COLEÇÃO DIDÁTICA DO BRASIL

Série Colegial VOL. 10

F. FURQUIM DE ALMEIDA, JOÃO B. CASTANHO,
EDISON FARAH e BENEDITO CASTRUCCI

Matemática

Destinado à primeira série dos cursos Clássicos e Científico

EDITORA DO BRASIL S/A
Rua Conselheiro Nébias, 787
SÃO PAULO
1944

§ 7.º — TEOREMA DE EULER. POLIEDROS REGULARES

I. *Teorema de Euler*

Em todo poliedro convexo [38] (ou superfície poliédrica convexa fechada), vale a expressão

$$V - A + F = 2$$

onde **V** é o número de vértices, **A**, o número de arestas e **F** o número de faces.

DEMONSTRAÇÃO

Vamos provar êste teorema, por recorrência (indução completa).

Consideremos em primeiro lugar então uma superfície poliédrica aberta, isto é, conforme a definição do § 4.º desta unidade. O caso mais simples de tais superfícies é um polígono plano, isto é, de uma face. Vemos que para êste vale a relação

$$(1) \qquad V - A + F = 1$$

pois um polígono tem tantos vértices quantos lados, isto é, $V = A$ e $F = 1$.

Vamos admitir que valha a relação (1) para uma superfície aberta de $k - 1$ faces e provemos que vale para uma de k faces.

Suponhamos uma superfície poliédrica aberta de $k - 1$ faces, com um só contôrno (§ 4.º) de m arestas e m vértices.

---

(38) Êste teorema vale também para uma superfície poliédrica côncava, o que se vê com o exemplo da fig. 110, pois temos, $V = 12$, $A = 18$, $F = 8$, de onde $V - A + F = 12 - 18 + 8 = 2$.

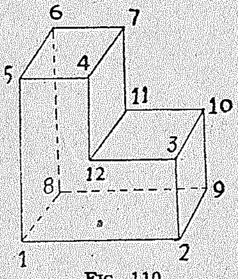

FIG. 110

O teorema de Euler é de natureza topológica, isto é, vê-se que a relação $V - A - F = 2$ não se altera, deformando-se a superfície com continuidade, sem haver coincidência dos elementos da superfície. Está ligado ao problema da conexão da superfície e não à concavidade ou convexidade, por isso, é que nas demonstrações não intervem a hipótese de ser convexo, que figura no enunciado, o qual não é geral. Recomendamos para maiores esclarecimentos a Geometria de Hadamard.

Acrescentemos a esta superfície uma nova face de n vértices e n arestas e suponhamos que h arestas desta face coincidem com h arestas das m arestas do contôrno.

Contemos os elementos da nova superfície poliédrica, A', V', F', isto é, arestas, vértices e faces.

Notemos que os vértices V da superfície primitiva aumentam de $n - (h + 1) = n - h - 1$, pois se h arestas das n coincidiram, então o número de vértices coincidentes é $h + 1$.

Podemos por $V' = V + n - h - 1$.

O número de arestas A aumenta de $n - h$, pois h coincidiram.

Temos então $A' = A + n - h$.

Quanto a F' é evidentemente igual a $F + 1$.

Calculemos $V' - A' + F'$.

Temos então:

$$V' - A' + F' = V + n - h - 1 - (A + n - h) + F + 1 =$$
$$= V + n - h - 1 - A - n + h + F + 1 = V - A + F.$$

Mas $V - A + F = 1$, logo

$V' - A' + F' = 1$.

Consideremos agora uma superfície poliédrica convexa fechada. Tirando-se uma face, teremos uma superfície poliédrica aberta, para a qual vale

$$V - A + F = 1.$$

Acrescentando-se a face, que a torna fechada, aumentamos F de uma unidade, mas não alteramos nem V e nem A, logo para os poliedros fechados a relação é

$$V - A + F = 2$$

como queríamos provar.

CONSEQÜÊNCIAS

Definição. Os poliedros para os quais vale a relação de Euler são denominados Eulerianos.

Definição. Chamam-se poliedros de Platão aos Eulerianos que satisfazem às seguintes condições:

a) tôdas as faces têm o mesmo número de arestas;

b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas.

Teorema 85. Os poliedros de Platão são sòmente cinco.

DEMONSTRAÇÃO

V, A, F são os números de vértices, arestas e faces.

Suponhamos cada face com n arestas e então ao todo nF arestas; porém como cada aresta é dêste modo contada duas vezes, temos

$$(1) \qquad 2A = nF.$$

Se cada ângulo poliédrico tem m arestas, então temos mV arestas mas como cada aresta é assim contada duas vezes, temos

$$(2) \qquad 2A = mV .$$

D e (1) e (2), vem

$$(3) \qquad nF = mV .$$

Tomando-se a relação de Euler: $V - A + F = 2$ e substituindo V e A em função do F, pelas relações (3) e (1), temos:

$$(4) \qquad \frac{Fn}{m} - \frac{nF}{2} + F = 2$$

$$(5) \qquad F\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right) = 2$$

$$(6) \qquad F = \frac{2}{\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1}$$

$$(7) \qquad F = \frac{4\,m}{2\,n - m\,n + 2\,m}$$

$$(8) \qquad F = \frac{4\,m}{2\,(n + m) - m\,n}$$

Evidentemente $m \geqslant 3$ e $n \geqslant 3$.
Examinemos então as possibilidades:

1.º) $m = 3$ e então $F = \dfrac{12}{6 - n}$

a) $n = 3$, $F = \dfrac{12}{3} = 4$, temos o poliedro de quatro faces, que se chama *tetraedro*.

b) $n = 4$, $F = \dfrac{12}{2} = 6$, temos o poliedro de seis faces, que se chama *hexaedro*.

c) $n = 5$, $F = \dfrac{12}{1} = 12$, temos o poliedro de doze faces, que se chama *dodecaedro*.

2.º) $m = 4$, $F = \dfrac{16}{8 - 2n}$: Para $n = 3$, temos o poliedro de oito faces, que se chama *octaedro*.

3.º) $m = 5$, $F = \dfrac{20}{10 - 3n}$. Para $n = 3$, temos o poliedro de vinte faces, que se chama *icosaedro*.

Demonstremos que para $m \geqslant 6$ e $n \geqslant 3$, a expressão (8) não tem sentido.

Eliminando o denominador temos:

$$(9) \quad F\,(2n + 2m - mn) = 4\,m$$

Fazendo-se $m = 6 + p$ (p inteiro) e $n = 3 + q$ (q inteiro), temos por substituição em (9)

$$F\,[2\,(3 + q) + 2\,(6 + p) - (6 + p)\,(3 + q) = 4\,(6 + p)$$

$$F\,(6 + 2q + 12 + 2p - 18 - 6q - 3p - pq) = 24 + 4p$$

$$F\,(-4q - p - pq) = 24 + 4p$$

$$-F\,(4q + p + pq) = 24 + 4p$$

Vemos que para $p \geqslant 0$ e $q \geqslant 0$, o segundo membro é sempre positivo, enquanto que o primeiro membro é sempre não positivo (negativo ou nulo), o que é absurdo.

Portanto, não podendo admitir valores para $m \geqslant 6$ e $n \geqslant 3$, vemos que sòmente temos os cinco poliedros obtidos.

Teorema 86. A soma dos ângulos de tôdas as faces de um poliedro Euleriano convexo é igual a 4 (V — 2) ângulos retos, designando com **V**, o número de vértices.

DEMONSTRAÇÃO

Chamemos com $n_1, n_2, \ldots n_F$, os números de lados das F faces. Para cada polígono de *n* lados temos que a soma dos ângulos é igual a $2\,(n - 2)$ ângulos retos, logo a soma S procurada é:

$$S = 2\,(n_1 - 2) + 2\,(n_2 - 2) + \ldots + 2\,(n_F - 2)$$

$$S = 2\,n_1 - 4 + 2\,n_2 - 4 + \ldots + 2\,n_F - 4$$

$$S = 2\,(n_1 + n_2 + n_F) - 4\,F.$$

Como $n_1 + n_2 + \ldots + n_F = 2A$, temos:

$$S = 2 \times 2A - 4F$$

$$(1) \quad S = 4A - 4F = 4\,(A - F).$$

Pela relação de Euler

$$V - A + F = 2$$

$$\text{ou } V - 2 = A - F$$

e daí substituindo em (1), vem:

$$S = 4\,(V - 2).$$

II. *Poliedros regulares*

Definição. Um poliedro convexo é regular quando as faces assim como os ângulos poliédricos são regulares e iguais.

Teorema 87. Os poliedros regulares são poliedros de Platão e portanto são sòmente cinco.

DEMONSTRAÇÃO

Com efeito, como as faces são regulares e iguais, segue que tôdas elas têm o mesmo número de arestas. Por outro lado, os ângulos poliédricos são iguais, e então todos têm o mesmo número de arestas. Estando satisfeitas estas duas condições, os poliedros são de Platão, e portanto são sòmente cinco. (39).

Examinemos os cinco tipos de poliedros.

Tetraedro. Tem quatro faces. Como $n = 3$ e $m = 3$ (I, dêste §), temos em cada face, 3 vértices e como são 4 faces, temos 3×4 vértices. Mas cada vértice pertence a 3 planos, logo o número de vértices é $12/3$, isto é, 4.

O número de arestas determinamos, pela relação $V - A + F = 2$, isto é, $A = 6$.

Hexaedro. Tem 6 faces. Como $m = 3$ e $n = 4$ (teorema 85, I, dêste §), temos que cada face tem 4 vértices e portanto ao

---

(39) Pode-se demonstrar que sòmente podemos ter cinco poliedros regulares, sem o teorema de Euler. Com efeito, seja n o número de lados de cada face e m o número de arestas de cada ângulo poliédrico de um poliedro regular. Sabemos que o ângulo de um polígono regular é $\frac{2(n-2)}{n}$ de ângulo reto e como a soma das faces de um ângulo poliédrico é menor que quatro ângulos retos, temos a desigualdade

$$\frac{2(n-2)}{n} \cdot m < 4 \quad \text{ou} \quad \frac{2n-4}{n} \cdot m < 4.$$

Sabemos que $m \geqslant 3$ e $n \geqslant 3$, logo $m = 3 + p$ e $n = 3 + p$ (p e q inteiros). Substituindo na desigualdade e eliminando os denominadores, temos $2(3+p) + 2(3+q) > (3+p)(3+q)$ ou seja

$$3 > p + q + pq$$

Esta desigualdade é satisfeita para $p = 0$ e $q = 0$, isto é, $n = 3$; $m = 3$ e $p = 1$ e $q = 0$, isto é, $m = 4$ e $n = 3$; $p = 0$, $q = 1$, isto é, $m = 3$ e $n = 4$; $p = 2$, $q = 0$, isto é, $m = 5$ e $n = 3$; e $p = 0$ e $q = 2$, isto é, $m = 3$ e $n = 5$.

todo temos 6×4 vértices. Porém, cada vértice pertence a tres faces ($m = 3$), logo $24/3$, isto é, 8 vértices.

O número de arestas, calcula-se com $V - A + F = 2$, e vem $A = 12$.

Dodecaedro. Tem 12 faces. Como $m = 3$ e $n = 5$ (teorema 85), temos que cada face tem 5 vértices e portanto ao todo vêm 5×12 vértices. Porém, cada vértice pertence a três faces ($m = 3$), logo $60/3$, vem 20 vértices.

O número de arestas, vem com $V - A + F = 2$, $A = 30$.

Octaedro. Tem 8 faces. Como $m = 4$, e $n = 3$ (teorema 85), temos que cada face tem 3 vértices e portanto ao todo vêm 3×8 vértices. Mas, cada vértice pertence a 4 faces ($m = 4$), logo $24/4$, e são seis vértices.

O número de arestas, vem com $V - A + F = 2$, $A = 12$.

Icosaedro. Tem 20 faces. Como $m = 5$ e $n = 3$ (teorema 85), temos que cada face tem 3 vértices e portanto ao todo vêm 3×20 vértices. Mas, cada vértice pertence a 5 faces ($m = 5$), logo $60/5$, isto é, 12 vértices.

O número de arestas, vem com $V - A + F = 2$, $A = 30$.

	F	V	A
Tetraedro	4	4	6
Hexaedro	6	8	12
Dodecaedro	12	20	30
Octaedro	8	6	12
Icosaedro	20	12	30

Nota. Examinando-se o quadro atrás, vemos que: o hexaedro tem tantas faces quantos vértices tem o octaedro, bem como tantos vértices quantas faces, porém, o número de arestas é o mesmo; assim acontece com o dodecaedro e o icosaedro.

Os poliedros que estão nessa relação chamam-se *duais*. O hexaedro e o octaedro são duais, assim como o dodecaedro e o icosaedro.

Procurando-se o dual do tetraedro, vemos que é um tetraedro, portanto o tetraedro é auto-dual.

Nas figuras adiante, temos os poliedros regulares ,e os processos de construção material, a qual pode ser feita em cartolina, para melhor fixação das formas.

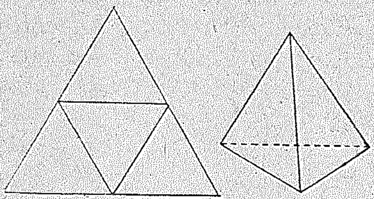

FIG. 111

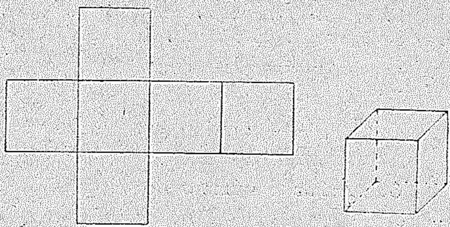

FIG. 112

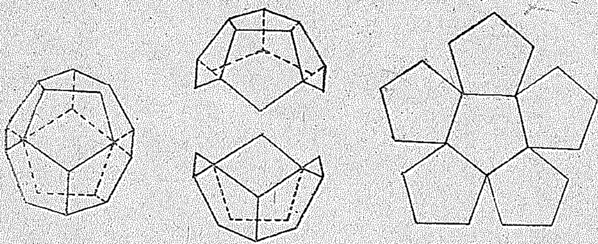

FIG. 113

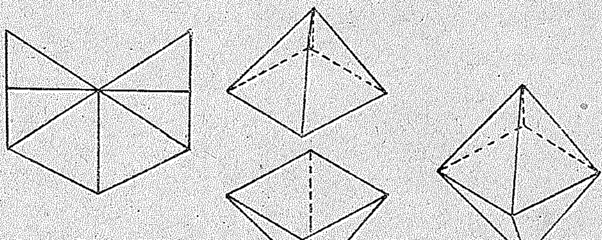

FIG. 114

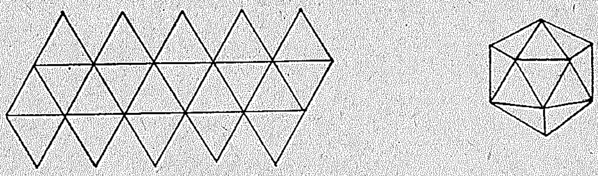

FIG. 115

EXERCÍCIOS

§ 6.°

1. O número de vértices de um poliedro é igual ao número de faces. Dar a expressão do número de faces ou de vértices em função do número de arestas. Demonstrar que na questão acima, o número de arestas não pode ser impar.

2. Verificar que não pode haver um poliedro com número par de faces, tendo cada uma o mesmo número par de lados.

3. Achar o número de vértices de um poliedro que tem a faces de n lados, b faces de m lados e c faces de r lados. Exame das possibilidades.

4. Um poliedro convexo tem 15 arestas. A soma dos ângulos das faces é 32 ângulos retos. Quantas faces têm de cada espécie, sabendo-se que sòmetne são faces quadrangulares e pentagonais?

5. Sabendo-se que a soma dos ângulos das faces de uma pirâmide (ou um prisma, um tronco de pirâmide) é 4 (V — 2) ângulos retos, dar o tipo de pirâmide (prisma, ou tronco), conhecida a soma 4 (V — 2). Condições de possibilidade.

6. Calcular a área e o volume de um tetraedro regular em função da aresta a.

7. Idem de um octaedro regular em função da aresta a.