mathematical concepts with an uncanny accuracy. There are, on the other hand, aspects of the world concerning which we do not believe in the existence of any accurate regularities. We call these initial conditions. The question which presents itself is whether the different regularities, that is, the various laws of nature which will be discovered, will fuse into a single consistent unit, or at least asymptotically approach such a fusion. Alternatively, it is possible that there always will be some laws of nature which have nothing in common with each other. At present, this is true, for instance, of the laws of heredity and of physics. It is even possible that some of the laws of nature will be in conflict with each other in their implications, but each convincing enough in its own domain so that we may not be willing to abandon any of them. We may resign ourselves to such a state of affairs or our interest in clearing up the conflict between the various theories may fade out. We may lose interest in the “ultimate truth,” that is, in a picture which is a consistent fusion into a single unit of the little pictures, formed on the various aspects of nature.

It may be useful to illustrate the alternatives by an example. We now have, in physics, two theories of great power and interest: the theory of quantum phenomena and the theory of relativity. These two theories have their roots in mutually exclusive groups of phenomena. Relativity theory applies to macroscopic bodies, such as

estrelas. O evento de coincidência, que é em última análise uma colisão, é o evento primitivo na teoria da relatividade e define um ponto no espaço-tempo, ou, pelo menos, definiria um ponto se as partículas em colisão forem infinitamente pequenas. A teoria quântica tem suas raízes no mundo microscópico e, de seu ponto de vista, o evento de coincidência, ou de colisão, mesmo que ele ocorra entre partículas sem extensão espacial, não é primitivo e de forma alguma nitidamente isolado no espaço-tempo. As duas teorias utilizam conceitos matemáticos diferentes – um espaço Riemanniano de dimensão 4 e um espaço de Hilbert de dimensão infinita, respectivamente. Até agora, as duas teorias não puderam ser reunidas, isto é, não existe nenhuma formulação matemática da qual ambas as teorias sejam aproximações. Todos os físicos acreditam que a união das duas teorias é inerentemente possível e que iremos conseguir fazê-la. No entanto, é possível também imaginar que nenhuma união das duas teorias possa ser encontrada. O exemplo que demos ilustra as duas possibilidades anteriormente mencionadas, união e conflito, ambas concebíveis.

Para conseguirmos uma indicação de qual das alternativas devemos esperar que aconteça podemos fingir que somos um pouco mais ignorantes do que realmente somos e nos colocarmos num nível de conhecimento abaixo do que realmente possuimos. Se pudermos encontrar uma fusão de nossas teorias nesse nível mais baixo de conhecimento poderemos ficar confiantes de que encontraremos também uma fusão no nível do nosso conhecimento real. Por outro lado, se chegarmos, nesse nível mais baixo, a teorias mutuamente contraditórias não poderemos descartar a possibilidade de que as teorias permaneçam conflitantes no nível mais alto. O nível de conhecimento e de engenhosidade é uma variável contínua e é pouco provável que pequenas variações dessa variável transforme a ima-

stars. The event of coincidence, that is, in ultimate analysis of collision, is the primitive event in the theory of relativity and defines a point in space-time, or at least would define a point if the colliding particles were infinitely small. Quantum theory has its roots in the microscopic world and, from its point of view, the event of coincidence, or of collision, even if it takes place between particles of no spatial extent, is not primitive and not at all sharply isolated in space-time. The two theories operate with different mathematical concepts – the four dimensional Riemann space and the infinite dimensional Hilbert space, respectively. So far, the two theories could not be united, that is, no mathematical formulation exists to which both of these theories are approximations. All physicists believe that a union of the two theories is inherently possible and that we shall find it. Nevertheless, it is possible also to imagine that no union of the two theories can be found. This example illustrates the two possibilities, of union and of conflict, mentioned before, both of which are conceivable.

In order to obtain an indication as to which alternative to expect ultimately, we can pretend to be a little more ignorant than we are and place ourselves at a lower level of knowledge than we actually possess. If we can find a fusion of our theories on this lower level of intelligence, we can confidently expect that we will find a fusion of our theories also at our real level of intelligence. On the other hand, if we would arrive at mutually contradictory theories at a somewhat lower level of knowledge, the possibility of the permanence of conflicting theories cannot be excluded for ourselves either. The level of knowledge and ingenuity is a continuous variable and it is unlikely that a relatively small variation of this continuous variable changes the attainable picture of the world from inconsis-

gem que podemos ter do universo de inconsistente para consistente.<sup>1</sup> Considerado desse ponto de vista, o fato de que algumas das teorias que sabemos serem falsas fornecerem resultados tão incrivelmente precisos, é um fator adverso. Se tivéssemos um conhecimento um pouco menor, o grupo de fenômenos que essas teorias “falsas” explicam pareceria para nós suficientemente grande para “prová-las”. No entanto, consideramos essas teorias falsas pelo fato de que elas são, em última análise, incompatíveis em contextos mais abrangentes e, se um número suficiente dessas teorias falsas fosse descoberto, elas poderiam também estar em conflito, umas com as outras. De maneira similar, é possível que as teorias que consideramos “provadas” por um número de concordâncias numéricas que aparenta ser suficientemente grande, sejam falsas por estarem em conflito com teorias mais abrangentes mas que estejam fora do alcance de nossas descobertas. Se isso for verdade deveremos esperar conflitos entre nossas teorias, sempre que seu número cresça além de um certo ponto e assim que abranjam um número suficientemente grande de grupos de fenômenos. Em contraste com o artigo de fé mencionado anteriormente, este é o pesadelo do físico teórico.

- 1 Essa passagem foi escrita após muita hesitação. O autor está convencido de que é útil, em discussões epistemológicas, abandonar a idealização de que o nível da inteligência humana tem uma posição singular numa escala absoluta. E em alguns casos, pode até mesmo ser útil considerar as realizações possíveis no nível de inteligência de outras espécies. No entanto, o autor tem consciência de que suas reflexões seguindo as linhas sugeridas pelo texto são muito breves e foram insuficientemente criticadas para serem confiáveis.
- 2 This passage was written after a great deal of hesitation. The writer is convinced that it is useful, in epistemological discussions, to abandon the idealization that the level of human intelligence has a singular position on an absolute scale. In some cases it may even be useful to consider the attainment which is possible at the level of the intelligence of some other species. However, the writer also realizes that his thinking along the lines indicated in the text was too brief and not subject to sufficient critical appraisal to be reliable.

Vamos considerar alguns exemplos de teorias “falsas” que, em vista de sua falsidade, fornecem descrições alarmantemente precisas de alguns grupos de fenômenos. Com alguma boa vontade é possível descartar algumas das evidências que esses exemplos fornecem. As idéias iniciais e

tent to consistent.<sup>2</sup> Considered from this point of view, the fact that some of the theories which we know to be false give such amazingly accurate results is an adverse factor. Had we somewhat less knowledge, the group of phenomena which these “false” theories explain would appear to us to be large enough to “prove” these theories. However, these theories are considered to be “false” by us just for the reason that they are, in ultimate analysis, incompatible with more encompassing pictures and, if sufficiently many such false theories are discovered, they are bound to prove also to be in conflict with each other. Similarly, it is possible that the theories, which we consider to be “proved” by a number of numerical agreements which appears to be large enough for us, are false because they are in conflict with a possible more encompassing theory which is beyond our means of discovery. If this were true, we would have to expect conflicts between our theories as soon as their number grows beyond a certain point and as soon as they cover a sufficiently large number of groups of phenomena. In contrast to the article of faith of the theoretical physicist mentioned before, this is the nightmare of the theorist.

Let us consider a few examples of “false” theories which give, in view of their falseness, alarmingly accurate descriptions of groups of phenomena. With some goodwill, one can dismiss some of the evidence which these examples provide. The success of Bohr’s early and pioneering ideas on

pioneiras de Bohr sobre o átomo nunca tiveram grande sucesso e o mesmo pode ser dito dos epíclis de Ptolomeu. Nossa posição privilegiada possibilita uma descrição precisa de todos esses fenômenos que essas teorias primitivas não tinham condições de oferecer. Isso não é verdade para a, assim chamada, teoria do elétron livre que fornece uma descrição incrivelmente boa de muitas, senão de todas, as propriedades dos metais, dos semicondutores e isolantes. Em particular, ela explica o fato, nunca adequadamente compreendido pela “teoria real”, de que isolantes exibem uma resistência a corrente elétrica que pode chegar a ser  $10^{26}$  vezes maior do que aquela dos metais. Não existe, de fato, nenhuma evidência experimental para mostrar que a resistência não é infinita sob as condições em que a teoria do elétron livre nos leva a crer que ela seria infinita. Apesar disso, estamos convencidos de que a teoria do elétron livre é uma aproximação muito crua e que deveria, ao descrevermos todos os fenômenos referentes aos sólidos, ser substituída por algo mais adequado.

Vista do nosso ponto de vista privilegiado, a situação apresentada pela teoria do elétron livre é irritante mas é improvável que ela venha a apresentar alguma inconsistência que não possa ser superada. Essa teoria coloca em dúvida a importância que se deve atribuir, ao se verificar a correção de uma teoria, a concordância que ela tem com a experiência. Já nos acostumamos a essas dúvidas.

Ocorreria uma situação muito mais difícil e confusa se pudéssemos, algum dia, estabelecer uma teoria de fenômenos da consciência ou da biologia que fosse tão coerente e convincente como nossas atuais teorias do mundo inanimado. As leis de Mendel da hereditariedade e o trabalho subsequente em genes podem muito bem se tornar o começo dessa teoria no que se refere à biologia. Além disso, é muito possível que possa ser encontrado um argumento abstrato que mostre a existência de

the atom was always a rather narrow one and the same applies to Ptolemy's epicycles. Our present vantage point gives an accurate description of all phenomena which these more primitive theories can describe. The same is not true any longer of the so-called free-electron theory, which gives a marvelously accurate picture of many, if not most, properties of metals, semiconductors, and insulators. In particular, it explains the fact, never properly understood on the basis of the “real theory,” that insulators show a specific resistance to electricity which may be  $10^{26}$  times greater than that of metals. In fact, there is no experimental evidence to show that the resistance is not infinite under the conditions under which the free-electron theory would lead us to expect an infinite resistance. Nevertheless, we are convinced that the free-electron theory is a crude approximation which should be replaced, in the description of all phenomena concerning solids, by a more accurate picture.

If viewed from our real vantage point, the situation presented by the free-electron theory is irritating but is not likely to forebode any inconsistencies which are unsurmountable for us. The free-electron theory raises doubts as to how much we should trust numerical agreement between theory and experiment as evidence for the correctness of the theory. We are used to such doubts.

A much more difficult and confusing situation would arise if we could, some day, establish a theory of the phenomena of consciousness, or of biology, which would be as coherent and convincing as our present theories of the inanimate world. Mendel's laws of inheritance and the subsequent work on genes may well form the beginning of such a theory as far as biology is concerned. Furthermore, it is quite possible that an abstract argument can be found which shows that there is

um conflito entre essa teoria e os princípios aceitos pela física. O argumento poderia ser de uma natureza tão abstrata que não permitisse resolver o conflito, através da experiência, em favor de uma das teorias. Tal situação traria um grande abalo na fé que temos em nossas teorias e na crença da realidade de nossas concepções. Traria também um profundo senso de frustração em nossa procura pelo que chamamos de “derradeira verdade”. O que faz com que essa situação seja concebível é o fato de, na realidade, não sabermos a razão pela qual nossas teorias funcionam tão bem. O fato de fornecerem resultados precisos não é prova de sua veracidade nem de sua consistência. Na realidade, o autor acredita que, se compararmos as atuais leis da hereditariedade e as da física, algo muito próximo da situação descrita acima ocorrerá.

Permitam-me terminar num tom mais animador. O milagre da eficiência da linguagem matemática para formular as leis físicas é algo que nem merecemos nem entendemos. Deveríamos ser gratos por ele ocorrer e esperar que continue válido na pesquisa futura e que se estenda, para o bem ou para o mal, para o nosso prazer ou talvez para o nosso espanto, à amplas áreas do conhecimento.

O autor deseja manifestar sua gratidão ao Dr. M. Polanyi que, muitos anos atrás, influenciou profundamente seu pensamento em problemas de epistemologia, e a V. Bargmann cuja amigável crítica foi importante para atingir a clareza que possa ter sido atingida. É também muito grato a A. Shimony por ter revisto o presente artigo e chamado sua atenção para os artigos de C. S. Peirce.

a conflict between such a theory and the accepted principles of physics. The argument could be of such abstract nature that it might not be possible to resolve the conflict, in favor of one or of the other theory, by an experiment. Such a situation would put a heavy strain on our faith in our theories and on our belief in the reality of the concepts which we form. It would give us a deep sense of frustration in our search for what I called “the ultimate truth.” The reason that such a situation is conceivable is that, fundamentally, we do not know why our theories work so well. Hence, their accuracy may not prove their truth and consistency. Indeed, it is this writer’s belief that something rather akin to the situation which was described above exists if the present laws of heredity and of physics are confronted.

Let me end on a more cheerful note. The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning.

“*The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences,*” in *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, No. 1 (February 1960). New York: John Wiley & Sons, Inc. Copyright © 1960 by John Wiley & Sons, Inc.

