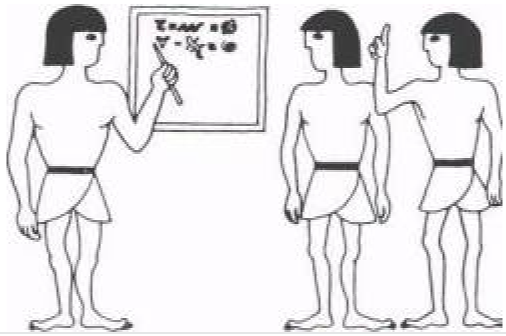


Arquimedes, a esfera e o cilindro

Geraldo Ávila
IMECC-UNICAMP

Preliminares

Severino de Souza relata na RPM 9 (9) um dos muitos episódios interessantes sobre a vida e a obra de Arquimedes. No presente artigo trataremos de outro episódio, referente às descobertas que Arquimedes fez sobre a área e o volume da esfera.

Plutarco, um escritor grego do 1° século d.C., é autor de um livro chamado "As Vidas dos Homens Ilustres" (8). No capítulo referente à vida de Marcelo, o general romano que comandou o saque de Siracusa, ele dedica boa parte de sua narrativa ao grande geômetra grego. Em particular, conta Plutarco que de todas as descobertas que Arquimedes fez, a que o geômetra mais apreciava era a relação de áreas e volumes de um cilindro e da esfera nele contida ((8), p. 276). Mais precisamente, consideremos uma esfera de raio ***R,*** inscrita num cilindro circular reto, de altura *2R* e cuja base tem raio *R* (Fig. l).

$$\frac{V_E}{V_C} = \frac{A_E}{A_C} = \frac{2}{3}$$

Figura l. "... entre o muito que inventou parece-me que o que mais apreciava era a demonstração da proporção que há entre o cilindro e a esfera nele contida, pelo que pediu a seus parentes que, quando morresse, mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera com uma inscrição da proporção pela qual o que contém excede o conteúdo" (Plutarco). Cícero quando servia na Sicília como questor, encontrou uma lápide com uma esfera inscrita num cilindro, pelo que julgou haver descoberto o túmulo de Arquimedes. Cuidou então de restaurá-lo, já que ele se encontrava totalmente abandonado.

Então o *volume do cilindro é 3/2 do volume da esfera, e a área total do cilindro também é 3/2 da área da esfera.* Ainda segundo Plutarco, Arquimedes teria pedido a seus parentes e amigos que quando morresse mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera, com uma inscrição da proporção acima referida. Cícero, quando exercia funções de magistrado romano na Sicília, encontrou uma lápide contendo uma esfera inscrita num cilindro. Como ele mesmo conta, julgou ter achado o túmulo de Arquimedes e cuidou de restaurá-lo. Segundo o autor Howard Eves ((5), p. 89), há pouco mais de vinte anos, em 1965, durante uma escavação para construir um hotel em Siracusa, uma escavadeira deu com uma pedra com a mesma figura antiga de um cilindro contendo uma esfera. Assim, o túmulo de Arquimedes teria sido novamente encontrado nos tempos modernos. Mas desta vez faltou alguém com a clarividência de um Cícero e, ao que parece, esse túmulo está agora definitivamente perdido...

...os caminhos da descoberta quase sempre são diferentes dos processos da demonstração.

A relação de áreas e de volumes do cilindro e da esfera nele contida, como descrevemos acima, figura como um corolário das Proposições 33 e 34 de um dos livros de Arquimedes, intitulado "Sobre a Esfera e o Cilindro, parte I". Esse livro está vazado em estilo rigoroso, num encadeamento preciso de postulados, definições e teoremas. Aliás, esse é o estilo das demais obras de Arquimedes que chegaram até nós e que são conhecidas desde a Idade Média. Tão grande é a preocupação com o rigor e com a estruturação lógica das demonstrações, que o leitor sequer percebe como o autor teria chegado a suas descobertas. Aliás, isto é freqüente em Matemática, pois os caminhos da descoberta quase sempre são diferentes dos processos da demonstração. (A propósito, veja (4).) Em conseqüência disso, os estudiosos das obras de Arquimedes muitas vezes manifestaram surpresa diante de seus escritos, sentindo-se frustrados por não conseguirem entender como ele fez muitas de suas descobertas. Houve até quem suspeitasse que ele usasse algum processo de descoberta que propositadamente escondera da posteridade.

(*) Área lateral mais as áreas das duas bases.

Uma descoberta sensacional

J. L. Heiberg (1854-1928), ilustre professor dinamarquês de Filologia, prestou inestimável serviço à História da Matemática, pelas suas notáveis pesquisas sobre as obras gregas antigas. Esse homem vasculhou praticamente toda; as bibliotecas européias, estudando e comparando diferentes manuscritos de obras antigas, num trabalho que exige competência lingüística e científica, paciência beneditina e habilidade de um Sherlock Holmes. A ele devemos a organização e edição moderna das obras de Euclides e Arquimedes, que formam a principal fonte para as traduções inglesas dessas obras por outro eminente especialista da História da Matemática Grega, Thomas L. Heath, da Universidade de Cambridge, Inglaterra.

Estava assim desvendado um mistério que havia intrigado os matemáticos por séculos.

Pois bem, Heiberg já havia publicado as obras de Euclides e Arquimedes no final do século passado, quando veio a saber, pela leitura de um artigo numa revista especializada, da existência de um manuscrito encontrado no Mosteiro do Santo Sepulcro em Jerusalém e posteriormente levado para Constantinopla. O artigo contava que o manuscrito de Jerusalém — um "códice", para usar terminologia própria — continha escritos religiosos, mas por baixo do texto religioso havia outra escrita, de natureza matemática. Por tudo o que leu sobre o códice, e pelo seu conhecimento de obras antigas, Heiberg começou a suspeitar que esse códice contivesse, por baixo da leitura religiosa, alguma obra de Arquimedes. E não deu outra coisa. Ele foi a Constantinopla, onde examinou o documento, estudou tanto o original quanto as fotografias que dele tirou; e em 1906, num artigo publicado numa revista alemã de Filologia, anunciou ao mundo o seu grande achado: quase 200 páginas de texto das obras de Arquimedes, muitas já conhecidas. Porém, — e isto é que é a parte mais sensacional, — no códice encontrava-se também o texto quase completo de uma obra de Arquimedes até então desconhecida, na qual o geômetra revela o procedimento por ele usado para chegar a muitas das descobertas que fez! Estava assim desvendado um mistério que havia intrigado os matemáticos por séculos, qual seja, o de saber como Arquimedes conseguia fazer suas descobertas.

O manuscrito encontrado em Jerusalém, e levado para Constantinopla, é um palimpsesto, isto é, um pergaminho usado para nele se escrever várias vezes. Convém lembrar que o pergaminho era um material caro. Era e é. Hoje nós dispomos do papel, tão barato que dele abusamos muito, num condenável descaso com a Ecologia. Mas imagine, leitor, se você dependesse de pergaminho para escrever!... Certamente não iria jogar fora um que tivesse sido usado, mas cuidaria de raspá-lo ("palimpsesto" significa "raspado novamente") e polir sua superfície para usá-lo de novo. Por aí dá para imaginar o trabalho de detetive que teve Heiberg para decifrar o texto subjacente. É realmente admirável que ele tenha conseguido ler as quase 200 páginas do códice! Não fosse a competência de Heiberg e talvez até hoje, ou mesmo para sempre, o novo livro de Arquimedes permanecesse ignorado! Mencionemos, por fim, que o texto de Arquimedes encontrado no códice de Jerusalém data do século X. A escrita religiosa que lhe foi sobreposta é de alguma época dos séculos XII, XIII ou XIV.

Pesando o cilindro, a esfera e um cone

O novo livro de Arquimedes, dado a conhecer por Heiberg em 1906, é conhecido como "O Método", justamente porque nele o geômetra grego descreve um "método mecânico" para investigar questões matemáticas.

Arquimedes tinha o costume de enviar suas obras aos sábios de Alexandria, prefaciando-as com cartas a esses sábios. Seu livro, "O Método", contém como prefácio uma carta a Eratóstenes de Alexandria, a qual começa assim:

> *Arquimedes a Eratóstenes,*
> *Saudações.*
>
> *Enviei-lhe em outra ocasião alguns teoremas descobertos por mim, meramente os enunciados, deixando-lhe a tarefa de descobrir as demonstrações então omitidas... Vendo em você um dedicado estudioso, de considerável eminência em Filosofia e um admirador da pesquisa matemática, julguei conveniente escrever-lhe para explicar as peculiaridades de um certo método pelo qual é possível investigar alguns problemas de Matemática por meios mecânicos... Certas coisas primeiro se tornaram claras para mim pelo método mecânico, embora depois tivessem de ser demonstradas pela Geometria, já que sua investigação pelo referido método não conduzisse a provas aceitáveis. Certamente é mais fácil fazer as demonstrações quando temos previamente adquirido, pelo método, algum conhecimento das questões do que sem esse conhecimento... Estou convencido de que ele será valioso para a Matemática, pois pressinto que outros investigadores da atualidade ou do futuro descobrirão, pelo método aqui descrito, outras proposições que não me ocorreram.*

É oportuno notar, a propósito das palavras finais da citação acima, que o chamado "método dos indivisíveis", inventado no século XVII, e que deu origem ao Cálculo Diferencial e Integral, é muito parecido com o antigo "método mecânico" de Arquimedes. Tanto um quanto outro carecem de uma fundamentação sólida, mas contêm os ingredientes que facilitam as descobertas e que, no século XVII, foram decisivos para grandes avanços da Matemática. Devemos refletir sobre estas coisas para bem apreciar os traços de um gênio.

No livro "O Método", Arquimedes explica várias de suas descobertas, mas aqui vamos nos cingir apenas ao caso da esfera. Ele procede da seguinte maneira: Sejam *ABCD* um círculo como ilustra a Fig. 2, com diâmetros perpendiculares *AC e BD; AFG um* triângulo (retângulo em *A)* isósceles, com base *FG* e altura *AC;* e *EFGH* um retângulo. Girando esta figura em torno do eixo *CC'* obtemos: uma esfera, gerada pelo círculo *ABCD;* um cone, gerado pelo triângulo *AFG;* e um cilindro, gerado pelo retângulo *EFGH*. Seja *MN* uma reta no plano da Fig. 2, perpendicular a *AC,* cortando este segmento no ponto *Q*. Como *QP* = *AQ* e o triângulo *OA Q* é retângulo, temos:

$$QP^2 + QO^2 = AQ^2 + Q0^2 = AO^2$$

Por outro lado, o triângulo *OAC é* retângulo em *O* e $OQ \perp AC$, logo $AO^2 = AQ \bullet AC$. Então,

$$QP^2 + Q0^2 = AQ \bullet AC,$$

donde obtemos, notando que *QM* = *AC* e tomando *A C'* = *A C,*

$$\frac{QP^2 + QO^2}{QM^2} = \frac{AQ \cdot AC}{QM^2} = \frac{AQ}{AC} = \frac{AQ}{AC'}$$

Portanto,

$$\frac{\pi QP^2 + \pi QO^2}{\pi QM^2} = \frac{AQ}{AC'}, \text{ ou } \left(\pi QP^2 \ldots\right.$$

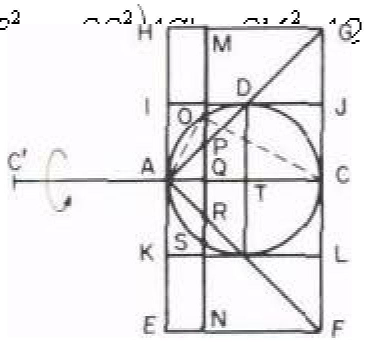


Figura 2

Esta relação é agora interpretada como traduzindo o equilíbrio de pesos numa alavanca *QC'* com fulcro em *A.* De fato, pela lei da alavanca (dada pelo próprio Arquimedes em seu livro "Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas"), a relação acima nos diz que os círculos de raios *QP* e *QO* , quando transferidos para *C'*, equilibram o círculo de raio *QM* localizado em *Q*. (Nesse raciocínio estamos imaginando os pesos dos círculos proporcionais às suas áreas.) Até aqui o raciocínio matemático é perfeitamente rigoroso, mas agora vem a parte heurística do argumento; consideramos o cilindro como união infinita dos círculos de raio *QM, Q* variando de *A* até *C*; e analogamente para a esfera e o cone. Remontamos a esfera e o cone no extremo *C'* da alavanca (Fig. 3) e concluímos(*) que esses sólidos devem equilibrar o cilindro com centróide no extremo T da alavanca, onde $AT = \frac{1}{2}AC$. (Agora os peso são tomados como proporcionais a seus proporcionais a seus volumes.) Então, sendo V_e, C_0 e C_i, os volumes da esfera, do cone e do cilindro respectivamente, teremos:

$$\frac{C_0 + V_e}{C_i} = \frac{AT}{AC'} = \frac{1}{2}$$

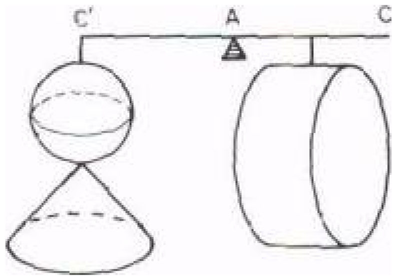


Figura 3

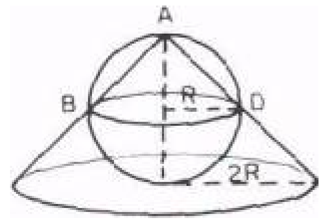


Figura 4

$$C_i = 2(C_0 + V_e),$$

(•) Esta conclusão é que constitui realmente a parte heurística do raciocínio, sem justificação matemática, pois estamos passando de uma soma infinita de áreas finitas (ou volumes infinitesimais) para um volume finito.

Arquimedes já sabia que $C_i = 3C_0$ (resultado este que ele atribui a Eudoxo na mesma carta-prefácio a Eratóstenes citada acima). Substituindo este resultado na equação anterior e simplificando, vem: $C_0 = 2Ve$ Mas como $CG = 2TD$ (veja a Fig. 2), segue-se que o volume C_0 é 8 vezes o volume do cone obtido por rotação do triângulo *ABD,* como ilustra a Fig. 4, isto é:

$$C_0 = 8 \cdot \frac{\pi R^3}{3},$$

onde *R é o* raio da esfera. Daqui e de $C_0 = 2V_e$, resulta finalmente a fórmula do volume da esfera:

$$V_e = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

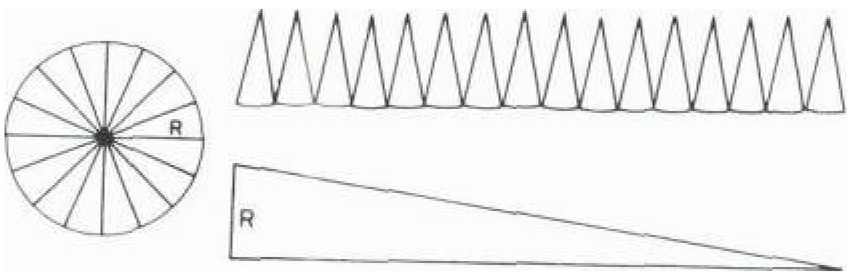
Um admirável raciocínio por analogia

Terminada a "demonstração" acima, referente ao volume da esfera, Arquimedes faz o seguinte comentário:

> *Deste teorema, segundo o qual o volume da esfera é quatro vezes do cone tendo por base um círculo máximo da esfera e altura igual ao raio da esfera, eu concebi a idéia de que a superfície da esfera é quatro* vezes *a de um de seus círculos máximos; pois, a julgar pelo fato de que a área do círculo é igual à de um triângulo que tem por base a circunferência altura igual ao raio, vejo que, do mesmo modo, o volume da esfera é igual ao do cone com base igual à superfície da esfera e altura igual ao raio.*

Este trecho encerra um notável raciocínio analógico. Segundo Aaboe ([1] p. 124), "este é o primeiro e um dos mais preciosos exemplos de ousada analogia na História da Matemática". Vale a pena analisar detidamente o raciocínio que leva Arquimedes a concluir que a área da esfera é "quatro vezes a de de seus círculos máximos...", isto é, $4\pi R^2$. Ele compara a situação da esfera relativamente ao cone com a situação do círculo relativamente a um triângulo tendo por base a circunferência e altura igual ao raio. Ora, este último fato é a conclusão a que chegamos quando imaginamos o circulo decomposto um número muito grande de setores iguais como ilustra a Fig. 5. Juntando dos esses setores lado a lado, é fácil ver que a soma de suas áreas é igual à *área* de qualquer triângulo com base $C = 2\pi R$ e altura *R*. (Arquimedes demonstrou este fato rigorosamente em um outro de seus livros, intitulado "A Medida do Círculo".)

Motivado pela equivalência do círculo com o triângulo, Arquimedes infere que a esfera também equivale a um cone, segundo a parte final da citação acima. (Decerto ela estava imaginando a esfera decomposta em um grande número de setores cônicos, como imaginava o círculo decomposto em setores triangulares.) Aí reside também sua justificativa para concluir que a superfície da esfera é quatro vezes a da base daquele cone menor *(ABD)* da Fig. 4, já que ele mostrou que o volume da esfera é quatro vezes o volume do cone.



$C = 2\pi R$

Figura 5

O raciocínio de Arquimedes é realmente muito interessante e merece ser analisado detidamente. Vale a pena ler e reler suas próprias palavras com vagar para apreciar a riqueza de pensamento do grande geômetra.

Observações quase finais

Devemos notar que em seu livro "Sobre a Esfera e o Cilindro, parte II", Arquimedes demonstrou rigorosamente, pelo método chamado de exaustão e dupla redução ao absurdo(*), os resultados sobre o volume e a superfície da esfera. Como dissemos antes, os raciocínios que descrevemos aqui Arquimedes os considerava muito válidos como instrumentos de descoberta, mas que deveriam ser posteriormente suplementados com as demonstrações rigorosas.

É costume deduzir a fórmula do volume da esfera, na escola de 2° grau, pelo chamado *Princípio de Cavalieri,* como se pode ver em (7), cap. 6; e em (6), p. 199 e seguintes. E o leitor que analisar o método mecânico de Arquimedes e o procedimento que utiliza o Princípio de Cavalieri há de notar uma grande semelhança entre eles.

Queremos mencionar, por fim, que Arquimedes nunca escreveu as fórmulas do volume e da área da esfera, como de resto nunca escreveu fórmula alguma. Não há, em todos os seus livros, uma única fórmula, porque a Matemática Grega era essencialmente geométrica. As relações métricas eram sempre expressas na forma de proporções, como na Fig. l. Como já foi explicado em outra oportunidade (3), era assim porque, ao resolver a crise de fundamentos do século V a.C., Eudoxo criou a teoria das proporções, tornando óbvia a necessidade dos números irracionais. Embora a solução fosse brilhante, por evita os números, ela acabou confinando a Matemática nos limites da Geometria sem dúvida uma das principais causas de estagnação da Matemática na antiguidade.

(•) Este método está descrito no artigo (2), p. 41.

Arquimedes e a Medalha Fields

Que é a Medalha Fields e que tem Arquimedes a ver com ela?

John Charles Fields (1863-1932) foi um matemático canadense, professo da Universidade de Toronto. Participou ativamente como um dos principais organizadores do Congresso Internacional de Matemática de 1924 em Toronto. A propósito, cabe mencionar que esses congressos internacionais vêm-se realizando desde 1897. A cada quatro anos ocorre um desses congressos, em localidades diferentes, como o campeonato mundial de futebol. Pois bem, quando do congresso de 1924, o Professor Fields propôs que fosse criado um premio a ser concedido, em cada congresso, aos matemáticos que mais se tivessem destacado pelas suas pesquisas. Esse prêmio começou a ser concedido, na forma de uma medalha de ouro, a partir do congresso de 1936. Ele é hoje o prêmio de maior prestígio em Matemática, conhecido como "Medalha Fields", embora isto contrarie o expresso desejo do Professor Fields, segundo o qual o prêmio deveria ter "caráter internacional e tão impessoal quanto possível, sem ligação com nomes de qualquer país, instituição ou pessoa".

Reproduzimos, a seguir, o anverso e o reverso da Medalha Fields para que o leitor veja com seus próprios olhos onde os matemáticos do século **XX** foram buscar a pessoa e o fato que eles decerto consideram o paradigma de Matemático e o símbolo de sua ciência: Arquimedes, a Esfera e o Cilindro.

A Medalha Fields traz no anverso a efigie de Arquimedes, com seu nome em grego

(Αρχιξηδους)

e a seguinte inscrição:

TRANSIRE SVVM PECTVS MVNDOQVE POTIRE

(Superar as próprias limitações e dominar. o universo.)

No reverso da Medalha aparece uma esfera inscrita num cilindro com a inscrição:

CONGREAGAT1EX TOTO ORBE MATEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBVERE.

(Matemáticos de todo o mundo reunidos prestam homenagens por obras notáveis.)

Referências

(1) Asger Aaboe: *Episódios da História Antiga da Matemática,* Publicação SBM, 1984.

(2) Geraldo Ávila: *Arquimedes, o Rigor e o Método,* Matemática Universitária, n? 4 (Dezembro de 1986).

(3) Geraldo Ávila: *Eudoxo, Dedekind, Números Reais e Ensino da Matemática,* RPM 7 (1985).

(4) Geraldo Ávila: *Geometria e Imaginação,* RPM 3 (1983).

(5) Howard Eves: *Greul Moments in Mathemalics before 1650,* Mathematical Association of América, 1980.

(6) Imenes, Trotta e Jakubovic: *Matemática Aplicada,* vol. l, Editora Moderna.

(7) Elon Lages Lima: *Áreas e Volumes,* Publicação SBM.

(8) Plutarco: *As Vidas dos Homens Ilustres,* vol. 3, Editora das Américas, São Paulo, pp. 268 a 280. Edição em inglês na coleção "Great Books of lhe Western Worid" da "Enciclopaedia Britannica Inc.", onde figura como vol. 14, pp. 252 a 255.

(9) Severino de Souza: *A rquimedes e a Coroa do Rei,* RPM 9 (1986).