

Sobre as Ciências Dedutivas

Alfred Tarski

1 Constituintes Fundamentais de uma Teoria Dedutiva - Conceitos Primitivos e Definidos, Axiomas e Teoremas

Tentaremos agora expor os princípios fundamentais que devem ser aplicados na construção da Lógica e da Matemática.¹ A análise detalhada e a avaliação crítica desses princípios é tarefa de uma disciplina especial chamada de METODOLOGIA DAS CIÊNCIAS DEDUTIVAS ou METODOLOGIA DA MATEMÁTICA. É importante, para qualquer pessoa que pretenda estudar ou pesquisar uma ciência, tomar conhecimento da metodologia que é empregada na construção dessa ciência; iremos ver que, no caso da matemática, o conhecimento de seus métodos é de particular importância, uma vez que sem ele não se pode entender a natureza da matemática.

Os princípios que serão apresentados tem o propósito de assegurar para os conhecimentos adquiridos em lógica e matemática o mais alto grau possível de clareza e certeza. Desse ponto de vista, um método de procedimento seria ideal se nos permitisse explicar o significado de cada expressão e justificar cada afirmação dessa ciência. É fácil perceber que esse ideal não pode ser atingido. De fato, quando se tenta explicar o significado de uma expressão, usa-se, necessariamente, outras expressões; e para explicar, por sua vez, o significado dessas novas expressões, sem entrar num círculo vicioso, tem-se que recorrer a novas expressões distintas das anteriores e assim por diante. Temos assim o início de um processo que nunca poderá ser levado ao fim, um processo que, falando figuradamente, pode ser caracterizado como um RETORNO INFINITO - *regressus in infinitum*. No que se refere a justificação

¹Idéias muito relacionadas com as apresentadas nessa seção podem ser encontradas na literatura. Veja, por exemplo, o opúsculo (postumamente publicado), *De l'esprit geometrique et de l'art de persuader* do grande filósofo e matemático francês B. Pascal (1623-1662)

das afirmações, a situação é bem parecida; pois, para se estabelecer a validade de uma afirmação, é necessário referir-se a outras afirmações e (se não quisermos que um círculo vicioso ocorra) isso leva novamente a um retorno infinito.

Através de um compromisso entre o ideal inatingível e as possibilidades realizáveis na construção das disciplinas matemáticas emergiram certos princípios que podem ser descritos como a seguir.

Quando nos propomos a construir uma determinada disciplina, distinguimos, em primeiro lugar, um pequeno grupo de suas expressões que nos pareça ser imediatamente inteligíveis; as expressões desse grupo recebem o nome de TERMOS (CONCEITOS) PRIMITIVOS ou TERMOS INDEFINIDOS e as empregamos sem explicar seus significados. Ao mesmo tempo adotamos o seguinte princípio: não utilizar nenhuma outra expressão da disciplina considerada sem que seu significado tenha sido determinado com a ajuda dos termos primitivos e de expressões cujos significados já tenham sido previamente explicados. A setença que determina, dessa maneira, o significado de um termo chama-se DEFINIÇÃO e as expressões cujos significados foram dessa maneira explicados chamam-se TERMOS DEFINIDOS.

Procedemos de forma análoga em relação as afirmações da disciplina considerada. Escolhemos entre as afirmações da disciplina algumas que nos parecem evidentes e as escolhemos como AFIRMAÇÕES PRIMITIVAS ou AXIOMAS (também chamadas de POSTULADOS, embora não se vá usar esse termo com esse significado técnico aqui); aceitaremos essas afirmações como verdadeiras sem nenhum tipo de prova. Por outro lado, estabelecemos que qualquer outra proposição só será aceita como verdadeira se tivermos provado sua validade; nessa prova só podem ser usados axiomas, definições ou afirmações previamente demonstradas. Como se sabe, afirmações estabelecidas dessa forma são chamadas de PROPOSIÇÕES DEMONSTRADAS ou TEOREMAS e o processo utilizado para estabelecê-las é chamado de PROVA. Mais geralmente, se em lógica ou matemática estabelecemos uma proposição a partir de outras nos referiremos a esse processo como uma DERIVAÇÃO ou DEDUÇÃO e dizemos que a proposição assim estabelecida é DERIVADA, DEDUZIDA ou ainda que é uma CONSEQÜÊNCIA das outras proposições.

A lógica matemática contemporânea é uma das disciplinas construída de acordo com os princípios que acabamos de descrever; infelizmente, não foi possível, no reduzido espaço deste livro, dar a esse fato toda a atenção que ele merece. Qualquer disciplina que seja construída de acordo com esses

princípios já estará baseada na lógica; a lógica está, como diremos, pressuposta. Isso significa que todas as expressões e leis da lógica são tratadas em pé de igualdade com os termos primitivos e axiomas da disciplina que está sendo construída: os termos lógicos são usados, por exemplo, na formulação dos axiomas, teoremas e definições sem as explicações de seus significados e as leis lógicas são aplicadas em provas sem que se estabeleça previamente sua validade. Alguma vez é até mesmo conveniente usar, além da lógica, alguma outra disciplina matemática previamente construída; de maneira concisa, vamos nos referir a lógica e a essas outras teorias como DISCIPLINAS QUE PRECEDEM A DISCIPLINA EM CONSTRUÇÃO. Assim a lógica não pressupõe nenhuma disciplina precedente; na construção da aritmética como uma disciplina matemática, a lógica é a única disciplina precedente pressuposta; por outro lado, no caso da geometria é conveniente - embora não indispensável - pressupor não apenas a lógica mas também a aritmética.

Com referência à última observação é necessário fazer algumas correções na formulação dos princípios enunciados acima. Antes de empreendermos a construção de uma disciplina é preciso enumerar as disciplinas que irão preceder-la; todas as exigências referentes a definições de expressões e prova de afirmações deverão se restringir a disciplina em construção não devendo ser aplicadas às disciplinas precedentes.

O método utilizado para construir uma disciplina estritamente de acordo com os princípios estabelecidos acima é conhecido como MÉTODO DEDUTIVO; as disciplinas construídas através desse método recebem o nome de TEORIAS DEDUTIVAS.²

O ponto de vista de que a característica essencial que permite distinguir as disciplinas matemáticas de todas as outras disciplinas é o método dedutivo tem se tornado cada vez mais comum; não apenas toda teoria matemática é

²O método dedutivo não pode ser considerado uma conquista dos tempos recentes. Já nos *Elementos* do matemático grego **EUCLIDES** (aprox. 300 a.C.) encontramos uma apresentação da geometria que não deixa muito a desejar do ponto de vista dos princípios metodológicos aqui enunciados. Por 2200 anos os matemáticos viram no trabalho de **EUCLIDES** um modelo de ideal científico de exatidão. Um progresso essencial nesse campo ocorreu nos últimos 70 anos no decorrer dos quais os fundamentos da aritmética e da geometria foram construídos de acordo com todas as exigências da atual metodologia da matemática. Entre os trabalhos aos quais devemos esse progresso mencionaremos pelo menos os dois seguintes que já se tornaram de importância histórica: o trabalho coletivo *Formulaire de mathématiques* (Torino 1895 – 1908) cujo editor e principal autor é o lógico e matemático italiano **G. PEANO** (1858 – 1932) e *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig e Berin 1899) do grande matemático alemão **D. HILBERT** (1862 – 1943).

dedutiva mas também, reciprocamente, toda teoria dedutiva é uma disciplina matemática (de acordo com esse ponto de vista a lógica dedutiva também deve ser considerada uma disciplina matemática)

Não entraremos aqui na discussão dos argumentos em favor desse ponto de vista, apenas observamos que eles são ponderáveis.