



A Geometria e as Distâncias Astronômicas na Grécia Antiga

RPM 01

Geraldo Ávila

Depto de Matemática
Universidade de Brasília
70910 – Brasília - DF

Os tamanhos do Sol e da Lua e as distâncias desses astros à Terra já eram calculados na antiguidade, séculos antes de Cristo; mas poucas pessoas sabem como eram feitos esses cálculos. Eles se baseiam em idéias que são muito simples e geniais ao mesmo tempo e que estão intimamente ligadas a noções fundamentais de Geometria, como semelhança de triângulo e proporcionalidade, servindo, pois, como excelente motivação ao estudo dessa disciplina. Por isto mesmo essas questões devem ser divulgadas, já que elas ainda não aparecem nos livros de 1º e 2º graus.

Qual o mais distante: o Sol ou a Lua?

Para constatar que o Sol está mais distante da Terra que a Lua, basta observar atentamente as várias fases da Lua. Se ela estivesse mais longe de nós que o Sol, então, por simples análise de suas várias posições relativamente ao Sol e à Terra (a Fig. 1 ilustra quatro dessas posições), concluimos que ela estaria sempre iluminada pelo Sol quando vista da Terra. Em particular, não haveria lua nova! E haveria duas posições da Lua, em 1 e em 3, onde ela seria lua cheia, esta última em pleno meio-dia, o que nunca acontece realmente. A hipótese contrária, de que o Sol está mais distante da Terra que a Lua, é a única compatível com as várias fases da Lua, em particular com a ocorrência de luas novas. Outro fato a corroborar esta hipótese é a ocorrência de eclipses do Sol, que só são possíveis com a Lua mais próxima da Terra que o Sol.

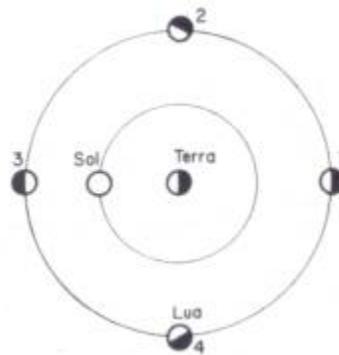


Fig. 1

Quão mais distante? A idéia de Aristarco.

Para descobrir quão mais distante que a Lua se encontra o Sol, devemos aprofundar um pouco mais nossa observação do ciclo lunar. O que vamos descrever agora é o método que o sábio grego Aristarco de Samos (séc. III A.C.), da escola de Alexandria, usou para

comparar as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol.

Existem duas posições da Lua em sua órbita, o “quarto crescente” e o “quarto minguante”, quando o disco lunar apresenta-se, para um observador terrestre, com metade iluminada e outra metade escura (Fig. 2). Quando isso acontece, o triângulo Terra-Lua-Sol é retângulo, com ângulo reto no vértice ocupado pela Lua. Qualquer pessoa pode fazer uma observação simples e notar que nessa configuração o ângulo $\alpha = \widehat{LTS}$ (Fig. 3) é muito próximo de 90° , indício de que o Sol está efetivamente muito mais longe da Terra que a Lua. Esse fato é facilmente notado ao nascer e ao pôr do Sol, evidentemente com a Lua em quarto crescente ou quarto minguante (meia-lua), como ilustra a Fig. 3. Aristarco teria medido esse ângulo α , encontrando para ele o valor de 87° . Então, o ângulo $\beta = \widehat{LTS}$ seria de 3° . Basta agora construir um triângulo retângulo com esses ângulos e verificar o valor da razão TS/TL , que é a mesma para todos os triângulos a ele semelhantes. Aristarco verificou que essa razão estava compreendida entre 18 e 20, de sorte que a distância da Terra ao Sol cerca de vinte vezes a distancia da Terra à Lua.

Voltemos a considerar o problema de medir o ângulo α (Fig. 2). Na verdade é mais fácil calcular esse ângulo do que medi-lo diretamente. Basta observar o tempo gasto pela Lua para completar uma volta em torno da Terra e o tempo de passagem de minguante a crescente; com estes dados uma proporção simples resolve o problema. O ciclo lunar dura 29,5 dias e, ao que tudo indica, Aristarco teria observado que a passagem de minguante a crescente durava 14,25 dias, um dia menos que a passagem de crescente a minguante. Admitindo uma velocidade uniforme da Lua em sua órbita, os ângulos descritos pelo seu raio vetor são proporcionais aos tempos gastos nos deslocamentos correspondentes. Então, com referencia à Fig. 2, podemos escrever

$$\frac{360^\circ}{29,5} = \frac{2\alpha}{14,25},$$

donde podemos $\alpha = 86,57^\circ$, portanto, $\frac{TS}{TL} = \sec \alpha = \sec 86,95^\circ \cong 18,8$

logo $TS = 18,8 TL$.

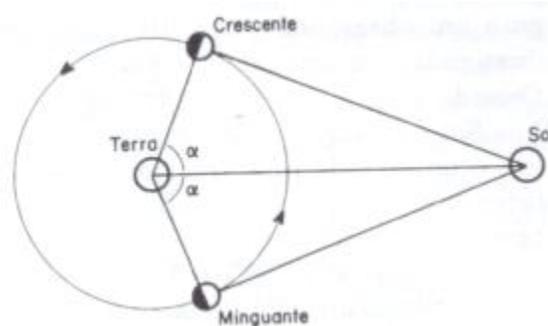


Fig. 2

É preciso que se diga que o resultado de Aristarco está muito longe do valor correto, pois sabemos hoje que a distância da Terra ao Sol é a cerca de 400 vezes a distancia da Terra à Lua. Em conseqüência, o ângulo α está próximo a $89,86^\circ$, portanto muito perto de 90° ! Os raios solares que se dirigem à Terra à Lua são praticamente paralelos. Isto põe o

problema de explicar como Aristarco teria chegado ao cálculo de a . Ao que parece, a diferença que ele teria notado entre o tempo gasto pela Lua numa volta completa em torno da Terra e o tempo para ir de minguante a crescente se deve à peculiaridade do movimento da Lua naquela época, conforme G. Abell em seu livro ([1], p.21).

Tamanhos do Sol e da Terra

Aristarco observou que o Sol e a Lua têm o mesmo “tamanho angular”. Em outras palavras, o ângulo 2α sob o qual um observador terrestre vê o Sol é o mesmo sob o qual ele vê a Lua (Fig. 4). Esse fato, aliás, é comprovado pela observação de um eclipse total do Sol. De fato, quando ocorre tal eclipse, o disco lunar coincide com o disco solar, encobrindo-o por inteiro.

Aristarco estimou o ângulo 2α da Fig. 4 como sendo 2° ; na verdade ele é de cerca de apenas $0,5^\circ$. Mas isto, como o leitor deve notar, não prejudica o resultado que obteremos a seguir, baseado na semelhança dos triângulos TLL' e TSS' . Esta semelhança nos permite escrever

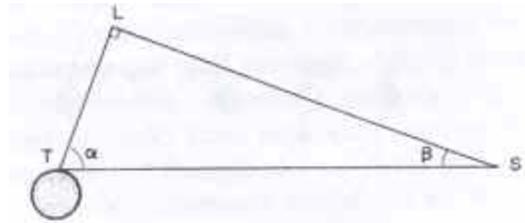


Fig. 3

isto é, os raios do Sol e da Lua estão entre si como as distâncias TS e TL respectivamente. Mas, pelo que vimos anteriormente,

$$\frac{TS}{TL} \cong 20,$$

de sorte que $SS' \cong 20 LL'$, segundo Aristarco, ou seja, o raio do Sol, é aproximadamente a vinte vezes o raio da Lua.

Tendo em vista referências futuras, vamos resumir aqui resultados já obtidos. Sejam $D_S = TS$ (Fig. 4) a distância da terra ao Sol, $D_L = TL$ a distância da Terra à Lua, $R_S = SS'$ o raio do Sol e $R_L = LL'$ o raio da Lua. Então:

$$\frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L} = a \cong \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{D_S}{D_L} = b,$$

onde, para Aristarco, $\alpha \cong 1^\circ$ e $b \cong 20$, quando, na realidade, $\alpha \cong 0.25^\circ$ e $b = 400$.

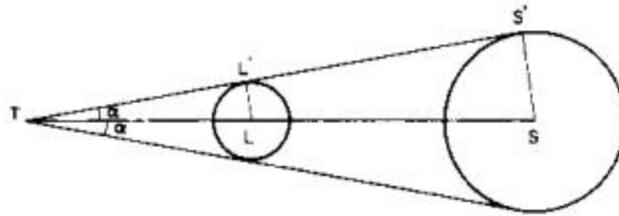


Fig. 4.

Relações com o raio da Terra

Para relacionar as distâncias e os tamanhos do Sol e da Lua a raio da Terra, Aristarco observou o que acontece durante um eclipse da Lua, quando este satélite atravessa o cone de sombra da terra (Fig. 5). Pelo tempo gasto nessa travessia, ele calculou que o diâmetro do cone de sombra da Terra, na altura da Lua, era $8/3$ do diâmetro da Lua.

Na Fig. 6. L.T. S são os centros da Lua, da Terra e do Sol, respectivamente; $LH = R_L$, $TC = R_T$ e $SA = R_S$ são os respectivos raios; LD é o raio do cone de sombra da altura da Lua, de sorte que $LD = 8R_L/3$. Da semelhança dos triângulos DFC e CEA resulta:

$$\frac{CF}{DF} = \frac{AE}{CE}$$

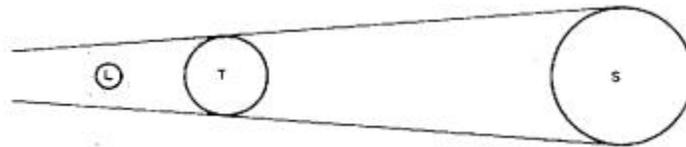


Fig. 5.

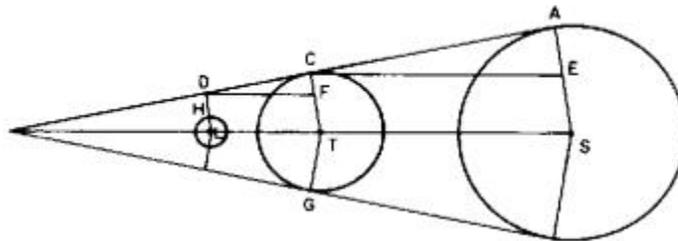


Fig.6.

Mas

$$CF = TC - TF = R_T - LD = R_T - 8R_L/3; DF = D_L;$$

$$AE = AS - SE = R_S - R_T; CE = D_S.$$

Substituindo estes valores na igualdade anterior,

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{D_L} = \frac{R_S - R_T}{D_S}$$

Da seção anterior temos que

$$D_S = bD_L, R_S = aD_S = abD_L, R_L = aD_L$$

de sorte que a igualdade anterior pode ser escrita na forma

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}aD_L}{D_L} = \frac{abD_L - R_T}{bD_L}$$

Daqui segue-se que

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right)R_T = \left(\frac{8}{3} + 1\right)aD_L,$$

ou ainda

$$D_L = \frac{3(b+1)R_T}{11ab}$$

Então,

$$D_S = bD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11a},$$

$$R_S = abD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11},$$

e $R_L = aD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11b}.$

Deste modo, substituindo $a = \text{tg } 1^\circ \cong 0,017$ e $b \cong 20$, podemos obter as quatro grandezas, D_L , D_S , R_S , e R_L , em termos do raio da Terra R_T , com os dados de Artistarco:

$$D_L \cong 16,8R_T, D_S \cong 337R_T,$$

$$R_S \cong 5,7R_T, R_L \cong 0,29R_T.$$

Ao contrário, com os valores mais corretos $a = \text{tg } 1/4^\circ \cong 0,0044$ e $b = 400$, encontramos valores bem próximos dos valores modernos:

$$D_L \cong 62R_T, D_S \cong 24855R_T,$$

$$R_S \cong 109R_T \text{ e } R_L \cong 0,27T_R.$$

Os cálculos que vimos descrevendo encontram-se num livro de Aristarco, intitulado “Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua”. Esta é a única obra de Aristarco que chegou até nós. Dela existe uma primorosa edição comentada, com uma história da Astronomia Grega até os tempos de Aristarco, devida ao eminente historiador da ciência Thomas Heath. [3] Mais acessível para o leitor menos experiente são: o cap. 10 de Boyer [2], o cap. 2 de Abell [1] E os dois primeiros capítulos de Polya [4].

Eratóstenes e o raio da Terra

Pelo que vimos até agora, basta saber o raio da Terra para podermos calcular os tamanhos e as distâncias a que se encontram o Sol e a Lua.

Foi Eratóstenes (276-196 A.C.), outro sábio de Alexandria, quem fez o cálculo do raio da Terra mais célebre da antiguidade. Era sabido que quando o Sol se encontrava mais ao norte (solstício de inverno, para nós, habitantes do hemisfério Sul), os raios solares caíam verticalmente, ao meio dia, na localidade de Siene, hoje Assua, pois a imagem do Sol podia ser vista refletida nos poços mais fundos daquela cidade. Ao mesmo tempo, em Alexandria, os raios solares caíam inclinadamente, fazendo um ângulo aproximado de $7,2^\circ$ com a vertical

(Fig. 7), ou seja, $1/50$ da circunferência completa, que é de 360° . Como os raios solares são praticamente paralelos, isso significa que o ângulo central \widehat{ACS} também mede $7,2^\circ$. Pela proporcionalidade entre arcos e ângulos,

$$\frac{2\pi R}{AS} = \frac{360^\circ}{7,2^\circ}$$

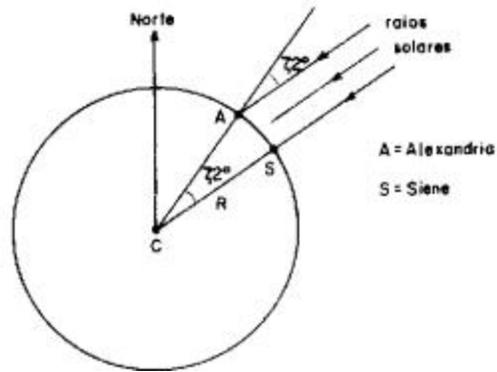


Fig. 7

onde R é o raio da Terra. Como a distância \widehat{AS} de Alexandria a Siene era conhecida e igual a 45 000 estádios, podemos calcular a circunferência terrestre:

$$2\pi R = 5000 \times \frac{360}{7,2} \cong 250000 \text{ estádios} \cong 46300 \text{ Km.}$$

Até hoje não se sabe ao certo o valor do estádio usado por Eratóstenes. Segundo uma interpretação, esse estádio seria de aproximadamente 185 metros, o que dá para o raio da Terra o valor (note-se que $2\pi \cong 6,28$)

$$R \cong \frac{250000 \times 185}{6,28} \cong 7365 \text{ Km.}$$

O valor atual, no equador, é de 6378 km, mostrando que o resultado de Eratóstenes é bastante razoável.

Ptolomeu e a distância da Terra à Lua

Cláudio Ptolomeu foi o último grande astrônomo da antiguidade. Sua famosa obra, o Almagesto, inclui, além de suas contribuições próprias, as de seus vários predecessores. Pelos muitos fatos citados nesse livro, dentre eles vários eclipses, infere-se que Ptolomeu teria vivido por volta do ano 150 de nossa era.

Ptolomeu propôs um método bastante engenhoso e simples para calcular a distância da Terra à Lua. Para isso imaginemos que um observador em A (Fig.8) veja a Lua na posição L, sobre a vertical de A. Depois de um certo tempo t , o observador passa da posição A à

posição A' , devido ao movimento de rotação da Terra. Ao mesmo tempo a Lua passará à posição L' . Como os ângulos $\widehat{ACA'}$ e $\widehat{ACL'}$ são conhecidos (pois os movimentos da Terra e da Lua são conhecidos), também é conhecido o ângulo $\gamma = \widehat{ACA'} - \widehat{ACL'}$. O ângulo α é medido diretamente, o que permite conhecer seu suplementar β . Assim, o triângulo $CA'L'$ fica completamente determinado pelo lado $CA' = R$ (raio da Terra) e os ângulos β e γ . Portanto, a distância CL' da Terra à Lua pode ser determinada em termos de R .

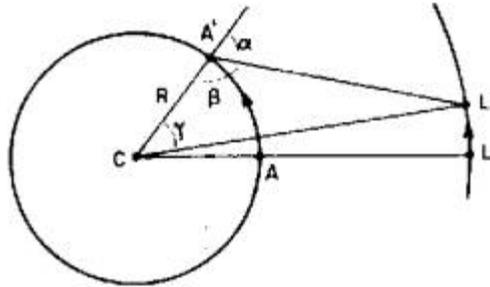


Fig. 8

Referências bibliográficas

- [1] G. O. Abell, *Exploration of the Universe*, Holt, Rinehart and Winston (1975).
- [2] C. B. Boyer, *História da Matemática*, Editora Edgard Blücher Ltda. (1974).
- [3] T. Heath, *Aristarcus of Samos*, Oxford University Press (1959).
- [4] G. Pólya, *Mathematical Methods in Science*, the Mathematical Association of America (1977).

N. da R. Somos freqüentemente procurados por estudantes à busca de novas idéias para serem apresentadas nas Exposições de Ciências. Acharmos que, com um pouco de imaginação e alguns cartazes ou maquetes, as perguntas e respostas deste artigo se constituem em material interessante para essas Exposições.