VITAE
Apoio à Cultura, Educação e Promoção Social

Curso para Professores de Matemática do Segundo Grau.

Rio de Janeiro, 21 de janeiro a 1° de fevereiro de 1991.

Organização: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA

Colaboração: IBM Brasil
Fundação de Amparo à Pesquisa do
Estado do Rio de Janeiro, FAPERJ

4. Volume

1. Noção intuitiva de volume

O volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada. (Isto não é uma definição matemática, mas apenas uma idéia intuitiva.) Estamos interessados em medir a grandeza "volume" e para isso deveremos compará-la com uma unidade. O resultado dessa comparação será um número: a medida do volume.

Costuma-se tomar como unidade de volume um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, o qual será denominado cubo unitário. Seu volume, por definição, será igual a 1.

Assim sendo, o volume de um sólido S deverá ser um número que exprima quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. Como o sólido S pode ter uma forma bastante irregular, não é claro o que significa o "número de vezes" em que S contém o cubo unitário. Novamente, temos aqui uma idéia intuitiva, que devemos usar como guia e à qual devemos atribuir um significado preciso.

Suponhamos, por exemplo, que o sólido S cujo volume desejamos calcular seja um pedaço de metal, plástico ou outra substância impermeável. Mergulhando S num reservatório contendo uma quantidade conhecida de água, que o encha até os bordos, o volume S será igual ao volume do líquido transbordado e este pode ser medido simplesmente através de uma escala impressa na parede do reservatório.

Um tal processo prático de calcular volumes pode ter utilidade em casos simples, porém deixa muito a desejar, mesmo na prática, pois não permite considerar objetos muito grandes (qual o volume da lua?) nem muito pequenos (qual o volume de um elétron?). Além disso, não permite previsões como a seguinte: de que tamanho deve ser tomado o raio de um reservatório esférico para que este contenha x litros de gás?

Precisamos, portanto, obter métodos para o cálculo indireto dos volumes, métodos sistemáticos e gerais, que se apliquem tanto aos volumes grandes quanto aos pequenos, tanto aos casos concretos como aos abstratos. Este objetivo, como veremos, nos forçará a um reexame do conceito de volume, conduzindo-nos a uma definição precisa.

2. Volume de um bloco retangular.

Um *bloco retangular* é um sólido limitado por 6 retângulos: suas *faces*. Esses retângulos constituem 3 pares; em cada par os retângulos são iguais. Os lados dos retângulos são chamados as *arestas* do bloco. Um tijolo é um exemplo de um bloco retangular.

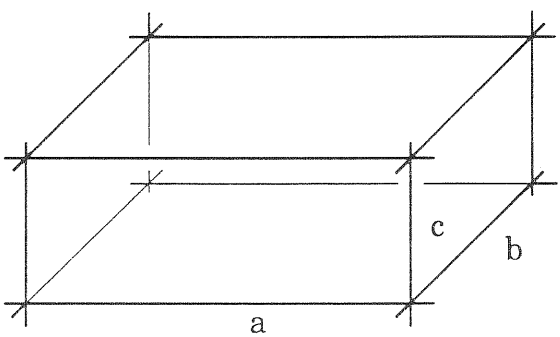


Fig. 1. As 3 arestas *a*, *b*, *c* determinam o bloco retangular.

Um bloco retangular fica inteiramente determinado quando se conhecem 3 de suas arestas que concorrem num ponto.

O *cubo* é um caso particular de bloco retangular em que as arestas têm todas o mesmo comprimento. As 6 faces de um cubo são quadrados iguais.

Um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento chama-se *cubo unitário*; por definição seu volume é 1. Se n é um número inteiro, um cubo C cuja aresta mede n unidades de comprimento pode ser decomposto em n^3 cubos unitários justapostos, logo o volume de C é n^3. A figura abaixo ilustra o caso $n = 4$.

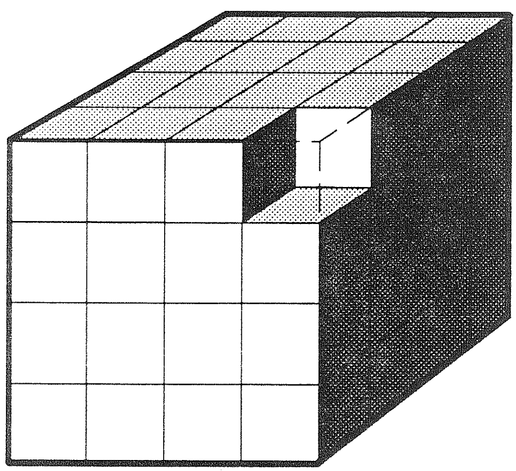


Fig. 2. Cubo de aresta 4 decomposto em $64 = 4^3$ cubos unitários justapostos.

Analogamente, decompondo cada aresta de um cubo unitário no mesmo número inteiro q de partes iguais, decompô-lo-emos em q^3 cubos justapostos, cada um com aresta $1/q$. Segue-se que um cubo cuja aresta mede $1/q$ (q inteiro) tem volume igual a $1/q^3$, ou seja $(1/q)^3$.

Mais geralmente, dado um cubo C cuja aresta tem como medida um número racional p/q, podemos decompor cada uma de suas arestas em p partes iguais, cada uma das quais tem comprimento $1/q$. Deste modo, o cubo C ficará decomposto em p^3 cubos justapostos, cada um dos quais tem aresta medindo $1/q$. O volume de cada cubo menor é $1/q^3$. Assim, o volume de C será

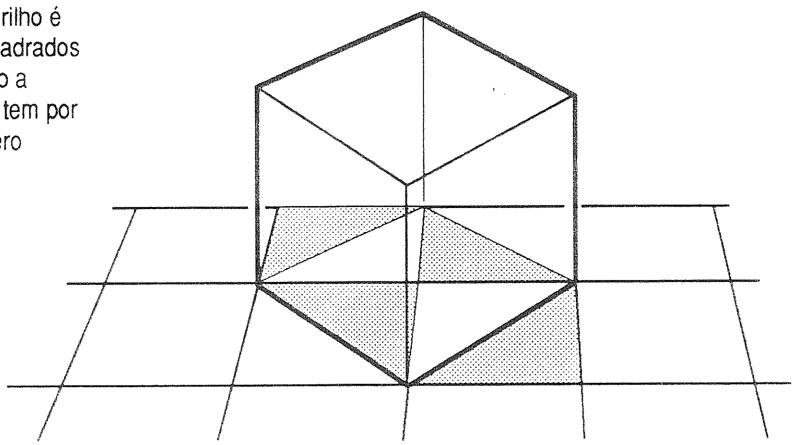
$$p^3 \times \frac{1}{q^3} = \left(\frac{p}{q}\right)^3.$$

Chegamos assim ao seguinte resultado: se a aresta de um cubo C tem para medida um número racional a, então o volume de C será igual a a^3.

Sob o ponto de vista estritamente prático, isto resolve o problema de calcular o volume de um cubo pois não é possível, através de medidas diretas, obter um número irracional como medida de uma aresta. Ninguém pode, através de um instrumento de medida, por mais sensível que ele seja, encontrar $\sqrt{2}$, ou π, como medida de um segmento. Poderemos, sim, obter resultados aproximados, como 1,414 ou 3,14159.

Entretanto, sob o ponto de vista teórico, tanto em Matemática Pura como em aplicações de natureza científica, números irracionais ocorrem. Desde Pitágoras já se sabia que, tomando o lado de um quadrado como unidade, a diagonal do mesmo tem para medida o número irracional $\sqrt{2}$. (Cfr. Seção 1 do Capítulo 1.)

Fig. 3. Se o ladrilho é formado por quadrados de lado 1, então a aresta do cubo tem por medida o número irracional $\sqrt{2}$.



Qual é então o volume de um cubo C cuja aresta tem para medida um número irracional b? Afirmamos que, ainda neste caso, tem-se $vol(C) = b^3$. Em conseqüência, a fórmula

$$\text{Volume de } C = (\text{aresta de } C)^3$$

é absolutamente geral, válida quer a aresta de C tenha medida inteira, racional ou irracional.

Para demonstrar que $vol(C) = b^3$ mesmo quando b é irracional, usaremos novamente o método da exaustão: mostraremos primeiro que se x é qualquer número menor do que b^3 então $x < vol(C)$. Depois mostraremos que se $y > b^3$ então $y > vol(C)$. Concluiremos daí que $vol(C) = b^3$.

Seja então, para começar, x um número tal que $x < b^3$. Podemos aproximar o número irracional b por um valor racional $r < b$, tão próximo de b que $x < r^3 < b^3$. Então o cubo C, cuja aresta tem medida b, contém um cubo D, cuja aresta tem para medida o número racional r. Segue-se que $vol(D) < vol(C)$. Mas já sabemos que $vol(D) = r^3$, porque r é racional. Concluímos que $r^3 < vol(C)$ e, portanto, $x < vol(C)$.

Usando um raciocínio inteiramente análogo, o leitor pode mostrar que se y for um número maior do que b^3, então $y > vol(C)$.

Seja agora B um bloco retangular cujas 3 arestas têm para medidas números racionais. Podemos sempre reduzir esses três números ao mesmo denominador e, portanto, supor que tais medidas são a/q, b/q e c/q, onde a, b, c e q são números inteiros.

Decompondo as três arestas do bloco B, respectivamente em a, b e c segmentos iguais, cada um deles de comprimento $1/q$, o bloco ficará decomposto em abc cubos justapostos, cada um desses cubos tendo aresta $1/q$ e, portanto, volume $1/q^3$. Segue-se que

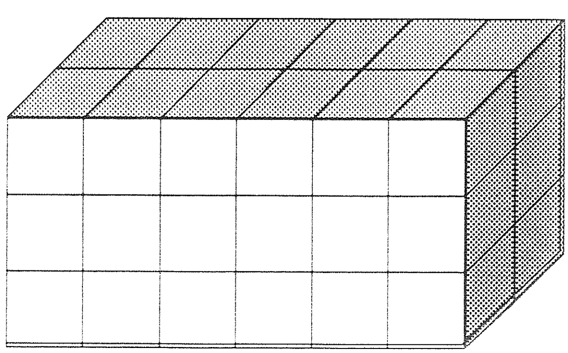


Fig. 4. Bloco subdividido em $6 \times 3 \times 2$ cubos justapostos, todos com o mesmo volume.

$$vol(B) = \frac{abc}{q^3} = \frac{a}{q} \cdot \frac{b}{q} \cdot \frac{c}{q}.$$

Por conseguinte, podemos enunciar: *Se um bloco retangular B tem arestas com medidas racionais a, b, c, seu volume será o produto dessas medidas, isto é,* $vol(B) = abc$.

Como no caso do cubo, a fórmula acima vale sejam quais forem as medidas das arestas. Tem-se portanto:

Dado um bloco retangular B, cujas arestas têm medidas a, b e c, seu volume é dado pela fórmula

$$vol(B) = abc.$$

A demonstração, como no caso do cubo, se faz pelo método da exaustão. Evidentemente esta fórmula inclui o caso particular em que $a = b = c$, portanto a fórmula do volume do cubo resulta dela.

Dado o bloco retangular B, com arestas medindo a, b, e c, suponhamos que o número x seja menor do que abc. Podemos encontrar números racionais $r < a$, $s < b$ e $t < c$ tão próximos de a, b e c respectivamente que

$$x < r.s.t < abc.$$

O bloco B contém um bloco menor C, cujas arestas medem r, s, e t, logo $vol(C) < vol(B)$. Mas já vimos que $vol(C) = r.s.t$. Portanto

$$x < r.s.t = vol(C) < vol(B),$$

isto é, $x < vol(B)$. Analogamente se mostra que todo número $y > abc$ é maior do que o volume de B. Portanto, $vol(B) = abc$.

Observação. Como no caso da área do retângulo, a fórmula do volume do bloco retangular também pode ser deduzida usando a teoria das proporções. Com efeito, indiquemos com $V(x, y, z)$ o volume do bloco retangular com arestas x, y e z. Para todo número natural n, temos

$$V(nx, y, z) = V(x, ny, z) = V(x, y, nz) = n.V(x, y, z)$$

porque cada um dos três primeiros números é o volume de um bloco formado pela justaposição de n blocos com arestas x, y, z. Além disso, é evidente que $V(x, y, z)$ é uma função crescente de cada uma das variáveis x, y e z. Segue-se então que o volume $V = V(x, y, z)$ é diretamente proporcional às arestas x, y e z, isto é, para todo número real positivo c, tem-se:

$$V(c.x, y, z) = V(x, c.y, z) = V(x, y, c.z) = c.V(x, y, z).$$

[Veja "Meu Professor de Matemática", página 165.] Então

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= V(x.1, y, z) = x.V(1, y, z) = x.V(1, y.1, z) \\ &= x.y.V(1, 1, z) = x.y.V(1, 1, z.1), \\ &= x.y.z.V(1, 1, 1) = x.y.z. \end{aligned}$$

pois $V(1, 1, 1)$ é o volume do cubo unitário.

3. Definição geral de volume

Acabamos de ver que a idéia intuitiva de volume de um sólido, como o "número de vezes" que esse sólido contém o cubo unitário, conduz diretamente a uma fórmula para o cálculo do volume de um bloco retangular.

Abordaremos em seguida o problema de calcular o volume de sólidos mais irregulares do que blocos. Como foi dito acima, é

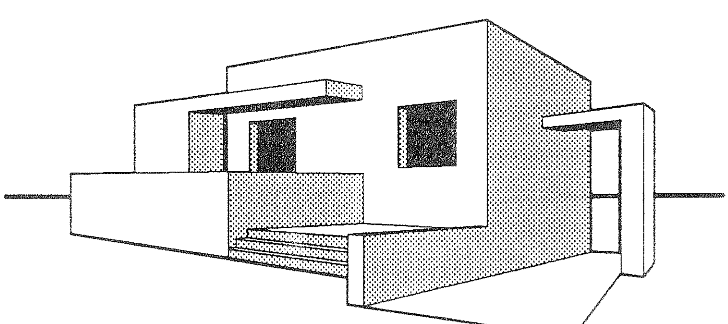


Fig. 5. O desenho acima mostra um bloco retangular. (Trata-se da reprodução simplificada de uma casa que realmente existe.)

necessário possuirmos uma definição mais precisa daquilo que entendemos por "volume de um sólido". Nosso objetivo nesta seção é chegar a uma tal definição geral.

Definição. Chamaremos *poliedro retangular* a todo sólido formado pela reunião de um número finito de blocos retangulares justapostos. É fácil obter o volume de um poliedro retangular: basta somar os volumes dos blocos retangulares que o constituem.

Dado um sólido S, desejamos definir precisamente o número $vol(S)$, ou seja, queremos dar um significado exato à idéia inicial, segundo a qual $vol(S)$ é o número que exprime quantas vezes S contém o cubo unitário.

Para cada poliedro retangular P contido em S, sabemos calcular $vol(P)$. O número $V = vol(S)$, que estamos procurando, deve satisfazer à condição

$$vol(P) \leq V \text{ para todo poliedro retangular } P \text{ contido em } S.$$

Os números $vol(P)$, volumes dos poliedros retangulares P contidos em S, fornecem aproximações inferiores para o volume de S. Acrescentando mais blocos retangulares a P, sempre tendo o cuidado de permanecer dentro de S, obteremos um poliedro retangular P', maior do que P, e $vol(P')$ será uma aproximação melhor para $vol(S)$.

Queremos que seja possível aproximar $vol(S)$ com tanta precisão quanto se deseje por volumes de poliedros retangulares contidos em S. Esta exigência equivale a requerer que $vol(S)$ seja o *número real cujas aproximações por falta são os volumes dos poliedros retangulares contidos em* S.

Isto significa que não apenas se tem $vol(S) \geq vol(P)$ para todo poliedro retangular P contido em S como também, dado qualquer número real r tal que $r < vol(S)$, é possível achar um poliedro retangular Q, contido em S, com

$$r < vol(Q) \leq vol(S).$$

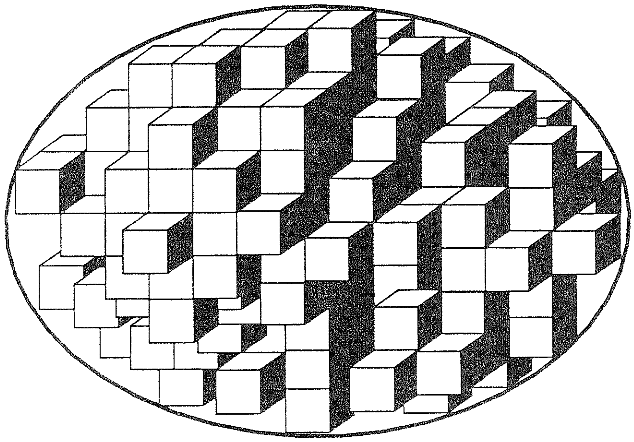


Fig. 6. Poliedro retangular, cujo volume é uma aproximação inferior para o volume do sólido que o contém.

Observação. (Aproximação por excesso.) Seja S um sólido cujo volume desejamos calcular. Podemos, ainda, considerar os poliedros retangulares Q que contêm o sólido S. Sabemos calcular o volume de cada um desses poliedros. O número procurado, $V = vol(S)$, deve também satisfazer à condição

$V \leq vol(Q)$ *para todo poliedro retangular* Q *contendo* S.

Os números $vol(Q)$, volumes dos poliedros retangulares que contêm o sólido S, são valores aproximados por excesso para o volume de S. Quanto menor for o bloco retangular Q contendo S, melhor será a aproximação $vol(Q)$ para o volume de S.

Podemos, então, afirmar que o número $V = vol(S)$ goza da seguinte propriedade:

> *Quaisquer que sejam os poliedros retangulares* P, *contido em* S, *e* Q, *contendo* S, *tem-se* $vol(P) \leq V \leq vol(Q)$.

Em cursos mais adiantados, demonstra-se que a propriedade acima caracteriza o volume $V = vol(S)$ para todos os sólidos S habitualmente construídos na Geometria. Em outras palavras, dado um sólido geométrico S, seu volume $V = vol(S)$ é o único número real que satisfaz à condição acima destacada.

4. Princípio de Cavalieri

Convenhamos o seguinte: a definição de volume dada na seção anterior satisfaz à necessidade lógica de precisar bem os conceitos e pôr os fundamentos em firme base. Mas, sob o ponto de vista do cálculo, ela é de pouco valor prático. Seria extremamente laborioso calcular diretamente os volumes dos sólidos a partir daquela definição.

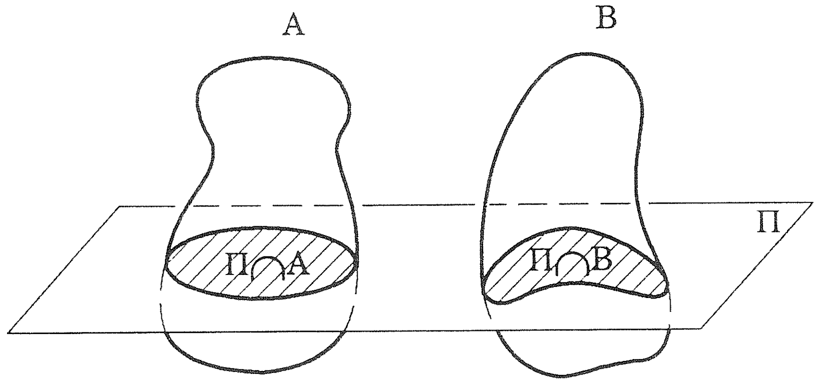


Fig. 7. Se, para cada plano horizontal Π, as seções planas Π∩A e Π∩B e tiverem a mesma área, então o Princípio de Cavalieri assegura que os sólidos *A* e *B* têm o mesmo volume.

Abordaremos agora um resultado, conhecido como *Princípio de Cavalieri*, cujo valor prático para o cálculo de volumes será evidenciado nos parágrafos seguintes.

Escolhamos, de uma vez por todas, um plano, que chamaremos *plano horizontal*. Todos os planos paralelos a ele serão também chamados planos *horizontais*.

Sejam A e B dois sólidos. Cada plano horizontal Π, determina, nos sólidos A e B, seções planas, que indicaremos respectivamente com $\Pi \cap A$ e $\Pi \cap B$. Elas são as interseções do plano Π com os dois sólidos dados. Se, para todos os planos horizontais Π, a figura plana $\Pi \cap A$ tem a mesma área que a figura plana $\Pi \cap B$, o Princípio de Cavalieri afirma que o volume de A e o volume de B são iguais.

Enunciaremos então:

Princípio de Cavalieri. *Sejam A e B dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas com áreas iguais, então* $vol(A) = vol(B)$.

Quando se desenvolve, em cursos mais avançados, a teoria dos volumes a partir da definição que demos na seção anterior, o Princípio de Cavalieri é um teorema, isto é, ele pode ser demonstrado. Não daremos sua demonstração aqui porque ela envolve conceitos avançados da Teoria da Medida, logo foge destas lições.

Aceitaremos, portanto, o Princípio de Cavalieri como verdadeiro. Ele se torna plausível se observarmos o seguinte: duas fatias muito finas, de mesma altura, cujas bases têm a mesma área, têm aproximadamente o mesmo volume. Tanto mais aproximadamente quanto mais finas são. Os dois sólidos dados podem ser cortados, através de planos horizontais, em fatias finas com volumes aproximadamente iguais. Sendo o volume de cada sólido a soma dos volumes dessas fatias, e a aproximação entre os volumes das fatias podendo tornar-se tão precisa quanto se deseje, vemos que $vol(A) = vol(B)$.

Os argumentos acima esboçados não constituem uma demonstração do Princípio de Cavalieri mas dão uma forte indicação de que ele é verdadeiro.

O Princípio de Cavalieri reduz o cálculo de volumes ao cálculo de áreas. Os parágrafos seguintes mostrarão como ele pode ser aplicado. Aqui, daremos as primeiras aplicações.

Definição. Um *paralelepípedo* é um sólido limitado por 6 paralelogramos: suas faces. Estas faces agrupam-se em 3 pares; em cada par as 2 faces são paralelas, congruentes, e dizem-se *opostas*. Quando se toma uma das faces do paralelepípedo como *base*, a *altura* correspondente é a distância entre esta face e sua oposta, ou seja é o comprimento da perpendicular baixada de um ponto da face oposta sobre o plano da base.

As *arestas* de um paralelepípedo são os lados dos paralelogramos que constituem suas faces.

Um paralelepípedo cujas faces são retângulos é um bloco retangular.

Teorema 1. *O volume de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Tomemos uma das faces do paralelepípedo P como base; o plano que a contém será chamado plano horizontal. Sobre este plano, tomemos um retângulo cuja área a seja igual à área do paralelogramo que serve de base ao paralelepípedo dado. Com altura h, igual à do paralelepípedo, construamos um bloco retangular B, tendo como base o retângulo recém-obtido. Já sabemos que $vol(B) = a.h$. Para concluir que $vol(P) = a.h$, como

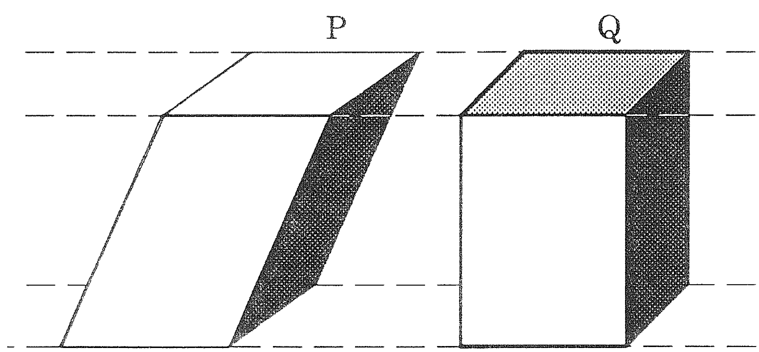


Fig. 8. O paralelepípedo P e o bloco retangular B têm a mesma altura h e suas bases têm a mesma área α.

queremos demonstrar, aplicaremos o Princípio de Cavalieri. Ora, dado qualquer plano horizontal Π, a seção plana $\Pi \cap P$ é um paralelogramo congruente à base de P, enquanto $\Pi \cap B$ é um retângulo, também congruente à base de B. Segue-se que $\Pi \cap P$ e $\Pi \cap B$ têm a mesma área, seja qual for o plano horizontal Π. Concluímos, então, pelo Princípio de Cavalieri, que

$$vol(P) = vol(B) = a.h.$$

Isto termina a demonstração.

O argumento acima pode ser generalizado, a fim de fornecer a fórmula para o volume de um cilindro. Definamos, inicialmente, o que entendemos por *cilindro*.

Definição. Começamos com uma figura plana F, chamada a *base* do cilindro. Tomaremos o plano que contém F como horizontal. O cilindro fica determinado por sua base F e por um segmento de reta g, não paralelo ao plano horizontal, chamado *geratriz* do cilindro, do seguinte modo: por cada ponto de F levantamos um segmento de reta paralelo a, e do mesmo comprimento que, g. A reunião desses segmentos é o *cilindro* C, de base F e geratriz g.

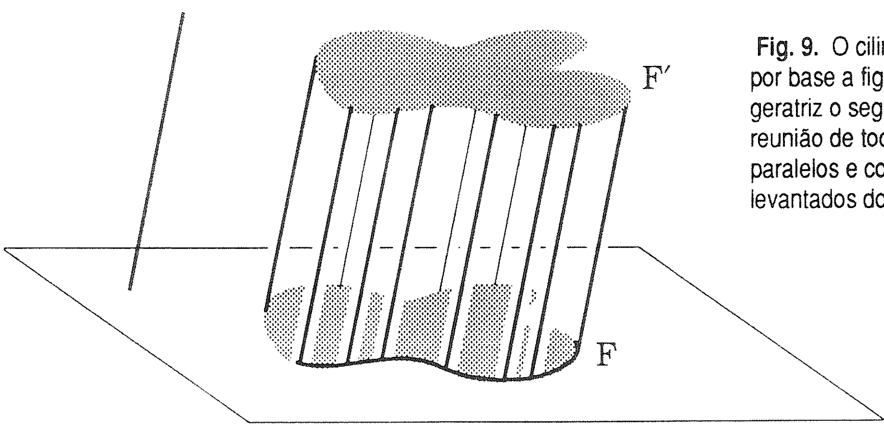


Fig. 9. O cilindro C, que tem por base a figura plana F e por geratriz o segmento g, é a reunião de todos os segmentos paralelos e congruentes a g, levantados dos pontos de F.

As extremidades, não pertencentes à base F, dos segmentos que geram o cilindro C, constituem uma figura plana F', contida num plano paralelo ao plano de F. A distância entre estes planos (isto é, o comprimento da perpendicular baixada de um ponto de F' sobre o plano de F) chama-se a *altura* do cilindro C.

Teorema 2. *O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Como no Teorema 1, construímos, no plano que contém F, um retângulo cuja área a seja igual à área de F e, tendo este retângulo como base, construímos um bloco retangular B cuja altura h seja igual à altura do cilindro C. Qualquer que seja o plano horizontal Π, a seção $\Pi \cap C$ é uma figura plana congruente a F, enquanto $\Pi \cap B$ é um retângulo congruente à base de B. Segue-se que $\Pi \cap C$ e $\Pi \cap B$ têm a mesma área, qualquer que seja o plano horizontal Π. Em virtude do Princípio de Cavalieri, concluimos que

$$vol(C) = vol(B) = a.h,$$

o que demonstra o Teorema 2.

Note-se que a definição de cilindro que acabamos de dar inclui, como caso particular, a possibilidade de ser a base F um polígono. Quando isso acontece, o sólido C fica limitado por faces planas e chama-se um *prisma*. Assim, temos a seguinte

Definição. *Prisma* é um cilindro cujas bases são polígonos.

Em particular, um paralelepípedo é um prisma: qualquer de suas faces pode servir-lhe de base. O Teorema 1 é, portanto, um caso particular do Teorema 2. Observe-se que as demonstrações são inteiramente semelhantes.

No caso em que a geratriz do cilindro é perpendicular ao plano da base, este chama-se um *cilindro reto*. No caso particular de ser a base um polígono, temos um *prisma reto*. Um paralelepípedo reto cuja base é um retângulo é simplesmente um bloco retangular.

Note-se ainda que, como conseqüência do Teorema 1, qualquer que seja a face do paralalepípedo que se tome como base, o produto de sua área pela altura correspondente é o mesmo.

5. Volume de um cone

Definição. Um *cone* K, tendo como *base* uma figura plana F, e como *vértice* um ponto P situado fora do plano de F, é a reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto P a todos os pontos de F.

O plano que contém a base F do cone K será considerado horizontal. A distância do vértice P a este plano, ou seja, o comprimento da perpendicular baixada de P sobre o plano, chama-se *altura* do cone.

Lema. *Seja K um cone de vértice P, altura h_0 e base F_0 situada no plano horizontal Π_0. Seja Π outro plano horizontal, entre P e Π_0. Indiquemos com F a seção $\Pi \cap K$ e com h a distância entre P e Π, isto é, a altura do cone de base F e vértice P. Tem-se a relação*

$$\frac{\text{área } (F_0)}{\text{área } (F)} = \left(\frac{h_0}{h}\right)^2.$$

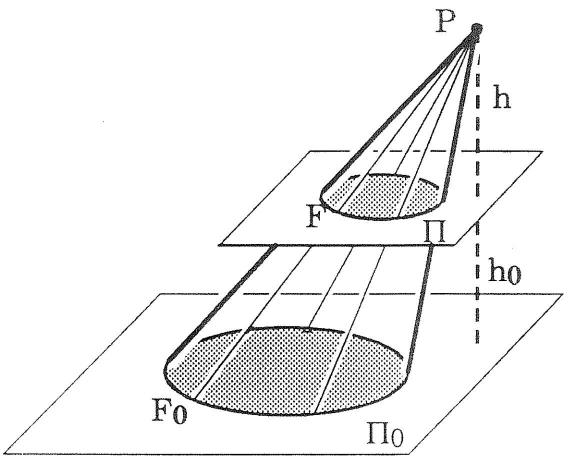


Fig. 10. A razão entre as áreas de F e F_0 é igual ao quadrado da razão entre as alturas h e h_0.

Demonstração. Basta observar que a correspondência $\sigma:\Pi \to \Pi_0$, que associa a cada ponto X do plano Π o ponto $X' = \sigma(X)$ de Π_0, obtido como interseção da semi-reta PX com o plano Π_0, é uma semelhança, com fator de semelhança igual a h_0/h. (Vide Figura 11, Capítulo 3.) Evidentemente, a semelhança σ transforma F em F_0, logo o lema segue-se do Teorema 6, Capítulo 3.

Teorema 3. *Dois cones de mesma altura e bases com áreas iguais têm volumes iguais.*

Demonstração. Sejam K e L dois cones com mesma altura h_0 e bases F_0 e G_0 com mesma área. Podemos admitir que as bases F_0 e

G_0 estão no mesmo plano Π_0 e os vértices desses cones estão do mesmo lado de Π_0. Para todo plano horizontal Π, situado entre esses vértices e o plano Π_0, as seções $F = \Pi \cap K$ e $G = \Pi \cap L$ têm áreas iguais pois, segundo o Lema,

$$\frac{área(F)}{área(F_0)} = \frac{área(G)}{área(G_0)} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^2,$$

onde h é a distância do vértice P (e, igualmente, do vértice Q) ao plano Π. Segue-se do Princípio de Cavalieri que $vol(K) = vol(L)$, como queríamos demonstrar.

Um cone cuja base é um polígono chama-se uma *pirâmide*. As faces laterais de uma pirâmide são triângulos. Uma pirâmide cuja base também é um triângulo chama-se um *tetraedro*.

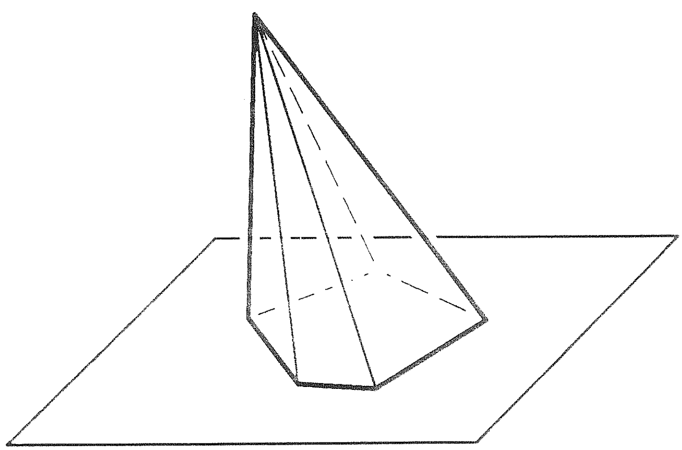


Fig. 11. Uma pirâmide com base pentagonal.

Teorema 4. *O volume de um cone é igual a um terço do produto da altura pela área da base.*

Demonstração. Em virtude do Teorema 3, o volume do cone dado é igual ao de uma pirâmide cuja base é um triângulo ABC que tem área igual à da base do cone e cujo vértice B' é tal que o segmento $B'B$ é perpendicular ao plano ABC e tem comprimento igual à altura do cone. Basta então provar que o volume da pirâmide

ABCB′ é igual a um terço do produto da área da base *ABC* pela altura *BB′*.

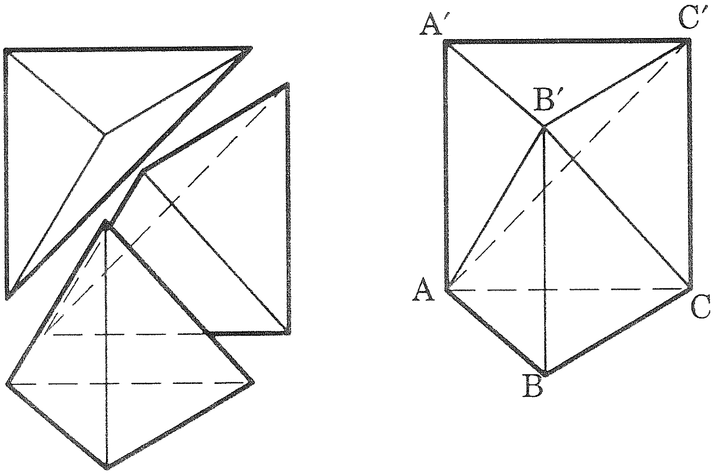


Fig. 12. O prisma à direita foi decomposto em 3 pirâmides *ABCB′*, *A′B′C′A* e *ACC′B′* cada uma das quais tem volume igual ao da pirâmide à direita.

Levantemos *AA′* e *CC′*, perpendiculares ao plano *ABC*, de comprimentos iguais ao de *BB′*. Obtemos um prisma reto de bases *ABC* e *A′B′C′*. Como o volume desse prisma é igual ao produto da área da base pela altura, basta mostrar que ele pode ser decomposto em 3 pirâmides, cada uma delas com volume igual ao da pirâmide *ABCB′*. Ora, as 3 pirâmides são a própria *ABCB′*, a pirâmide *A′B′C′A* (com base congruente à base da primeira e com mesma altura) e a pirâmide *ACC′B′*, cuja base *ACC′* é congruente à base *AA′C′* da segunda e cuja altura, a partir do vértice *B′*, é igual à altura da segunda pirâmide, *AA′C′B′*, a partir do mesmo vértice *B′*. Isto conclui a demonstração.

Corolário. *O volume de um cone de altura h, cuja base é um círculo de raio R, é igual a* $\frac{1}{3}\pi R^2 h$.

6. Volume da esfera

Definição. A *esfera* de centro num ponto O e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor do que ou igual a R. Em outras palavras, tal esfera é a reunião de todos os segmentos de reta de origem em O e comprimento igual a R.

Teorema 5. *O volume de uma esfera de raio R é igual a* $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Demonstração. Consideremos um cilindro reto cuja base é um círculo de raio R e cuja altura tem medida $2R$. Imaginemos que a esfera dada repouse sobre o plano horizontal, no qual está contida a base do cilindro.

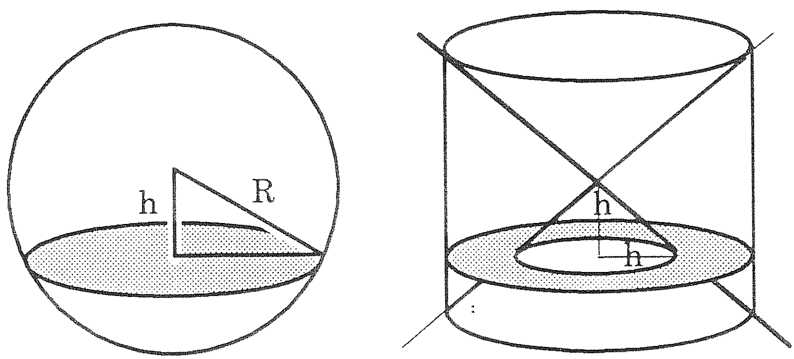


Fig. 13. Cortando a esfera por um plano horizontal que dista h do centro, obtemos um círculo cuja área mede $\pi(R^2 - h^2)$. O mesmo plano determina (entre as paredes do cone e do cilindro, à direita) um anel circular cuja área também mede $\pi(R^2 - h^2)$.

Com vértice no ponto médio do segmento que liga os centros dos dois círculos básicos, (superior e inferior) do cilindro, construamos dois cones, interiores ao cilindro, com bases naqueles dois círculos que limitam o cilindro. Consideremos o sólido T que é limitado exteriormente pela superfície lateral do cilindro e, interiormente, pelos 2 cones. O volume desse sólido T é igual à diferença entre o volume do cilindro ($2\pi R^3$) e o volume dos dois cones ($2\pi R^3/3$), ou seja,

$$vol(T) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Assim o Teorema 5 estará demonstrado se provarmos que o volume da esfera é igual ao volume do sólido T. Para isso, em virtude do Princípio de Cavalieri, é suficiente mostrar que a esfera S e o sólido T determinam seções $\Pi \cap S$ e $\Pi \cap T$, de igual área, em cada plano horizontal Π. Dado o plano Π, seja h sua distância ao centro da esfera ou (o que é o mesmo) ao vértice comum dos dois cones. Então $\Pi \cap S$ é um círculo de raio

$$\sqrt{R^2 - h^2},$$

enquanto $\Pi \cap T$ é uma coroa circular cujo raio externo é igual a R e raio interno igual a h. Segue-se que

$$\text{área}(\Pi \cap S) = \pi\,(R^2 - h^2),$$

e

$$\text{área}(\Pi \cap T) = \pi\,(R^2 - h^2).$$

Isto conclui a demonstração do Teorema 5.

7. Área do cilindro, do cone e da esfera

O estudo das áreas das superfícies curvas, bem como o próprio conceito de superfície, quando abordado com maior generalidade, apresenta dificuldades que o situam em nível superior ao do presente texto. Por isso nos limitaremos a uma apresentação elementar dos casos clássicos.

Área do cilindro.

Inicialmente, consideraremos um cilindro reto de altura h, cuja base é um círculo de raio R. Sua superfície é formada por dois círculos de raio r mais a *superfície lateral*, reunião de segmentos de comprimento h, perpendiculares à base, levantados a partir dos pontos da circunferência básica.

Cortando o cilindro ao longo de um desses segmentos, podemos desenrolar sua superfície lateral, sem alterar a área, de modo a obter um retângulo de base $2\pi R$ e altura h, logo a área da superfície lateral do cilindro é igual à área desse retângulo, que vale $2\pi Rh$.

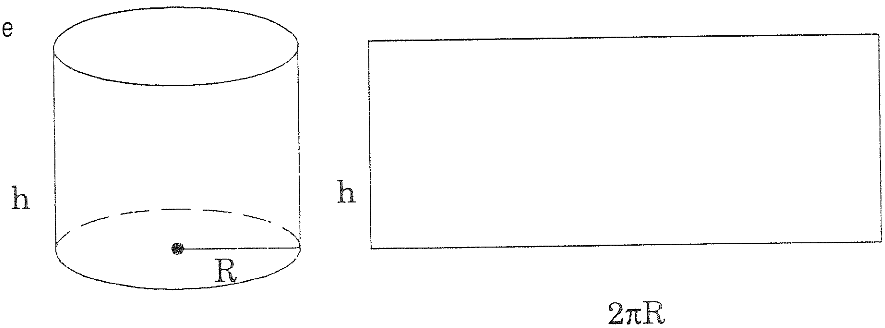


Fig. 14. O cilindro e sua superfície lateral aplicada sobre o plano.

Área do cone.

Em seguida consideremos o cone reto de altura h, com base num círculo de raio R. Sua superfície é formada pelo círculo básico mais a superfície lateral, que é a reunião de todos os segmentos de reta ligando o vértice do cone aos pontos da circunferência básica. Dizer que o cone é *reto* significa afirmar que esses segmentos têm todos os mesmo comprimento l, que se costuma chamar a *geratriz* do cone. Equivalentemente, isto quer dizer que a reta ligando o vértice do cone ao centro do círculo básico (eixo do cone) é perpendicular ao plano desse círculo. Evidentemente, $l = \sqrt{h^2 + R^2}$.

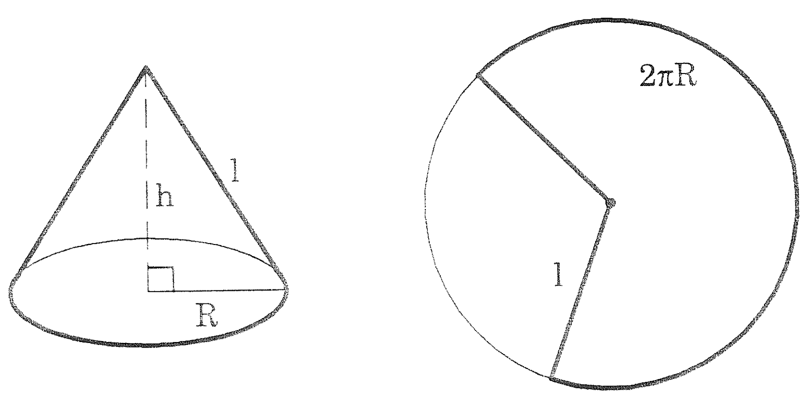


Fig. 15. O cone e o desenvolvimento de sua superfície lateral sobre o plano.